Распределение простых чисел

Выполнил: Мухин Д.Р.

Простое число — это натуральное число, большее единицы, имеющее ровно два натуральных делителя: 1 и само себя. Изучением свойств простых чисел занимается теория чисел.

Асимптотический закон распределения простых чисел

- Обозначим через $\pi(x)$ функцию, определяющую кол-во простых чисел на промежутке [2, x) натурального ряда.

  На протяжении 2-х веков (18-19) математики Гаусс, Лежандр, Чебышев и др. пытались найти формулу для вычисления этой функции. Результаты этих исследований показали, что распределение неравномерно и подчиняется весьма сложным закономерностям.

Асимптотический закон распределения простых чисел

С одной стороны, количество простых чисел бесконечно (теорема Евклида) и в натуральном ряду встречаются пары простых чисел, отличающихся на две единицы.

С другой стороны, в натуральном ряду существуют сколь угодно длинные промежутки, не содержащие простых чисел (теорема об интервалах).

Асимптотический закон распределения простых чисел

- Поскольку из-за сложного характера распределения простых чисел явного выражения для функции $\pi(x)$ найти не удалось, математики попытались получить ее асимптотическое приближение.

Определение: Две функции f(x) и φ(x) называются *асимптотически равными* при $x \to \infty$, если они бесконечно велики при $x \to \infty$ и предел их отношений равен 1, т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$. Пишут $f(x) \sim \varphi(x)$

Асимптотический закон распределения простых чисел

- Гаусс предположил, что

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Позднее, в 1808 году математик Лежандр опубликовал гипотезу, согласно которой

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - 1{,}8036}$$

Эти предположения доказаны не были.

Асимптотический закон распределения простых чисел

- Большой вклад в решение вопроса о распределении простых чисел внес русский математик Чебышев. В 1849 году он доказал, что

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Это утверждение получило название ***асимптотического закона распределения простых чисел.***

Асимптотический закон распределения простых чисел

- Оно равносильно утверждению $\pi(\mathbf{x}) \sim li(x)$, где функция

$$li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Называется ***интегральным логарифмом*** действительного числа x

Асимптотический закон распределения простых чисел

- Получить окончательное доказательство закона распределения простых чисел Чебышеву не удалось – он не доказал существование предела

$$\lim_{x}(\pi(x) \div \frac{x}{\ln x}) = 1$$

а только строго доказал двойное неравенство (неравенство Чебышева)

$$0,92129 < \pi(x) \div \frac{x}{\ln x} < 1,1055$$

и установил справедливость следующей теоремы

Асимптотический закон распределения простых чисел

Теорема: Для произвольного натурального числа $n>3$ между числами n и $2n-2$ содержится хотя бы одно простое число.

Только в конце 19 века (1896 году), используя результаты Чебышева и Римана, почти одновременно, французский математик Адамар и бельгийский математик Валле Пуссен доказали асимптотический закон распределения простых чисел

Простые числа в арифметических прогрессиях

Натуральный ряд числе является арифметической прогрессией с первым членом 1 и разностью 1. Поэтому естественно было использовать результаты, полученные при изучении распределения простых чисел в натуральном ряду и при решении вопроса о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях.

Простые числа в арифметических прогрессиях

Ограничимся рассмотрением прогрессий, в которых первый член a и разность d взаимно просты. В противном случае все члены прогрессии будут делиться на наибольший общий делитель a и d и в прогрессии не будет простых чисел.

Случай, когда $(a, d)=1$ рассмотрел немецкий математик Дирихле. В 1837 г. он доказал следующее обобщение Евклида:

Простые числа в арифметических прогрессиях

Теорема Дирихле: Если (a, d)=1, то прогрессия

$a, a + d, . . . , a + (n − 1)d, . . .$

содержит бесконечно много простых чисел.

Еще до этого теорема о бесконечности множества простых чисел в арифметических прогрессиях была доказана для некоторых частных случаев элементарными методами.

Простые числа в арифметических прогрессиях

- Докажем для примера следующую теорему: *Множество простых чисел вида* $\rho = 4n - 1$ *бесконечно.*

Доказательство. Из равенства

$$(4m+1)(4n+1) = 16mn + 4m + 4n + 1$$

видно, что произведение двух чисел, каждое из которых при делении на 4 дает в остатке 1, имеет тот же остаток 1 при делении на 4. Отсюда понятно, что ни одно число вида $4n - 1$ не может быть разложено

Простые числа в арифметических прогрессиях

- Предположим, что мн-во простых чисел вида $4n-1$ конечно и состоит из чисел p_1, p_2, … , p_k. Обозначим через N произведение $N = p_1 * p_2 *..* p_k$ и положим $M = 4N - 1$.

  Мы выяснили, что M не может раскладываться в произведение простых множителей вида $4m+1$, т.е. имеет хотя бы один простой делитель p вида $4n-1$.

Простые числа в арифметических прогрессиях

- Т.к. по предположению p_1 , p_2 , … , p_k - простые числа вида $4n-1$, то $M = 4N - 1$ должно делиться на одно из этих чисел, например на p_j. Это противоречит тому, что $4N = p_1 * p_2 *..* p_k$ делиться на p_j , а -1 не делиться на p_j . Полученное противоречие указывает на неверность нашего предположения о конечности множества простых чисел вида $4n-1$.

  Теорема доказана.

Простые числа в арифметических прогрессиях

- Если обозначить через $\pi_\alpha(d,x)$ количество простых чисел в прогрессии, не превосходящих х, то теорема Дирихле может быть сформулирована так: если $(d,a)=1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\pi_\alpha(d,x)=+\infty$. Асимптотический закон для $\pi_\alpha(d,x)$ имеет вид

$$\pi_\alpha(d,x)\sim\frac{x}{\varphi(d)\ln x}$$

где $\varphi(d)$ – функция Эйлера

Простые числа в арифметических прогрессиях

- В заключении можно отметить, что исследования относительно содержания простых чисел в последовательности натуральных чисел, которая получается, когда в квадратичной функции $ax^2 + bx + x$ x пробегает все натуральные значения, даже для частного случая функции $x^2 + 1$, до сих пор не имеют успеха.