Тақырыбы: *Қателер теориясы.*

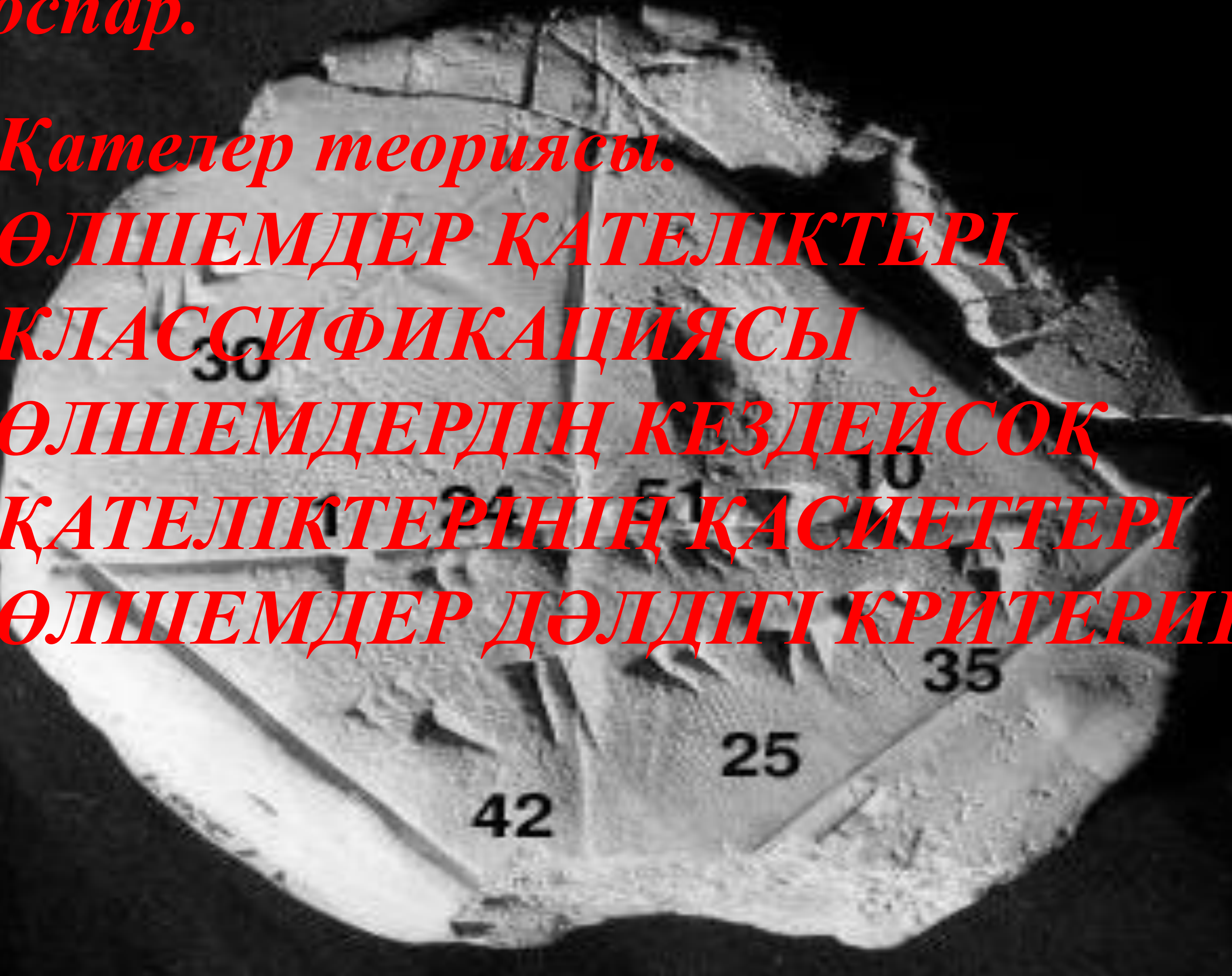
Орындаған:*Жеңісова Н.*

Қуан Н.

Абдиров А.

Тексерген:*Байдаулетова Г.К.*

Жоспар.



1. *Қателер теориясы.*
2. *ӨЛШЕМДЕР ҚАТЕЛІКТЕРІ КЛАССИФИКАЦИЯСЫ*
3. *ӨЛШЕМДЕРДІҢ КЕЗДЕЙСОҚ ҚАТЕЛІКТЕРІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ*
4. *ӨЛШЕМДЕР ДӘЛДІГІ КРИТЕРИІ*

ҚАТЕЛІК ТЕОРИЯСЫ ЕСЕПТЕРІ. Өлшемдер қателіктерінің классификациясы. Қателік теориясының негізгі постулаттары. Гаусс қисығы және оның қасиеттері. Кездейсоқ қателіктердің қасиеттері.

ӨЛШЕМДЕР ДӘЛДІГІ КРИТЕРИЛЕРІ. Орташа квадраттық қателік және оның қасиеттері. Ықтимал және орташа қателіктер мен оның қалыпты үлестіру заңы бойынша орташа квавдраттық қателіктермен байланысы. Шынайы қателіктер қатарын қалыпты үлестіру заңымен зерттеу.

ЖУЫҚТАУ ҚАТЕЛІКТЕРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. Жуықтау қателіктерін біркелкі үлестіру заңы туралы түсінік. Жуықтаудың орташа квадраттық қателіктері және оның жуықтаудың шектік қателігімен байланысы.

ФУНКЦИЯНЫҢ ОРТАША КВАДРАТТЫҚ ҚАТЕЛІГІ (коррелатталған және коррелаттанбаған аргументтер). Типтік мысалдар.

ТЕҢ ДӘЛДІКТІ ӨЛШЕМДЕР. Бір өлшемді тәуелсіз теңдәлдікті өлшемдер қатарын математикалық өңдеудің негізгі кезеңдері. Өлшенетін өлшемнің ең сенімді деген мәнін анықтау. Өлшеудің жеке алынған нәтижесінің орташа квадраттық қателігін анықтау. Ең сенімді деген мәннің орташа квадраттық қателігін анықтау. Параметрлердің белгісіз дәл мәндерін жабатын ықтималдықпен сенімді интервалдарды құрастыру: өлшеудің жеке нәтижесінен орташа квадраттық қателік пен шынайы мәннің ауытқуы. Қажетті барлық есептік бақылау арқылы белгілі бір схема бойынша орындалатын бір өлшемді теңдәлдікті өлшеулер қатарын өңдеу реті.

ТЕҢ ДӘЛДІТІ ЕМЕС ӨЛШЕМДЕР. Салмақ туралы түсінік. Коррелаттанған және кореллаттанбаған аргументтер функциясының кері салмағы. Бір өлшемді тәуелсіз теңдәлдікті емес өлшемдер қатарын математикалық өңдеудің негізгі кезеңдері. Орташа салмақтықты анықтау: өлшенетін өлшемнің ең сенімді деген мәнін. Бірлікке тең салмақтағы өлшемнің орташа квадраттық қателігін анықтау. Ең сенімді деген мәннің орташа квадраттық қателігін анықтау. Бірлікке тең салмақтағы өлшемнің орташа квадраттық қателігі мен шынайы мәні үшін сенімді интерал құрастыру. Есптік қажетті бақылау, өңдеу реті.

ҚОС ӨЛШЕМДЕР. ДВОЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. Біртекті өлшемдер қатары қос теңдәлдікті өлшемдерді математикалық өңдеу. Жүйелік қателіктерді табу критерилері. . Критерий обнаружения систематических ошибок. Біртекті өлшемдер қатары қос теңдәлдікті емес өлшемдерді математикалық өңдеу. Есептік қажетті бақылау, өңдеу реті.

ҚАТЕЛІКТЕР ТЕОРИЯСЫ ЕСЕПТЕРІ

Қателіктер теориясында ықтималдықтар теориясы негізінде математикалық статистика әдістерін қолдану арқылы келесі есептерді шешеді:

Өлшемдер қателіктерінің туу себептерін және олардың қасиеттері мен олардың ықтималдықтарын үлестіру заңдарын зерттеу;

Көп есе өлшенген өлшемдердің нәтижесінен ең сенімді деген өлшемнің мәнін анықтау;

Тікелей өлшем алынған нәтижелердің дәлдігін бағалау және өленген өлшемдердің функциясының болжамды дәлдігін алдын ала есептеу;

Шегін бекіту, яғни критерилерді, белгіленген шектегі дәлдікті өлшемнің нәтижесін қолдануды шектейтін.

- **ӨЛШЕМДЕР ҚАТЕЛІКТЕРІ КЛАССИФИКАЦИЯСЫ**
- Өлшемдер қателіктері дөрекі, жүйелік және ккездейсоқ болып жіктеледі.
- Дөрекі қателіктерге бақылаушыдан кеткен, аспаптың дұрыс істемеуінен, сыртқы ортаның кенеттен нашарлауынан және т.б. болған қателіктер жатады.оларды табу мақсатымен өлшеулер бірнеше қайтара жүргізіледі (екі реттен кем емес). Дөрекі қателіктері бар өлшеулер нәтижесін өңдеген кезіндеп тауып, жою қажет.
- Жүйелік қателіктерге функция көзі пайда болғандай өлшеулер нәтижесіне сол немесе басқа да заң бойынша пайда болған қателіктер жатады. Геодезиялық өлшемдер тәжірибесінде жүйелік қателіктердің әсерін азайту мақсатымен келесідей әдістер қолданылады:
- жүйелік қателіктердің пайда болуы туралы заң орнатады, содан кейін өлшеулер нәтижесіне түзетпелер енгізу арқылы қателіктерді азайтады;
- өлшем алу үшінс сәйкес әдісті қолданады, себебі жүйелік қателіктер біржақты әсер етпеу үшін, ал белгілерді өзгерту үшін;
- өлшеулер нәтижесін өңдеуде белгілі бір әдісмтемені қолданады. Кездейсоқ қателіктер кездейсоқ өлшемдер алу мысалы бола алады. Олардың заңдылығы тек массалық болғанда анықталады. өлшеу кезінде кездейсоқ қателіктен құтылу мүмкін емес және де бірлік өлшеуде жойыла алмайды. Олардың әсерін азайтуға болады, оған өлшеулер саны мен сапасын көбейту, өлшеулер нәтижесін тиісті математикалық өңдеу арқылы қол жеткізуге болады. Өлшеулердің кездейсоқ қателіктерінің туу себептері көп: сыртқы орта әсері, аспаптардың дәлдігінің дұрыс еместігімен юстировкасы, бақылаушымен операциялардың дұрыс орындалмауы және т.б. Кездейсоқ қателіктер бір біріненн тәуелсіз элементерлы көп қателіктердің қосындысы болып табылатыны сөзсіз. Ляпуновтың орталық шектік теоремасы негізінде өлшеулердің кездейсоқ қателіктері үлестірудің нормаль заңына сүйенетін көруге болады..
- Ары қарай шартты түрде кез келген өлшеулерде дөрекі қателіктер болмайды, жүйелік қателіктердің негізгі бөлігі нәтижеден жойылған, ал қалған қателіктер өте аз, яғни тек қана кездейсоқ қателіктерді қарастырамыз (, где x_i — өлшемдер нәтижесі, X — өлшенетін өлшемнің шынайы мәні) Осыдан

$M(\Delta) = 0$, а $M(x) = X$ $M(x) = X$.

ӨЛШЕМДЕРДІҢ КЕЗДЕЙСОҚ ҚАТЕЛІКТЕРІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

- Кездейсоқ қателіктер берілген ықтималдықпен абсолютті өлшем бойынша β белгілі шектен аспау қажет t^*m^1 тең;
- оң және теріс кездейсоқ қателіктер, абсолютті өлшемдер ббойынша тең, өлшемдер қатарында бірдей жиі кездеседі;
- кездейсоқ қателіктердің орташа арифметикалық мәні өлшеул бейткенде нольге теңеледі яғни:

$$\text{вер.}\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=M(\Delta)=0.$$

ӨЛШЕМДЕР ДӘЛДІГІ КРИТЕРИІ

Өлшемдер нәтижесі дәлдігінің негізгі критьерии болып – орташа квадраттық қателігі – орташа квадраттық ауытқуды бағалау табылады. Ол мына формуламен анықталады:

$$m = \sigma^*(x) = \sqrt{D^*(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)^2}{n}}. \quad (1.2)$$

$X = M(x)$ белгілі болғанда $\{\Delta_i\}$ шынайы қателіктер қатары үшін (1.2) формуласы (1.3) түрінде болып, Гаусс формуласы деп аталады:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \quad (1.3)$$

мұндағы $\Delta_i = x_i - X$; $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$.

ϑ^* орташа қателігі орташа квадраттық ауытқу деп аталады және мына формуламен есептелінеді:

$$\vartheta^* = \frac{[|\Delta|]}{n}.$$

Ықтималды қателік r^* деп болжамды ауытқу бағасын айтады. r^*-кездейсоқ қатенің мәні Δ, абсолютті өлшемде қателіктер теңмүмкіндікті, яғни

$$P(|\Delta| < r^*) = P(|\Delta| > r^*) = 0,5.$$

Кездейсоқ қателіктердің нормаль үлестіру заңы бойынша келесі қатынас болады:

$$m = 1,25\vartheta^*;\ m = 1,48r^* \qquad (1.5)$$

(1.5) қатынас нормаль закон критерий деп аталады (І бөлімше, п. 3.5 олар мына түрде болады $\sigma = 0,80\nu_1;\ \sigma = 0,67r$).

Шектік қателік $\Delta_{пред}$ деп өлшемдер қателіктері қатарында болмауы керек. Шектік ретінде мына ережемен анықталатын өлшем болады:

$$\Delta_{пред} = 2m \text{ и } \Delta_{пред} = 3m$$

(ықтималдықпен 0,954 мен 0,997 сәйкесінше).

Жоғарыда айтылған критерилер Δ_i, m, ϑ^*, r^*, $\Delta_{пред}$ ***абсолютты қателіктер*** деп аталады.

Салыстырмалы қателік деп өлшенетін өлшемнің мәнін сәйкес абсолютті қателікпен салыстыру .

Салыстырмалы қателікті сандық бөлшек түрінде көрсетеді және ол бірге тең, мысалы:

$\dfrac{m}{x} = \dfrac{1}{N_1}$ — салыстырмалы орташа квадраттық қателік;

$\dfrac{\Delta_{пред}}{x} = \dfrac{1}{N_2}$ — Х өлшемнің шекті салыстырмалы қателігі..

Абсолютті қателіктердің мәні екі-үш мәнді сандармен алады, ал салыстырмалы қателікті екі нолге дейін жуықтайды.

Мысалы, егер $x = 145,68$ м и $m_x = 5,8$ см.

$$\frac{m_x}{x} = \frac{5,8}{14568} \approx \frac{1}{2500}.$$

Шынайы қателіктер қатарын қалыпты үлестіру заңымен зерттеу.

Қателіктер теориясының бірінші есебін шешу үшін келесі әдістемені қолданамыз, математикалық статистика бөлімінде көрсетілген, сонымен қатар (1.1–1.5) формулалары бойынша есептейміз.

1.1.есеп 1.1. кестесінде 32 үшбұрыш байланыспауы берілген. Байланыспау $f = \sum \beta - 180^{\circ}$ шынайы қателік деп есептеуге болады Δ, үшбұрыш бұрыштарының қосындысы өлшенген өлшем деп қарастыруға болады, шынайы мәні 180° тең. Үлестірудің қалыпты заңы бойынша бірқатар невязка зерттеуін жүргізуге болады.

Таблица 1.1

№	невязки Δ_i	№	невязки Δ_i	№	невязки Δ_i	№	невязки Δ_i
1	−0,76″	9	+1,29″	17	+0,71″	25	+0,22″
2	+1,52″	10	+0,38″	18	+1,04″	26	+0,06″
3	−0,24″	11	−1,03″	19	−0,38″	27	+0,43″
4	+1,31″	12	0,00″	20	+1,16″	28	−1,28″
5	−1,27″	13	−1,23″	21	−0,19″	29	−0,41″
6	−1,88″	14	−1,38″	22	+2,28″	30	−2,50″
7	+0,01″	15	−0,25″	23	+0,07″	31	+1,92″
8	−0,69″	16	−0,73″	24	−0,95″	32	−0,62″

Ары қарай зерттеу үшін қажетті қосымшалар қатарын анықтайық::

$$[\Delta > 0] = +12,40;\ [\Delta < 0] = -15,79;\ [\Delta] = -3,39;\ [|\Delta|] = 28,19;$$

$$[\Delta^2] = 38,75;\ [\Delta^3] = (-34,41 + 30,03) = -4,38;\ [\Delta^4] = 120,70.$$

1. *Шешуі*

Қалыпты үлестіру параметрлерін бағалау есептеу M_Δ, σ_Δ, қисықтың тығыздығы және ол былай есептеледі: (1.6):

$$M_\Delta^* = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{-3,39}{32} = -0,106'',^{*)}$$

$$\sigma_\Delta^* = m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{38,75}{32}} = 1,10''.$$

2. ϑ^* орташа қателік пен $k_{1_{эмп}}$ коэффициентін есептеу:

$$\vartheta^* = 28,19/32 = 0,88'';$$

$$k_{1_{эмп}} = m/\vartheta^* = 1,10''/0,88'' = 1,25;\ k_{1_{теор}} = 1,25.$$

3. ықтимал қателік r^* пен коэффициентін анықтау.

Шынайы қателіктерді құатарға жіктейміз олардың абсолютті өлшемдері арқылы:

+0,00; +0,01; +0,06;+0,07; –0,19; +0,22; –0,24; –0,25; +0,38; –0,38; –0,41; +0,43; –0,62; –0,69; +0,71; –0,73; –0,76; –0,95; –1,03; +1,04; +1,16; –1,23; –1,27; –1,28; +1,29; +1,31; –1,38; +1,52; –1,88; +1,92; +2,28; –2,50.

Табамыз:

$$r^* = (|\Delta|_{16} + |\Delta|_{17})/2 = (0,73'' + 0,76'')/2 = 0,74'';$$

$$k_{2_{эмп}} = m/r^* = 1,10''/0,74'' = 1,49;\ k_{2_{теор}} = 1,48.$$

(1.2) кестесіндегі невязкаларды жіктейміз он екі интервалмен (интервал ұзындығын орташа квадраттық қателіктің жартысына тең деп аламыз).

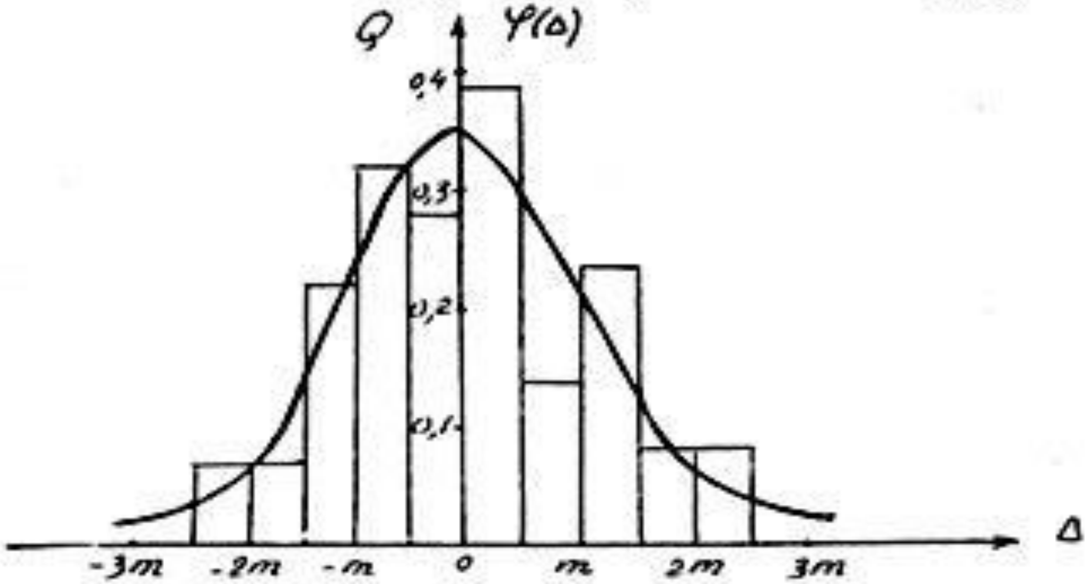
Таблица 1.2

№ п/п	длины интервалов в долях m		длины интервалов в секундах $\Delta_i = t_i m$		число ошибок m_i	частоты $Q_i = m_i / n$	высоты прямо-угольников $h_i = Q_i / (0,5m)$
1	$-3,0m$	$-2,5m$	$-3,30''$	$-2,75''$	0	0	0
2	$-2,5m$	$-2,0m$	$-2,75$	$-2,20$	1	0,031	0,056
3	$-2,0m$	$-1,5m$	$-2,20$	$-1,65$	1	0,031	0,056
4	$-1,5m$	$-1,0m$	$-1,65$	$-1,10$	4	0,125	0,227
5	$-1,0m$	$-0,5m$	$-1,10$	$-0,55$	6	0,188	0,342
6	$-0,5m$	0	$-0,55$	0	5	0,156	0,284
7	0	$+0,5m$	0	$+0,55$	7	0,219	0,398
8	$+0,5m$	$+1,0m$	$+0,55$	$+1,10$	2	0,062	0,113
9	$+1,0m$	$+1,5m$	$+1,10$	$+1,65$	4	0,125	0,227
10	$+1,5m$	$+2,0m$	$+1,65$	$+2,20$	1	0,031	0,056
11	$+2,0m$	$+2,5m$	$+2,20$	$+2,75$	1	0,031	0,056
12	$+2,5m$	$+3,0m$	$+2,75$	$+3,30$	0	0	0
Σ					32	1,000	—

m_i — қателіктер саны

4. гистограмманы құрастыру және оны жіктеу

1.2 таблица мәліметтерінен (2 мен 6 жолдары) гистограмма құрастырамыз (сур. 1.1) – эмпирикалық үлестіру графигі (бейненің масштабын таңдауға шартты болады).



Сур.1.1 — Гистограмма мен түзетілетін қисық $\varphi(\Delta)$

Гистограмма түрі қателіктердің қалыпты үлестіру заңын болжауға мүмкіндік береді. теориялық қисық гистограмманы түзететін келесі формуламен анықталады:

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\Delta^2}{2m^2}} = hy, \tag{1.6}$$

мұндағы $m = \sigma_{\Delta}^{*} = 1{,}10''$; $M^{*}(\Delta) \approx 0$; $t = \frac{\Delta}{m}$; $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$.

Ордината қисығы есептеуін келесідей орындаймыз А қосымшасының кестесін қолданамыз. Есептеудің нәтижелерін 1.3 кестесіне енгіземіз.

Таблица 1.3

№ п/п	левые границы интервалов Δ_i	$t_i = \dfrac{\Delta_i}{m}$	y_i	$h = \dfrac{1}{m\sqrt{2}}$	$\varphi(\Delta_i) = hy_i$
1	0	0	0,564	0,645	0,364
2	0,5m	0,5	0,498	—"—	0,321
3	1,0m	1,0	0,342	—"—	0,220
4	1,5m	1,5	0,183	—"—	0,118
5	2,0m	2,0	0,076	—"—	0,049
6	2,5m	2,5	0,025	—"—	0,016
7	3,0m	3,0	0,006	—"—	0,004

1.3 кестесі мәліметтерінен (2 мен 6 бағандары) графикте 1.1 сур. нүктелер қатарын енгіземіз $(\Delta_i; \varphi(\Delta_i))$, оларды жобалық қисықпен біріктіреміз. Қисықтың сол жақ шетін сол ординаталармен құрамыз.

Графиктен көретініміздей қисық графикті жазады

7 Пирсон. критерияіχ^2-

Теориялық қалыпты заңға статистикалық үлестірудің жақындауы дәрежесін бағалау үшін өлшемді анықтаймыз

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (1.7)$$

мұндағы

$$p_i = P(t_i < T < t_{i+1}) = 0,5\{\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)\}. \qquad (1.8)$$

Есептеулер нәтижесін 1.4 кестесіне енгіземіз

$\Phi(t_i)$ сол шекара интервалы үшін қосымша В кестесі бойынша табамыз:

Таблица 1.4

№	Интервалы t_i		$0,5\Phi(t_i)$	p_i	m_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	–3,0	–2,5	–0,5	0,0062	0	0,20	0,20
2	–2,5	–2,0	–0,4938	0,0166	1	0,53	0,42
3	–2,0	–1,5	–0,4772	0,0440	1	1,41	0,12
4	–1,5	–1,0	–0,4332	0,0918	4	2,94	0,38
5	–1,0	–0,5	–0,3414	0,1500	6	4,80	0,30
6	–0,5	0	–0,1914	0,1914	5	6,12	0,20
7	0	+0,5	0	0,1914	7	6,12	0,13
8	+0,5	+1,0	+0,1914	0,1500	2	4,80	1,63
9	+1,0	+1,5	+0,3414	0,0918	4	2,94	0,38
10	+1,5	+2,0	+0,4332	0,0440	1	1,41	0,12
11	+2,0	+2,5	+0,4772	0,0166	1	0,53	0,42
12	+2,5	+3,0	+0,4938	0,0062	0	0,20	0,20
13	+3,0	+∞	+0,5	—	—	—	—
Σ				1,0000	32	32,00	4,50

Еркін сандар дәрежеі келесі формуламен анықталады $r = k - s - 1$. Табамыз $r = 12 - 1 - 1 = 10$ (k — интервалдар саны, $s = 1$, тек бір ғана болғандықтан мысалы $\sigma(\Delta)$ таңдама бойынша бағаланды , а $M(\Delta)$ нольге тең деп алынды).

Е қосымшасы кестесі бойынша еркін сандар дәрежесі бойынша $r = 10$ үшін $\chi^2 = 4$ ықтималдықты табамыз $P = 0,947$, ал үшін $\chi^2 = 6$ табамыз $P = 0,815$. Интерполярлеп, үшін $\chi^2 = 4,5$ аламыз $P(\chi^2 = 4,5) = 0,914$.

Есептеулерден көретініміздей, қатынастар (1.9) келесіәденй орындалады.

Зерттеулер нәтижесінде шынайы қателіктің қатарын қарастырып кездейсоқ қателіктер қатары болып табылатынын көреміз. Олар қалыпты заңға жақын болады:

1)Кездейсоқ қателіктер қасиеттері орындалады;

а) $M^{*}(\Delta)$ орташа арифметикалық нольге тең;

б)Оң және теріс қателіктер, абсолютті өлшемі бойынша тең (гистограмма қара), бір біріне ұқсас берілген қатарда жиі кездеседі;

в) Абсолютті өлшемді қателіктер бойынша аз кездеседі көпке қарағанда;

г) Кездейсоқ қателіктер Δберілген ықтималдықпен β белгілі шектен аспайды $t \cdot m$ тең, қатардың бірде бір қателігі шекті қателіктің қатарынан аспайды, тең

$$\Delta_{\text{пред}} = 3m = 3{,}30'';$$

2) $k_{1_{\text{эмп.}}}$ мен $k_{2_{\text{эмп.}}}$ коэффициенттер олардың теориялық мәндерімен сәкес келеді ($k_1 = 1{,}25$; $k_2 = 1{,}48$);

3) $P(\chi^2) = 0{,}91$ ықтималдық жоғары, критикалық мәннен үлкен болғандықтан

4) Эксцесс өлшемі нольден біршама ажыратылады.