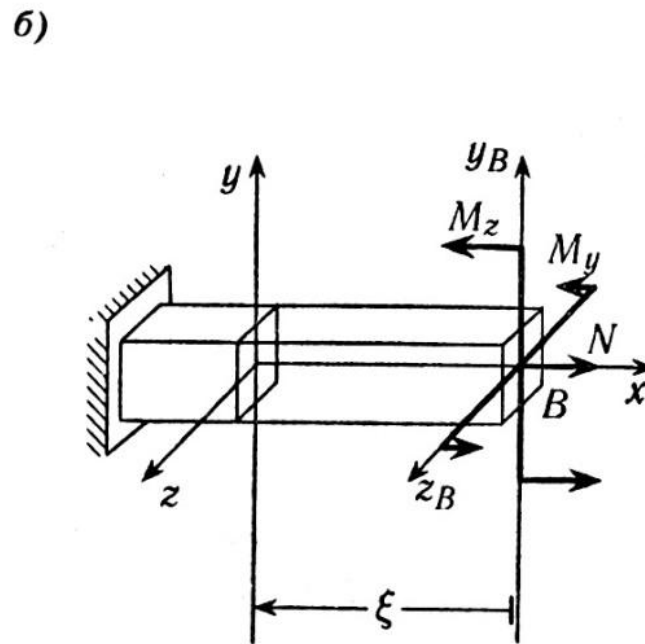
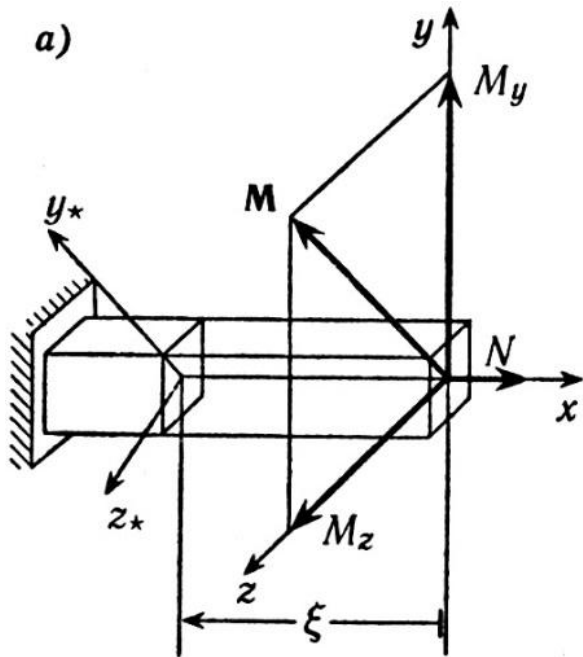


**СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ
СТЕРЖНЯ
С КРУЧЕНИЕМ
И РАСТЯЖЕНИЕМ-
СЖАТИЕМ**

Формула для нормальных напряжений



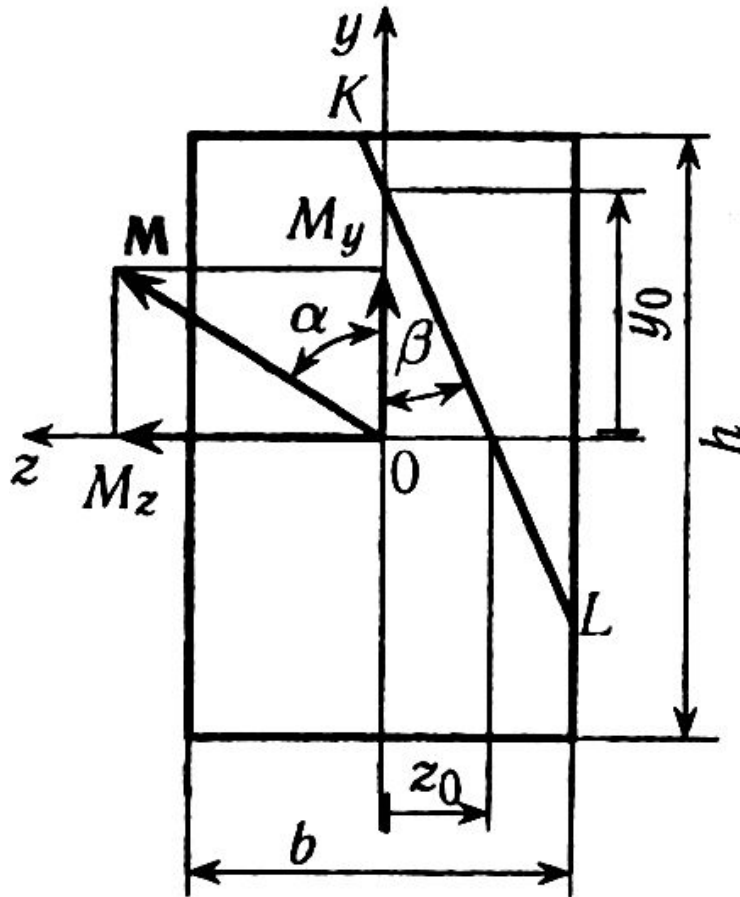
$$\sigma^* = -\frac{M_z}{I_z} y,$$

$$\sigma^{**} = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma^{***} = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (1)$$

Уравнение нейтральной линии



Нейтральная линия – это след пересечения плоскости поперечного сечения нейтральным слоем.

Т.е. $\sigma = 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (2)$$

Отрезок KL отвечает этому уравнению.

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей координат:

$$\text{при } z = 0 \quad y_0 = \frac{NI_z}{M_z A}, \quad (3)$$

$$\text{при } y = 0 \quad z_0 = -\frac{NI_y}{M_y A} \quad (4)$$

$$\text{Наклон } \vec{M} \text{ к оси } y: \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_z}{M_y}. \quad (5)$$

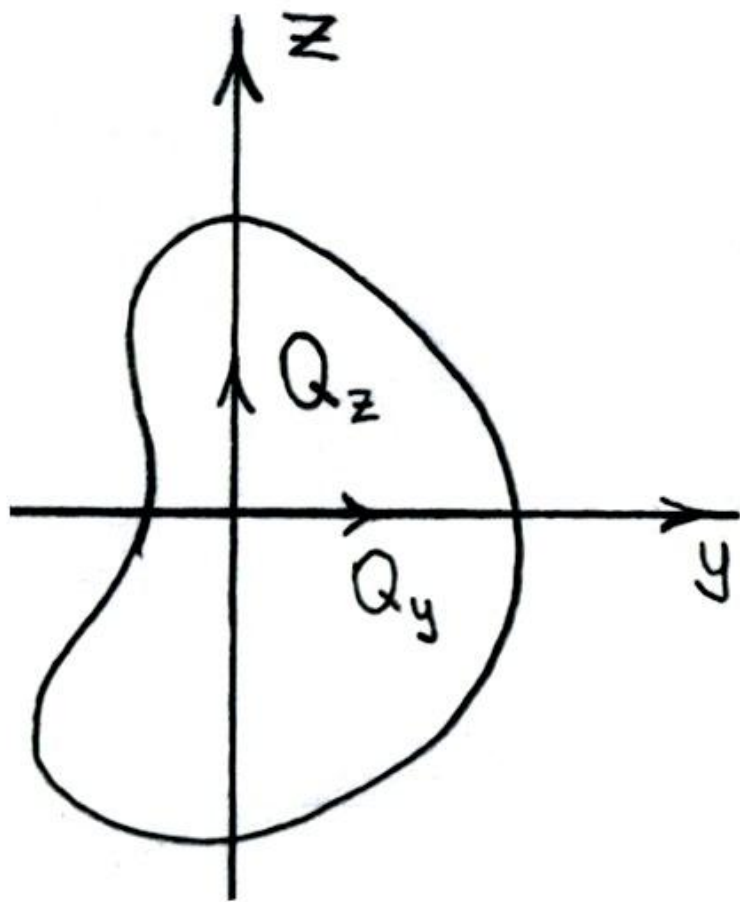
Наклон нейтральной линии к оси y :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} \quad (6)$$

$$(5) \rightarrow (6) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

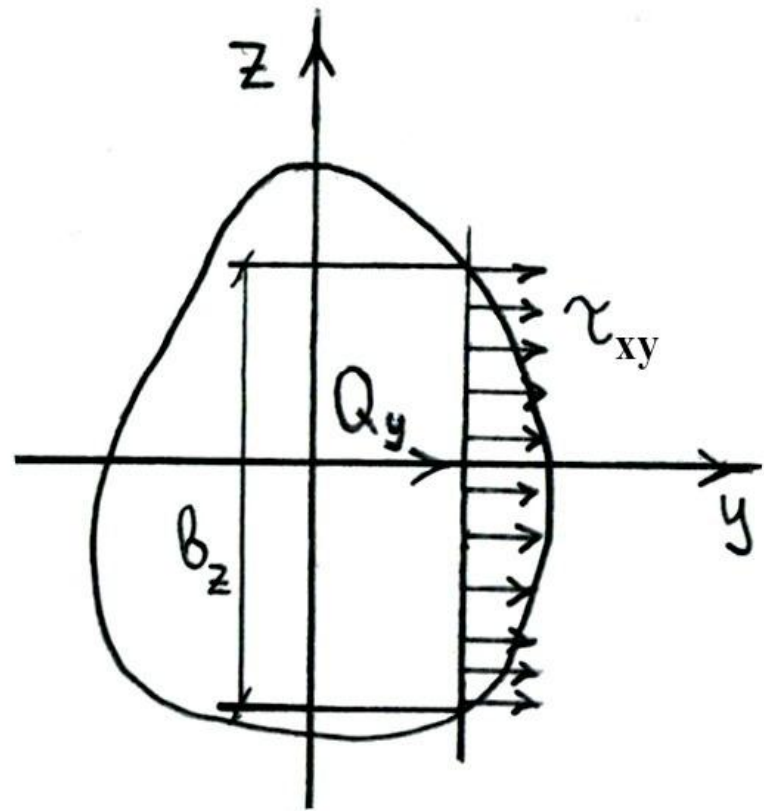
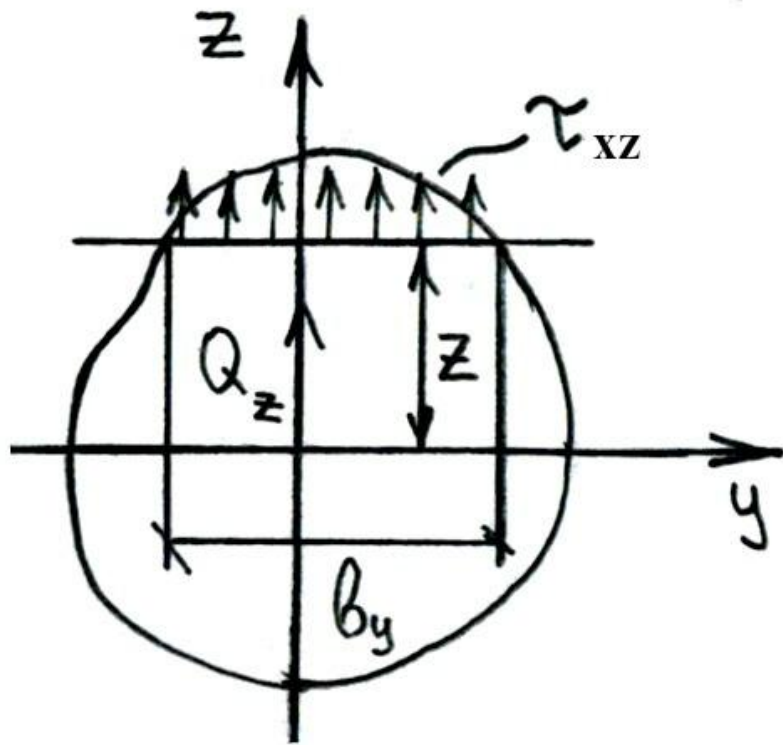
При $I_y \neq I_z$ нейтральная линия $\nparallel \vec{M}$.

Вычисление касательных напряжений



Q_y, Q_z –
перерезывающие силы

Рассмотрим по
отдельности их
действие.



$$\tau_{xz} = \frac{Q_z y}{I_y b_y}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y z}{I_z b_z}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

тонкостенные стержни не изучаем

Стержень круглого сечения

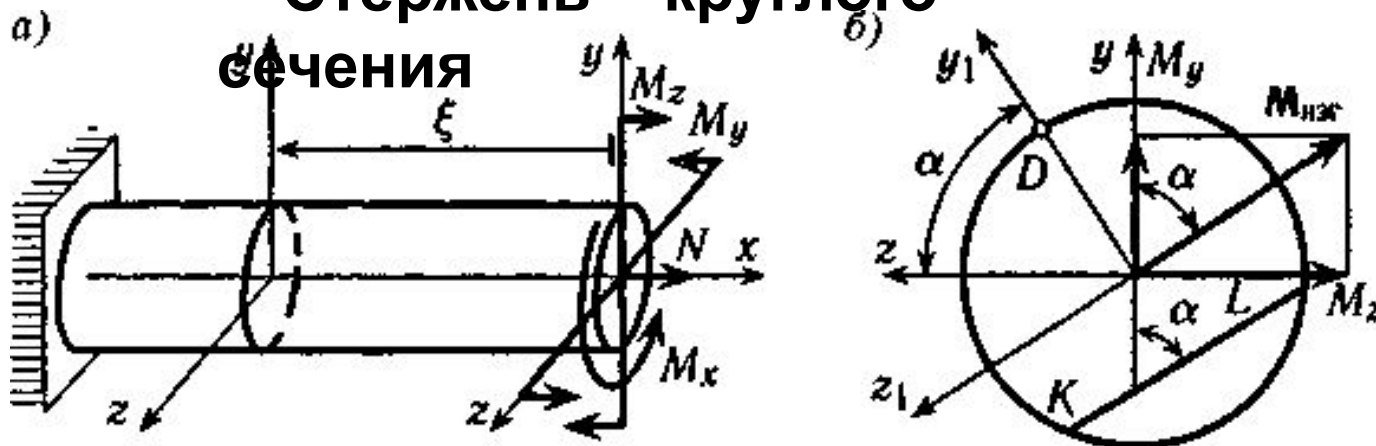


Рис.1

$$I_y = I_z = I \rightarrow (7') \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_z}{M_y} \quad (M_y > 0; M_z < 0)$$

$$M_{y_1} = 0 \quad M_{z_1} = M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad ; KL \parallel M_{изг}$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_{z_1}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} \quad (1)$$

$$\tau_D = \frac{M_x}{W_p} \quad (2)$$

рис. б $\Rightarrow \sigma_D = \sigma_{\max}$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_D^2 + 4\tau_D^2} \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} \right)^2 + 4 \left(\frac{M_x}{W_p} \right)^2} \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma] \quad (5)$$

Подбор R

Если $N = 0$

$$\sigma_{max} = 4 \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi R^3} \quad (6)$$

$$\tau_{max} = \frac{2M_x}{\pi R^3} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} &= \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{\left(\frac{\pi R^3}{4}\right)^2} + \frac{4M_x^2}{\left(\frac{\pi R^3}{2}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\frac{\pi R^3}{4}} \leq [\sigma] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\rightarrow R \rightarrow R + \Delta R \rightarrow (4) \rightarrow (5)$$

Стержень прямоугольного сечения

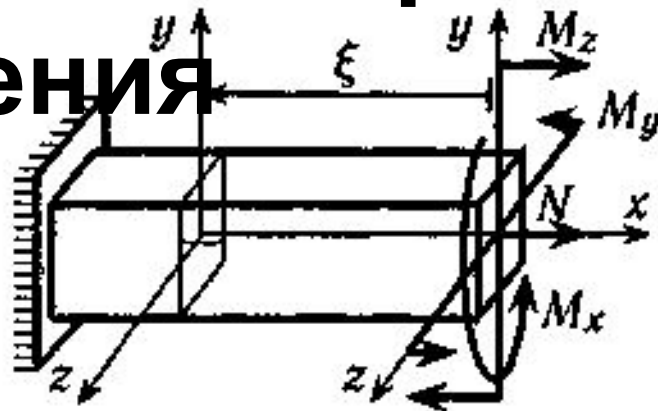


Рис.2 ($M_y > 0; M_z < 0$)

$$\tau_E = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_k} \quad (1)$$

$$W_k = \beta b^3 \quad (2)$$

$$\tau_{\max}^* = \gamma \tau_{\max} \quad (3)$$

$$\tau_{\max}^* = \tau_F$$

$$\tau_{\max}^* \leq \tau_{\max} \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_k} \quad (5)$$

$$I_k = \alpha b^4 \quad (6)$$

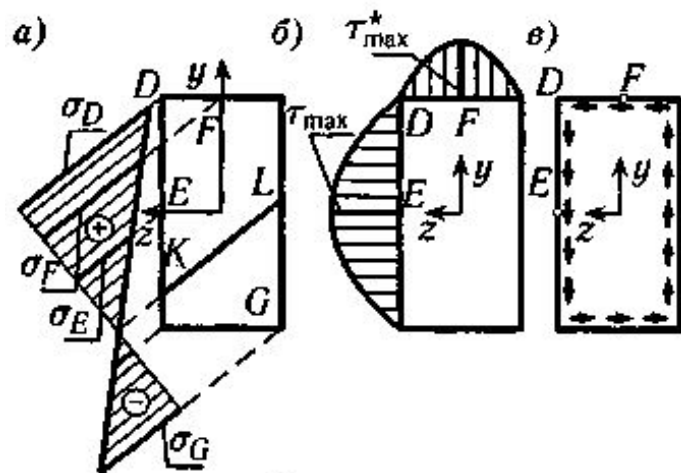
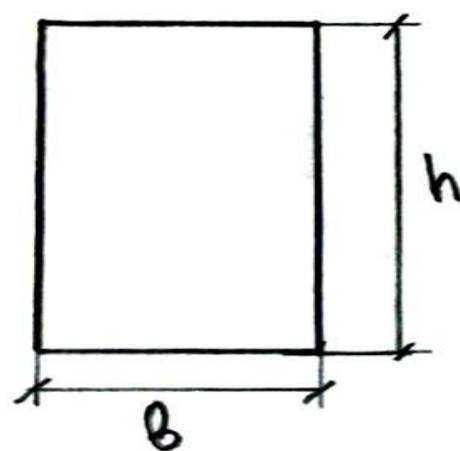


Рис. 2

Зависимость коэффициентов α , β и γ от отношения h/b
 сторон прямоугольного сечения стержня

	h/b									
	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,140	0,294	0,375	0,457	0,622	0,790	1,123	1,789	2,456	3,123
β	0,208	0,346	0,418	0,493	0,645	0,801	1,128	1,789	2,456	3,123
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742



Условие прочности

$$1. \quad \sigma_D = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma] \quad (7)$$

(См.Рис.1. ($M_y > 0; M_z < 0$); Рис. 2)

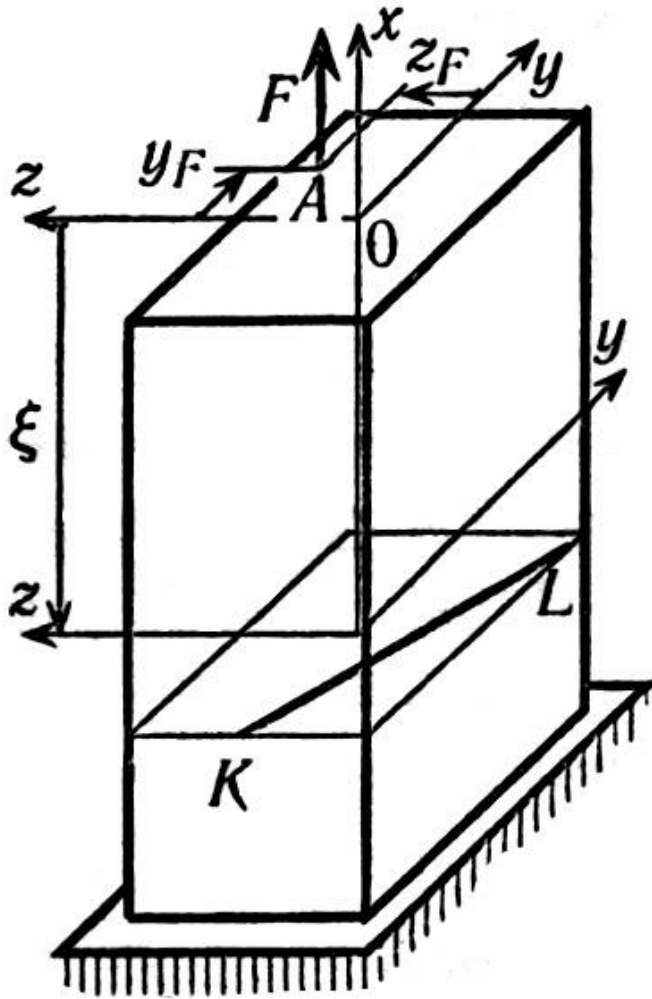
$$2. \quad \tau_E = \tau_{\max} \rightarrow (1), (2) \rightarrow \sigma_{\text{ЭКВ},E} = \sqrt{\sigma_E^2 + 4\tau_E^2} \leq [\sigma] \quad (8)$$

$$3. \quad \tau_{\max} = \tau_F \rightarrow (1), (3) \rightarrow \sigma_{\text{ЭКВ},F} = \sqrt{\sigma_F^2 + 4\tau_F^2} \leq [\sigma] \quad (9)$$

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} \quad \left((y_E = 0; z_E = \frac{b}{2}) \text{Рис. 2} \right) \quad (10)$$

$$\sigma_F = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} \quad \left(y_F = \frac{h}{2}; z_F = 0 \right) \quad (11)$$

Внецентренное растяжение и сжатие

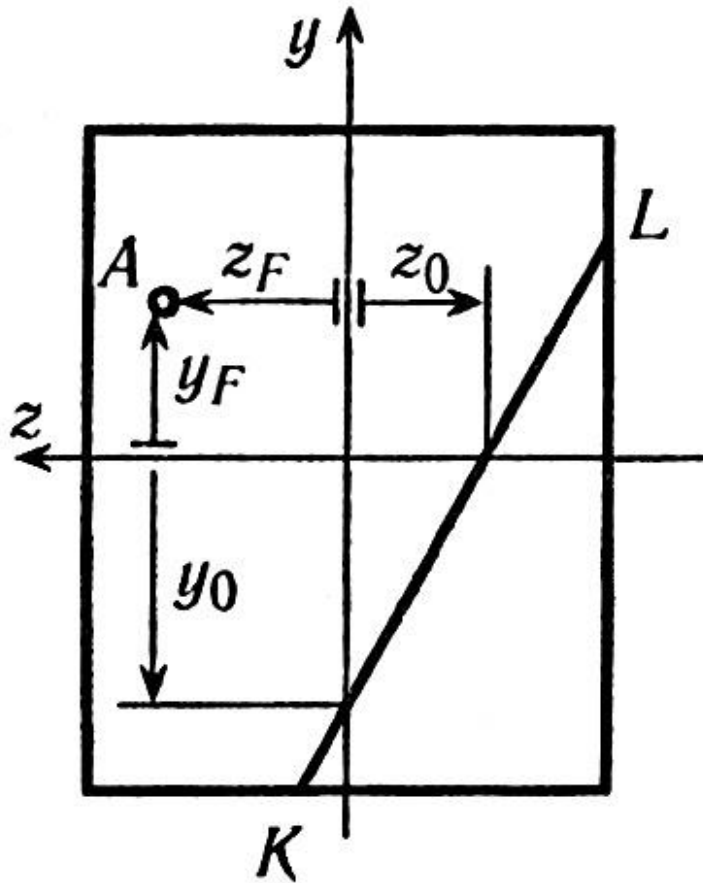


F параллельна оси x

$$N = F, M_y = F z_F, M_z = -F y_F$$
$$\Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} + \frac{F z_F}{I_y} z + \frac{F y_F}{I_z} y \quad (1)$$

Нейтральная линия

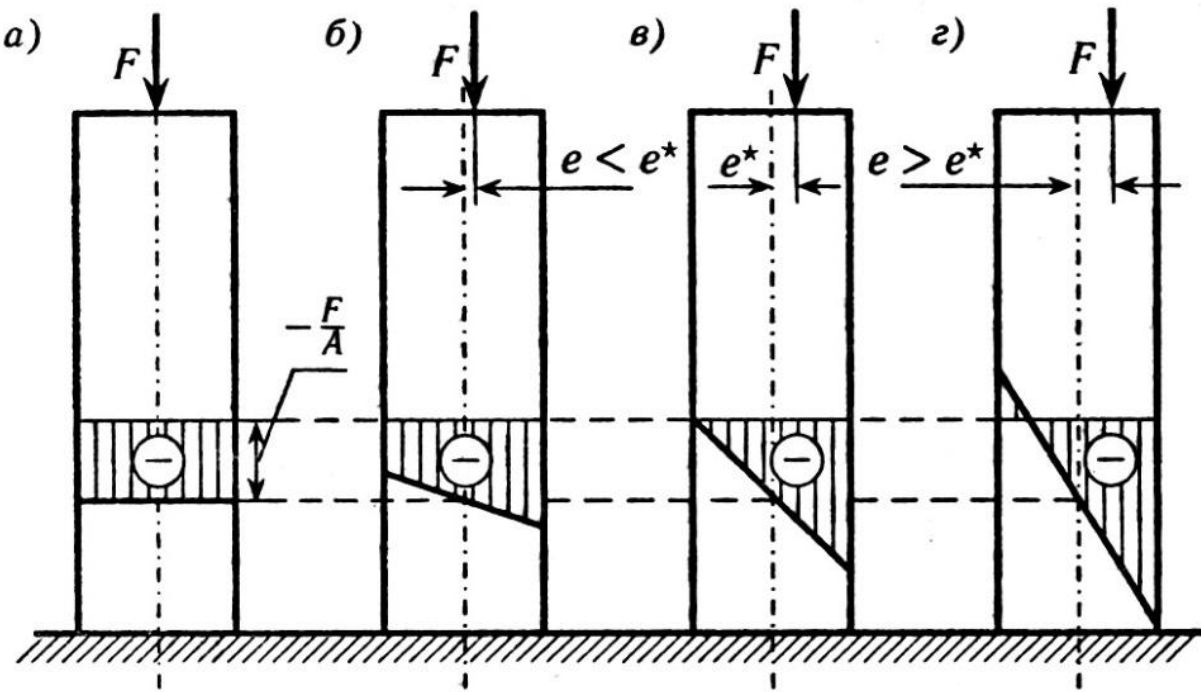
$$0 = \frac{1}{A} + \frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y$$



Отрезки, отсекаемые
нейтральной линией от осей
координат:

$$y_0 = -\frac{I_z}{Ay_F}, \quad z_0 = -\frac{I_y}{Az_F}$$

При $y_F \rightarrow 0$ и $z_F \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma$
 $= \frac{F}{A}$



а) $e = 0, \sigma = -\frac{F}{A}$

б) При наличии эксцентриситета $\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{Fe}{W}$

в) $\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{Fe^*}{W} = 0 \Rightarrow e^* = \frac{W}{A}$

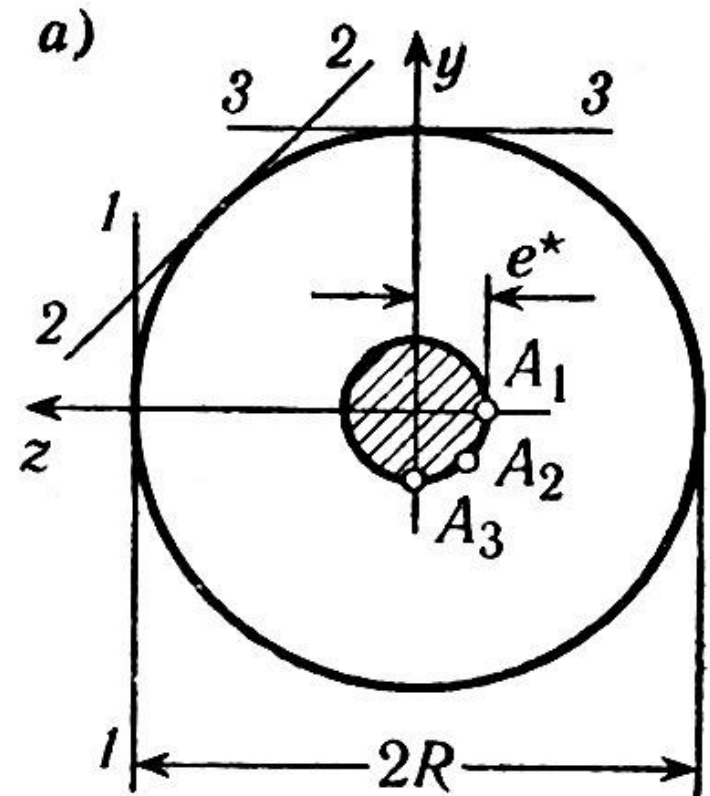
e^* ограничивает зону вокруг центра тяжести, называемую *ядром сечения*. Если продольная сила приложена внутри ядра сечения, то по поперечному сечению рассматриваемого стержня возникнут нормальные напряжения одного знака (отрицательные при сжатии, положительные при растяжении).

$$\Gamma) \left| \frac{F}{A} \right| < \left| \frac{M_{\text{изг}}}{W} \right|$$

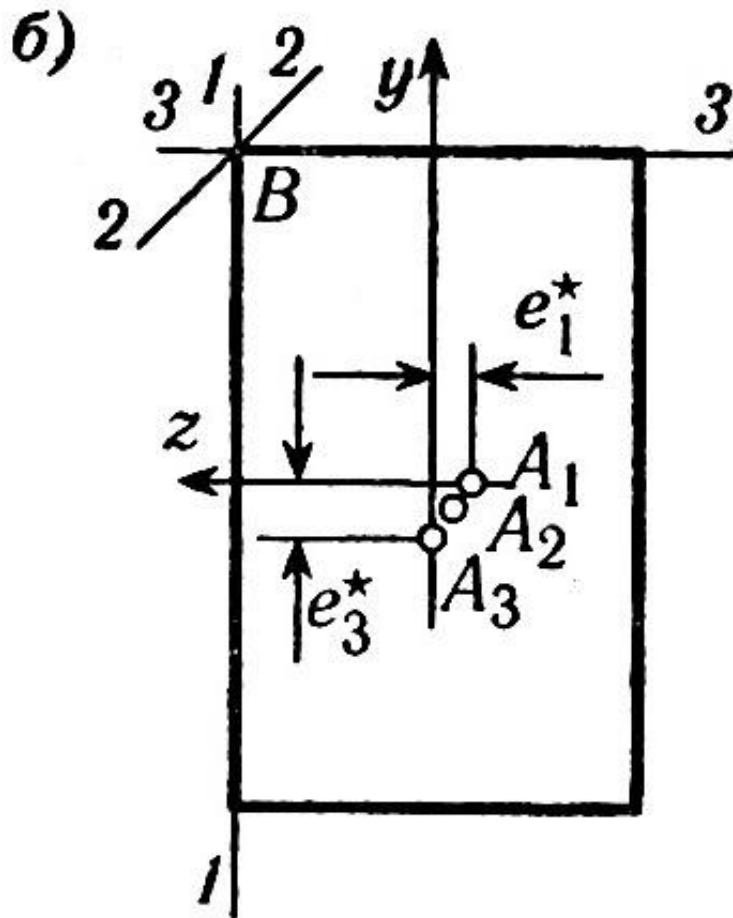
Круговое сечение

$$e^* = \frac{W}{A} = \left(\frac{1}{4} \pi R^3 \right) / (\pi R^2) = \frac{R}{4}$$

A_1, A_2, A_3 - точки приложения продольной силы в случае, когда нейтральная линия «обкатывается» по внешнему контуру сечения, занимая положения 1-1, 2-2, 3-3.



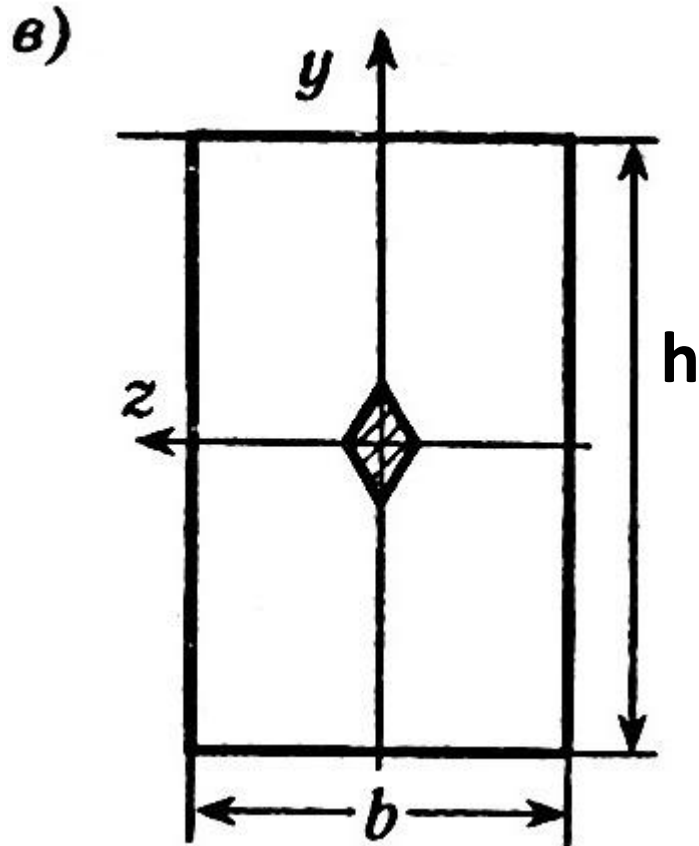
Прямоугольное сечение



$$e_1^* = \frac{W_y}{A} = \left(\frac{1}{6} h b^2 \right) / (h b) = \frac{b}{6}$$
$$e_3^* = \frac{W_z}{A} = \left(\frac{1}{6} b h^2 \right) / (h b) = \frac{h}{6}$$

При перемещении точки приложения продольной силы A_1, A_2, A_3 нейтральная линия «поворачивается» вокруг точки B , занимая положения 1-1, 2-2, 3-3.

Ядро сечения для
прямоугольника имеет
форму ромба.



$$z_B, y_B \rightarrow (1) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{z_F}{I_y} z_B + \frac{y_F}{I_z} y_B \quad (2)$$

$z_B = const, y_B = const \Rightarrow$
(2) — уравнение прямой.

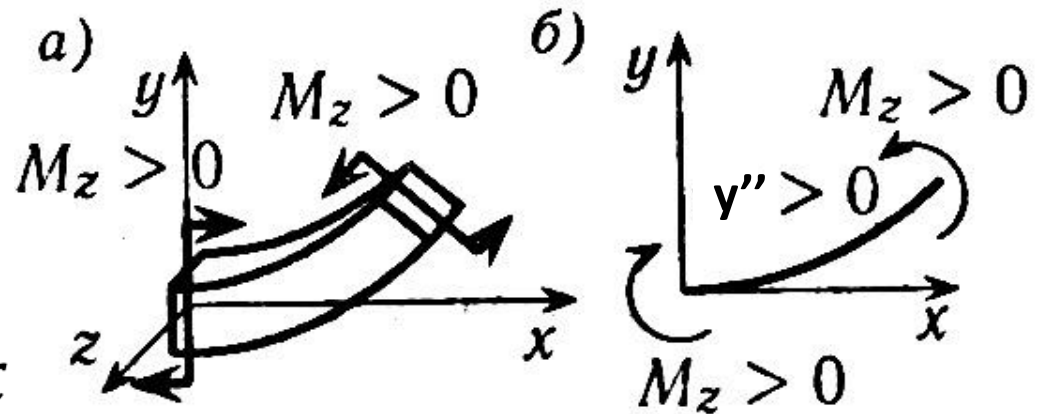
Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

• Перемещения в главных плоскостях взаимно независимы. Для плоскости xu было получено ранее:

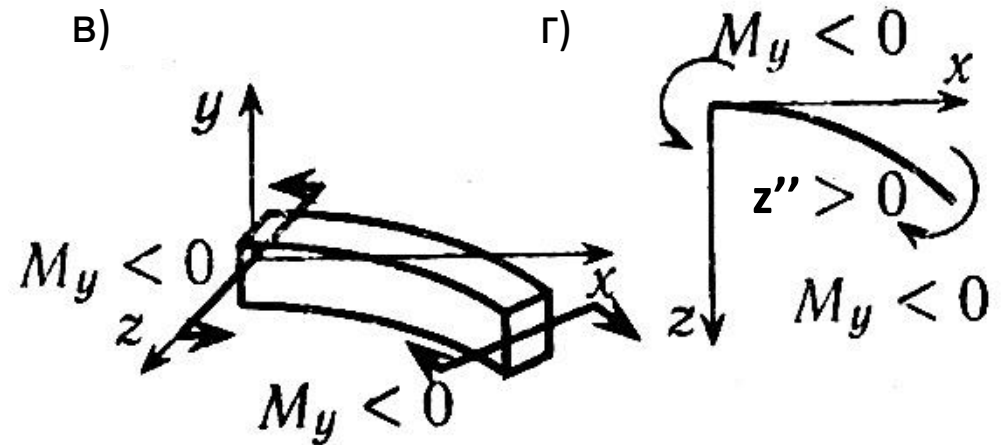
$$EI_z y'' = M_z$$

$$EI_z y' = C_z + \int M_z dx$$

$$EI_z y = D_z + C_z x + \int (\int M_z dx) dx$$



Сопоставляя схемы, приведённые на рис. в и г,
получаем для плоскости xz



$$EI_y z'' = -M_y$$

$$EI_y z' = C_y - \int M_y dx$$

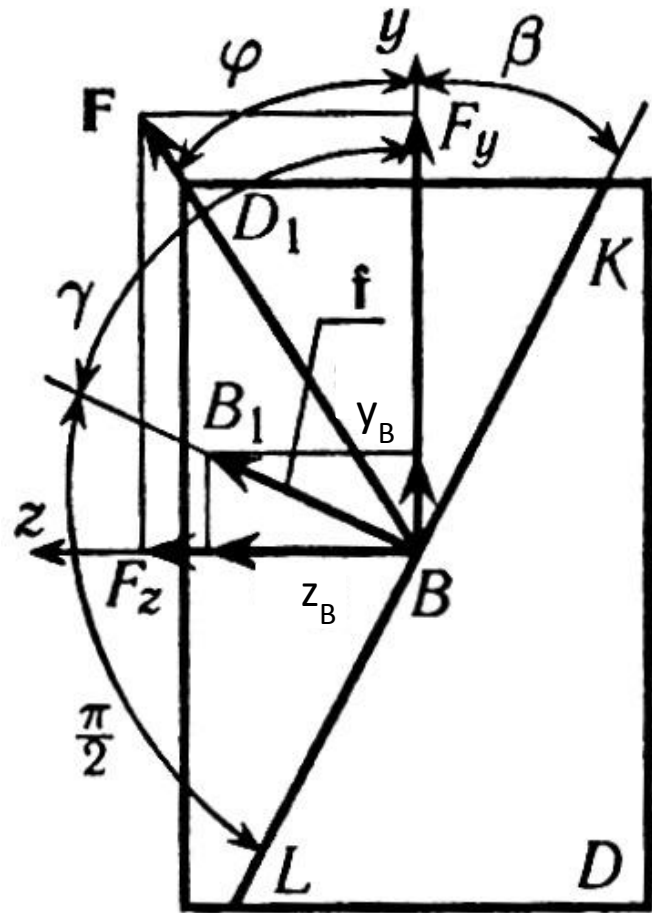
$$EI_y z = D_y + C_y x - \int (\int M_y dx) dx$$

В общем случае $C_y \neq C_z$, $D_y \neq D_z$.

Пример. Косой изгиб



y_B и z_B СВОБОДНОГО КОНЦА:



$$y_B = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3 \cos \varphi}{3EI_z}$$

$$z_B = \frac{F_z l^3}{3EI_y} = \frac{Fl^3 \sin \varphi}{3EI_y}$$

$$f = \sqrt{y_B^2 + z_B^2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{z_B}{y_B} = \frac{I_z F_z l}{I_y F_y l} = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} = \\ &= \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

Внутренние усилия в заделке балки:

$$N = 0, M_y = -F_z l = Fl \sin \varphi, M_z = F_y l = Fl \cos \varphi$$

Уравнение для нормальных напряжений:

$$\sigma = -\frac{Fl}{I_y} z \sin \varphi - \frac{Fl}{I_z} y \cos \varphi$$

Условие прочности:

$$\sigma_D = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

- $$\sigma_D = \frac{Fl}{W_y} \sin \varphi + \frac{Fl}{W_z} \cos \varphi = \frac{Fl}{W_z} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin \varphi + \cos \varphi \right) \leq [\sigma]$$

Двутавровая балка

При $\varphi = 0^\circ$ $\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$

При $\varphi = 6^\circ$ $\cos \varphi \approx 1,0$, $\sin \varphi \approx 0,1$.

Для оценочного расчета примем $\frac{W_z}{W_y} \approx 10,0$.

$$\sigma_{max} = \frac{2M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

Небольшая неаккуратность в установке двутавра под нагрузку приводит к существенному увеличению напряжений.

Спасибо за внимание!

- $$(\cdot)A \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{I_u} v_{max}$$

$$v_{max} = r, \quad I_u = \frac{\pi r^4}{4}, \quad A = \pi r^2$$

$$\sigma = \left| \frac{N}{\pi r^2} \right| + \left| \frac{4M_y}{\pi r^3} \right|$$

$$\tau_A = \tau_{max} = \left| \frac{2M_x}{\pi R^3} \right|$$

$$\sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma_A^2 + 3\tau_A^2} \leq [\sigma]$$

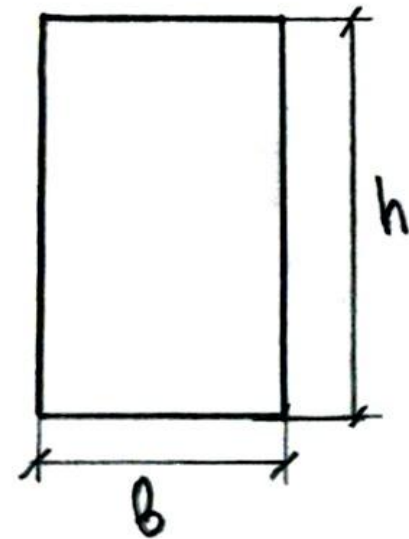
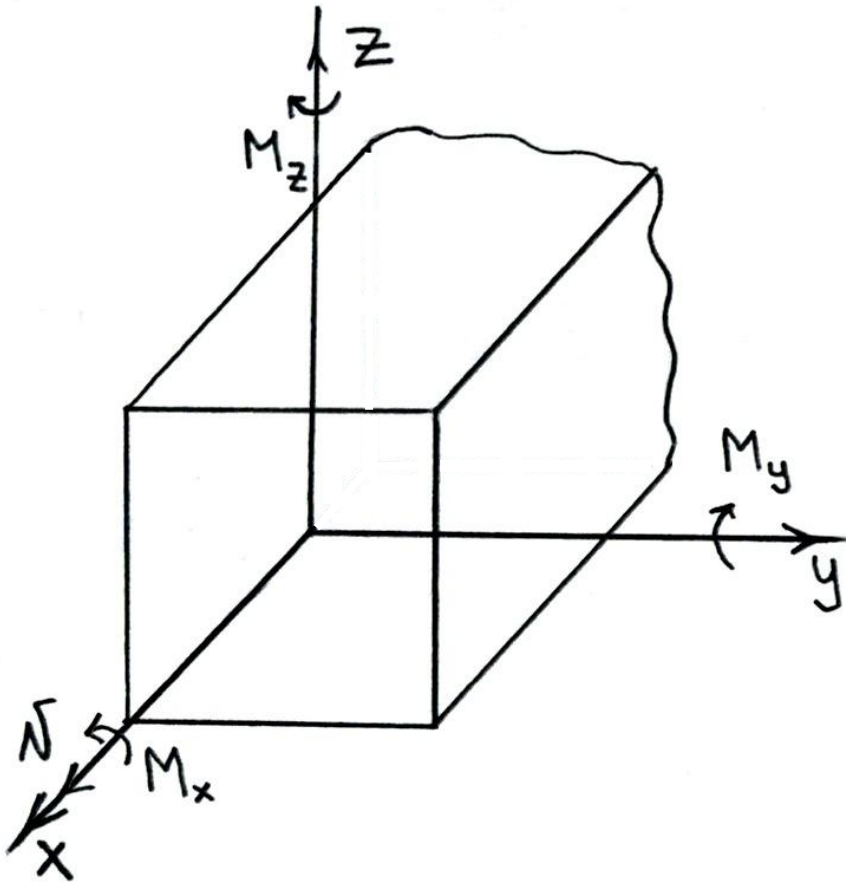
Если $N = 0$, то

$$\sigma_{max} = 4 \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi R^3}$$

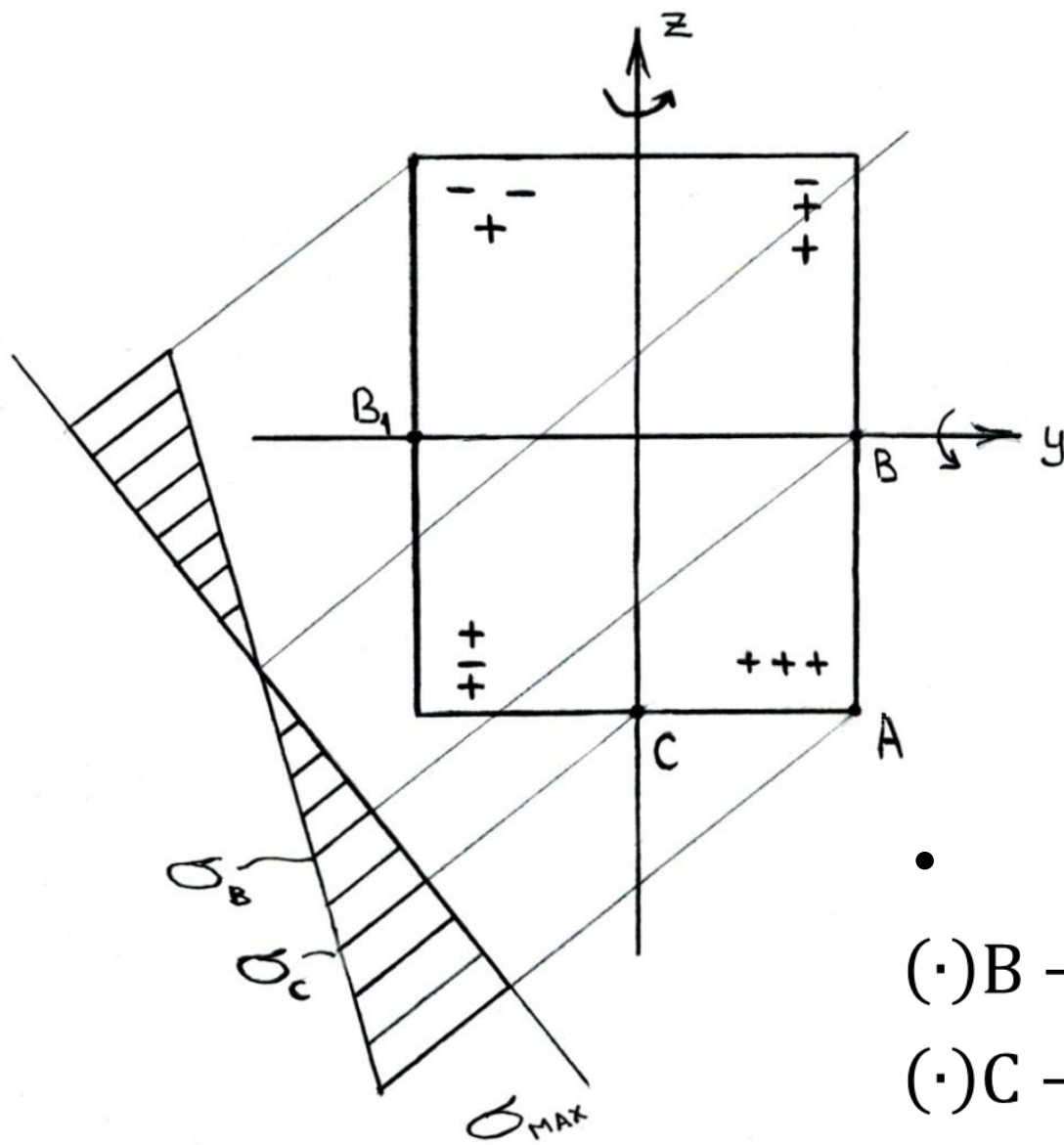
$$\tau_{max} = \frac{2M_x}{\pi R^3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} &= \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{\left(\frac{\pi R^3}{4}\right)^2} + \frac{4M_x^2}{\left(\frac{\pi R^3}{2}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\frac{\pi R^3}{4}} \leq [\sigma] \end{aligned}$$

Проверка прочности при одновременном растяжении, кручении и изгибе



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$



- $(\cdot)A - \sigma_{max}$
- $(\cdot)B - \tau_{B_max}$ И σ_B
- $(\cdot)C - \tau'_{C_max}$ И σ_C

1. (·)A

$$|\sigma| = |\sigma|_{max} = \left| \frac{N}{A} \right| + \left| \frac{M_y}{I_y} z_{max} \right| + \left| \frac{M_z}{I_z} y_{max} \right| \quad (13)$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}, \quad W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad A = bh, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{max}}, \quad (14)$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6}$$

Условие прочности:

$$\left| \frac{N}{A} \right| + \left| \frac{M_y}{I_y} z_{max} \right| + \left| \frac{M_z}{I_z} y_{max} \right| \leq [\sigma] \quad (15)$$

2. (·)В

$$\sigma_B = \left| \frac{N}{bh} \right| + \left| \frac{6M_z}{hb^2} \right| \quad (16)$$

$$\tau_B \text{ по таблицам } \tau_B = \frac{M_K}{\beta b^3}, \text{ где } \beta = f\left(\frac{h}{b}\right) \quad (17)$$
$$\beta < 1$$

$$\sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} \leq [\sigma] \text{ по теории } \tau_{\max} \quad (18)$$

$$\sqrt{\sigma_B^2 + 3\tau_B^2} \leq [\sigma] \text{ по энергетической} \\ \text{теории} \quad (19)$$

3) (·)C

$$\sigma_C = \left| \frac{N}{bh} \right| + \left| \frac{6M_y}{bh^2} \right| \quad (20)$$

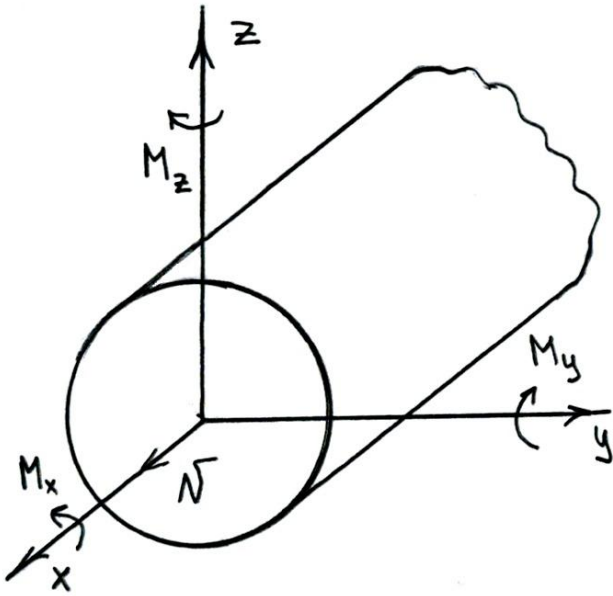
$$\tau_C = \frac{M_K}{\beta b^3} \gamma \quad (21)$$

$$\sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2} \leq [\sigma] \quad (22)$$

- $$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)^2 + (\sigma^2 + 4\tau^2) + \frac{1}{4} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sigma^2 + 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \sigma^2 + 4\tau^2 \right) + (\sigma^2 + 4\tau^2) +} \\ & \quad + \frac{1}{4} \left(\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \sigma^2 + 4\tau^2 \right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma^2 + 6\tau^2} \end{aligned}$$

Круглый стержень



$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N}{A} - \frac{M_u}{I_u} v$$

$$I_y = I_z = I_u = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

Косой изгиб

Из
конспекта!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!

$$M_u = \frac{qx^2}{2}$$

Разложим по осям z и y :

$$M_y = \frac{qx^2}{2} \cos \alpha$$

$$M_z = -\frac{qx^2}{2} \sin \alpha$$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$z > 0, y > 0$$

$$\dot{\sigma} = \frac{qx^2}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{I_y} z + \frac{\sin \alpha}{I_z} y \right)$$

Для нейтральной линии:

$$\frac{\cos \alpha}{I_y} z + \frac{\sin \alpha}{I_z} y = 0$$

$$\frac{z_0}{y_0} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

$$|\operatorname{tg} \varphi| = |\operatorname{tg} \alpha| \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

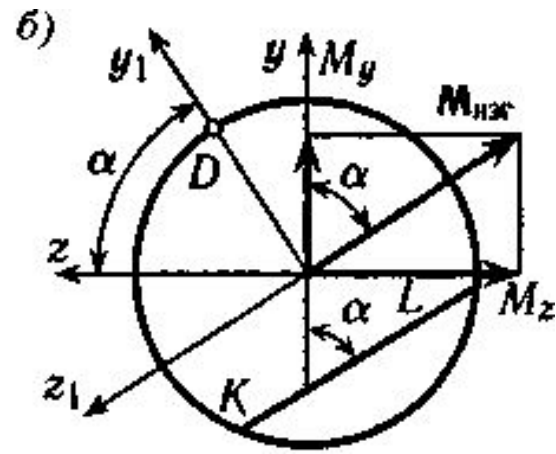
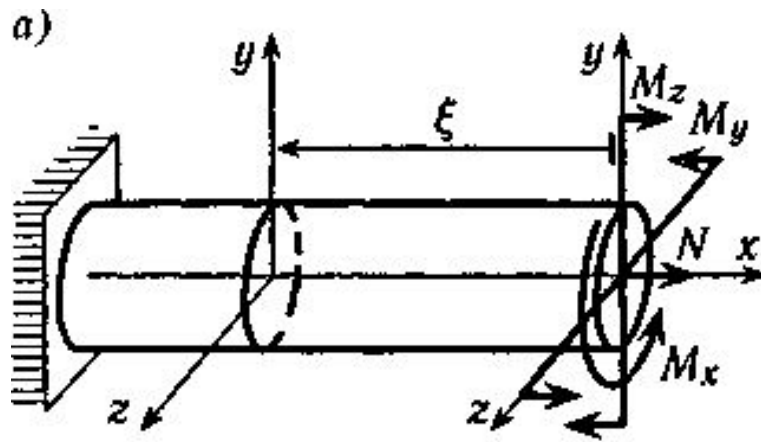


Рис. 12.11

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_z}{M_y} \quad I_y = I_z = I$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_D^2 + 4\tau_D^2}$$

$$M_{y_1} = 0 \quad M_{z_1} = M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} \right)^2 + 4 \left(\frac{M_x}{W_p} \right)^2}$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_{z_1}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]$$

$$\tau_D = \frac{M_x}{W_p}$$