# Лекция 5
## Импульс и энергия.
## (Energy & Momentum)

Лектор:
доцент НИЯУ МИФИ, к.ф.-м.н.,
Ольчак Андрей Станиславович(

# Импульс.

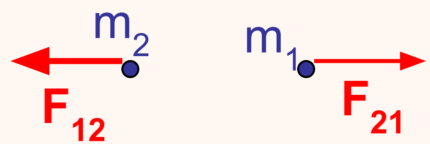
**Второй закон Ньютона:**

$$m d\mathbf{v}/dt = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v})$ – импульс тела (momentum)

$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$ приращение импульса (импульс силы)

Для пары взаимодействующих тел:

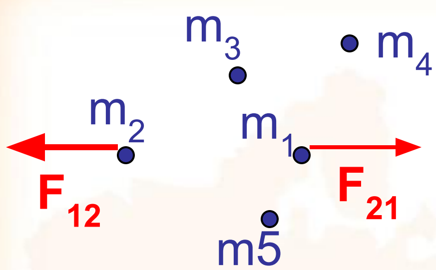



$$\Delta \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_{21}\Delta t$$
$$\Delta \mathbf{P}_2 = \mathbf{F}_{12}\Delta t = -\mathbf{F}_{21}\Delta t = -\Delta \mathbf{P}_1$$

Суммарный импульс пары взаимодействующих тел не меняется:

$$P_1 + dP_1 + P_2 + dP_2 = P_1 + F_{21}dt + P_2 + F_{12}dt = P_1 + P_2$$

## Закон сохранения импульса для замкнутой системы частиц




Замкнутая система = совокупность попарно взаимодействующих материальных точек. Суммарное изменение импульса а каждой паре равно нулю => суммарный импульс всей системы сохраняется:

Внутренние силы системы не меняют суммарный импульс системы. Он может измениться только под действием внешних сил.

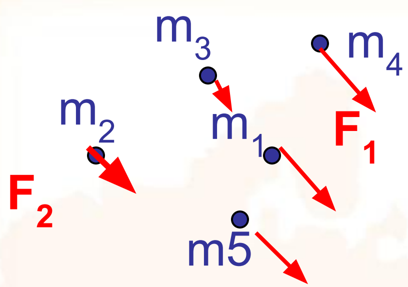
Закон сохранения импульса: если сумма внешних сил равна нулю (система замкнута) - суммарный импульс системы остается постоянным

$$\boldsymbol{P}_{сист} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \ldots = \Sigma \boldsymbol{P}_i = Const$$

ПРИМЕР: Неупругое столкновение двух тел

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}$$

# Движение системы частиц под действием внешних сил




Внутренние силы системы не меняют ***суммарный импульс*** системы $\boldsymbol{P}_{сист}$. Он может измениться только под действием ***внешних сил***.

$$\boldsymbol{P}_{сист} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots = M\boldsymbol{v}_c$$

$$M = \Sigma\, m_i\ ;\ \ \boldsymbol{v}_c = (\Sigma\, m_i\boldsymbol{v}_i)/M \text{ – скорость центра масс системы}$$

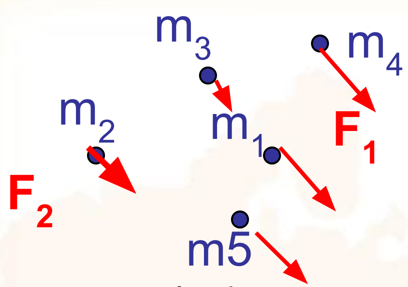
$$\boldsymbol{v}_c = (\Sigma\, m_i d\boldsymbol{r}_i/dt)/M = d(\Sigma\, m_i\boldsymbol{r}_i/M)/dt = d\boldsymbol{r}_C/dt$$

$$\boldsymbol{r}_c = \Sigma\, m_i\boldsymbol{r}_i//M \text{ – радиус-вектор центра масс системы}$$

$$d\boldsymbol{P}_{сист} = d\boldsymbol{P}_1 + d\boldsymbol{P}_2 + d\boldsymbol{P}_3 + \ldots = dt\Sigma\, \boldsymbol{F}_i = dt\, \boldsymbol{F}_{внеш} \Rightarrow$$

$$d\boldsymbol{P}_{сист}/dt = \Sigma\, \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{внеш} = Md\boldsymbol{v}_c/dt = Md^2\boldsymbol{r}_c/dt^2$$

Уравнение движения для системы многих частиц ***точно такое-ж***е как для одной материальной точки с массой *M* (масса системы), помещающейся в центре масс системы $\boldsymbol{r}_c$ . *Это позволяет изучать движение составного объекта как целого, не обращая внимания на его внутреннюю структуру и взаимодействие его частей*




Внутренние силы системы не меняют ***суммарный импульс*** системы $P_{сист}$. Он может измениться только под действием ***внешних сил***.

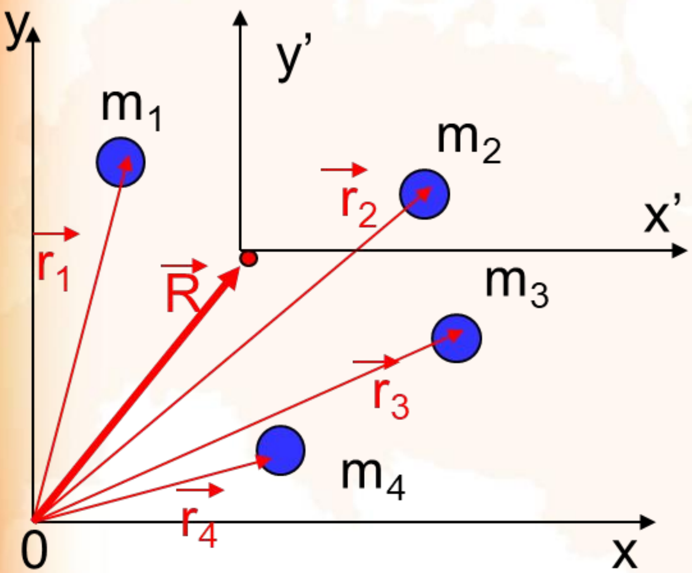
$$\mathbf{dP}_{сист} / dt = \Sigma\, \mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \mathbf{F}_{\mathbf{внеш}} = M d\mathbf{v}_c /dt = M d^2\mathbf{r}_c /dt^2$$

Уравнение движения для системы многих частиц ***точно такое-же*** как для одной материальной точки с массой $M$ (масса системы), помещающейся в центре масс системы $\mathbf{r}_c$.

***Движение составного объекта допустимо рассматривать, не вникая в его внутреннюю структуру и не учитывая взаимодействие его частей! Ура!***

# Система центра масс

Система отсчета, связанная с центром масс системы материальных точек (СЦМ), имеет в механике особое значение.




Уравнение движения центра масс в лабораторной системе отсчета (ЛСО):

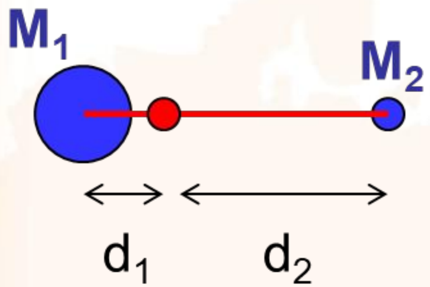
$$m\vec{w}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(внеш)}$$

В СЦМ:

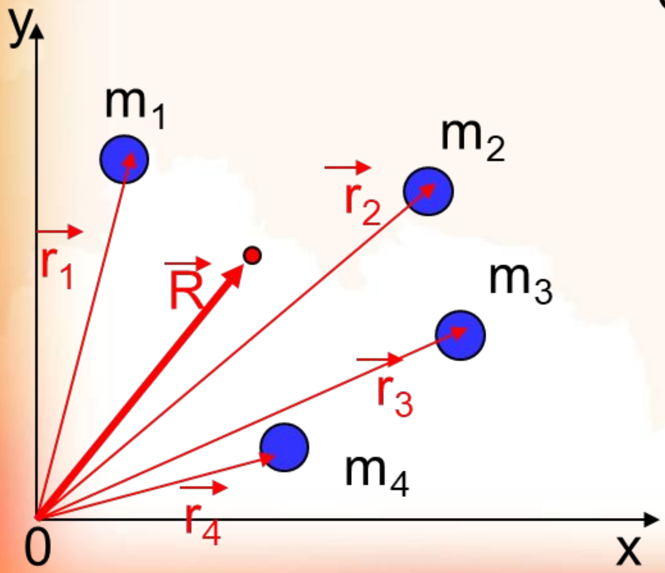
$\boldsymbol{r}_c = \Sigma\, m_i \boldsymbol{r_i} / M = 0 \;;\; \boldsymbol{P}_{сист} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{v_i} = 0$

# Система центра масс

Как определить положение центра масс системы материальных точек? Рассмотрим несколько примеров.




Две материальные точки (2 однородные сферы, или 2 шара): $M_1 d_1 = M_2 d_2$.




Система материальных точек:

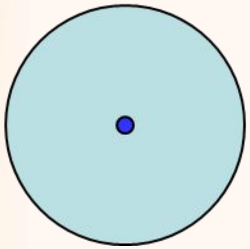
$$\boldsymbol{R} = \Sigma\, m_i \boldsymbol{r}_i \,/\, \Sigma\, m_i$$

ВАЖНО: Центр масс может НЕ совпадать ни с одним из тел системы

## Центр масс симметричных однородных тел.

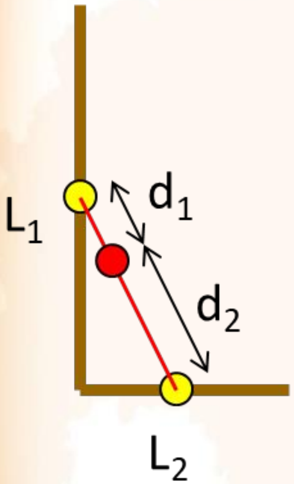
Для однородных симметричных тел - это их геометрический центр симметрии.

Для однородного стержня - середина стержня.



Для однородного диска или сферы - центр диска или сферы

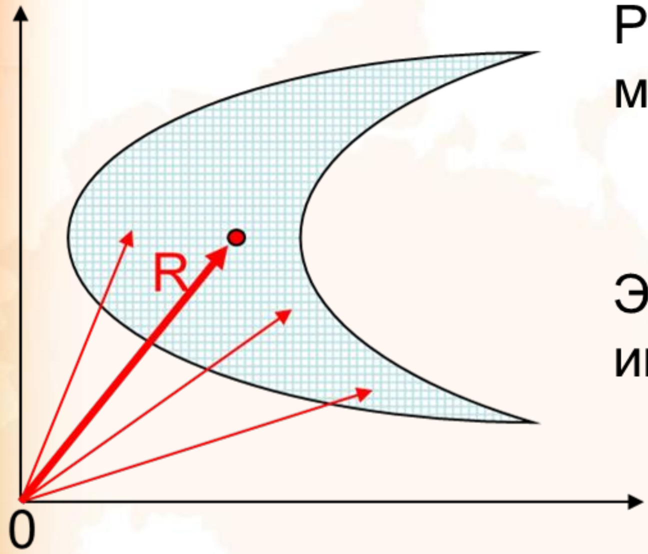
**Центр масс сложного твердого тела.**




***ПРИМЕР***: Однородный изогнутый стержень - “кочерга”.
Центры масс каждой части “кочерги” - в середине. Их массы пропорциональны их длинам.
Центр масс всей “кочерги” находим, по правилу для двух материальных точек:

$$L_1 d_1 = L_2 d_2$$

# Центр масс твердого тела




Разбить (мысленно) тело на множество материальных точек:

$$\boldsymbol{R} = \Sigma\, \Delta m_i\, \boldsymbol{r_i} \,/\, M$$

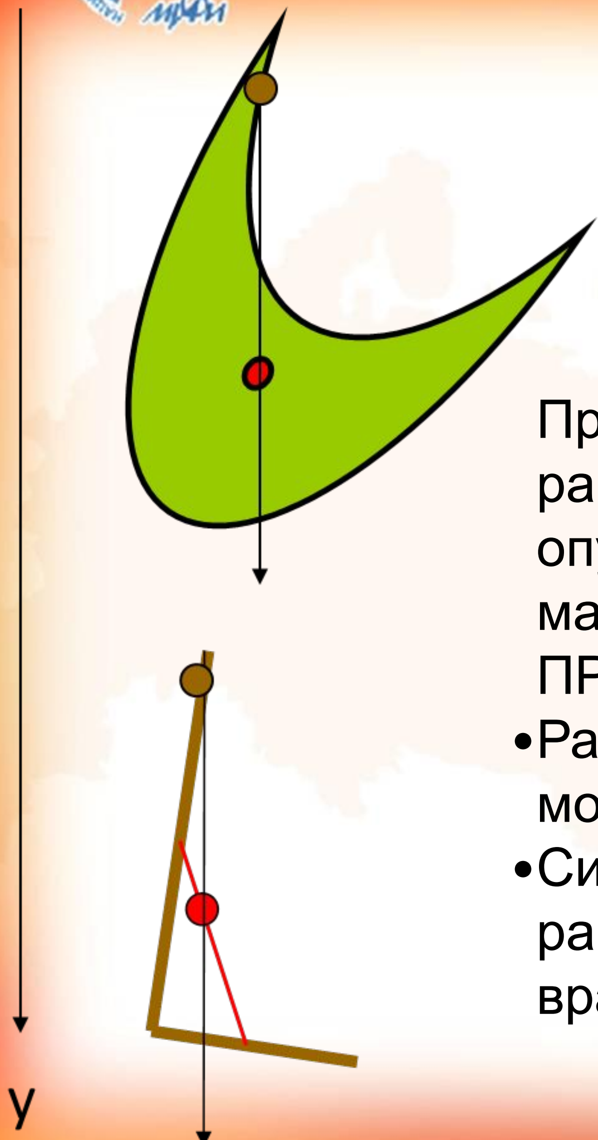
Это трудная задача, требующая применения интегрального исчисления.

$$\boldsymbol{R} = \int \rho \boldsymbol{r} d^3 r \Big/ \int \rho d^3 r$$

$\rho$ - плотность тела, которая может быть разной в разных точках.

# Центр масс твердого тела

## Центр масс подвешенного тела




При подвесе тела за произвольную точку: равновесное положение тела тогда, когда вертикаль, опущенная из точки подвеса, проходит через центр масс тела

ПРИЧИНА:

- Рассматривая действие внешних сил на тело, его можно считать точкой, находящейся в центре масс.
- Силы (тяжести и реакции опоры) в состоянии равновесия компенсируют друг друга, не создавая вращающего момента

- **Работа и мощность**
- **Консервативные и неконсервативные силы**
- **Закон сохранения энергии**

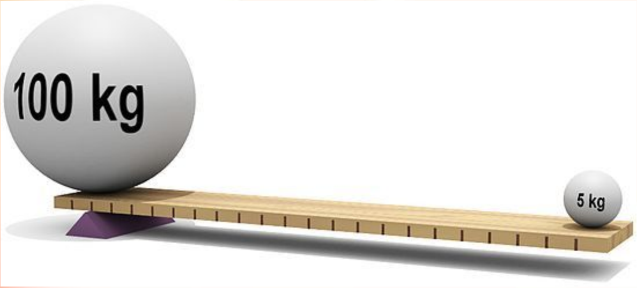
***Прикладная механика Архимеда:***
***Выигрыш в силе = проигрышу в движении.***

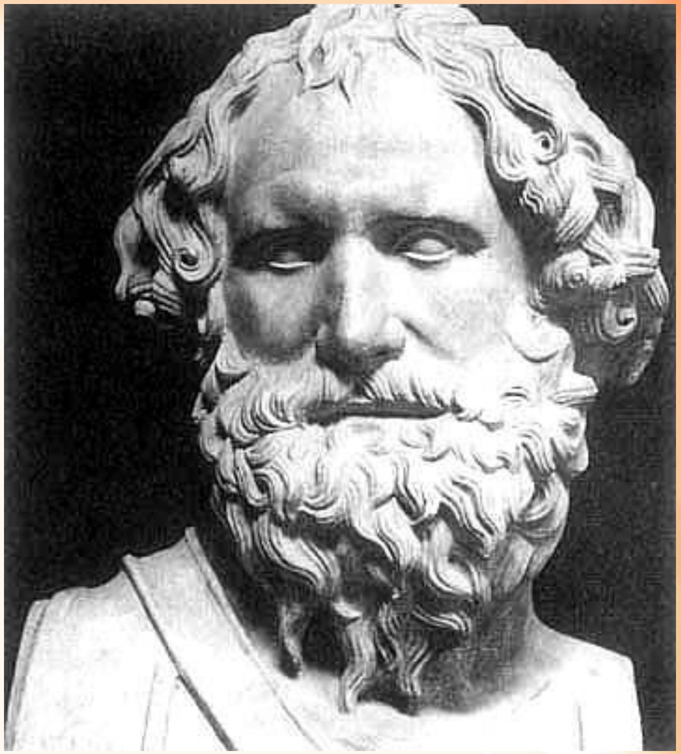
Закон рычага и других простых (и не очень)

механизмов: $F_1/F_2 = L_2/L_1$

→ или $F_1/L_1 = F_2L_2$

***Произведение силы на величину совершенного движения – мера совершаемой работы***



***Архимед*** Ἀρχιμήδης
287 -212 до н.э.,
Сиракузы, Сицилия

# Дадим определения: Работа. Мощность.

- Элементарная работа силы.

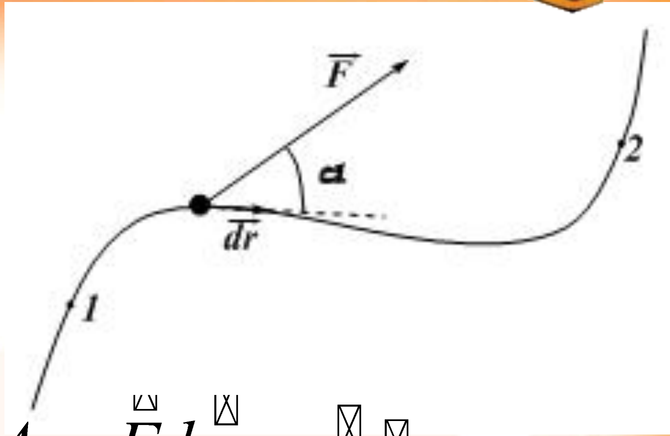
$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

- Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$
- Мгновенная мощность силы

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

- Определение работы по известной зависимости мощности от времени $A = \int_{t_1}^{t_2} P dt$
- Средняя мощность силы

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P dt}{t_2 - t_1}$$



# Кинетическая энергия.

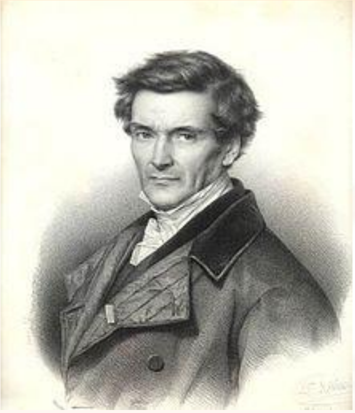
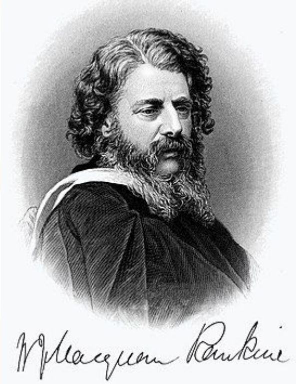
Элементарную работу суммарной силы, действующей на материальную точку, можно представить в виде:

$$\delta A_{\Sigma} = \vec{F}_{\Sigma} d\vec{r} = m\vec{w} d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v} d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Величину $T = mV^2/2$ называют кинетической энергией материальной точки. Элементарная работа суммарной силы, действующей на материальную точку, идет на приращение ее кинетической энергии. И наоборот: за счет потери кинетической энергии тело может совершить механическую работу $A_{\Sigma} = \Delta T$

***Энергия = мера способности тела произвести работу..***

# **Энергия.** *Историческое отступление*

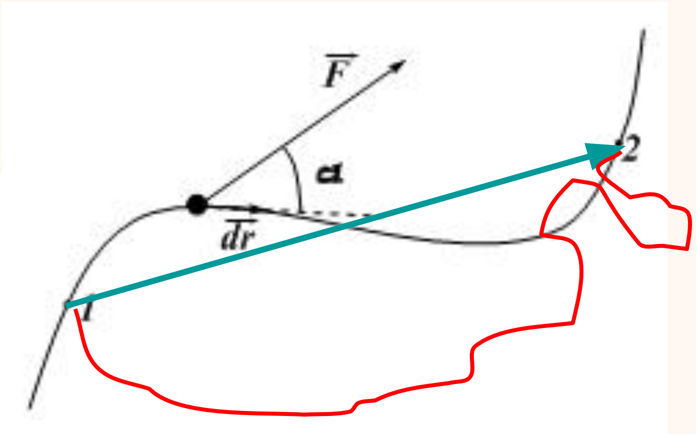

***Thomas Young   G.-G. de Coriolis   W.J.Renkin   H. Helmholz***

***1773-1858   1792-1843   1820-72   1821-94***

Понятие ***энергия*** появилось в физике далеко не сразу. Ньютон описывал движение только его количеством (импульсом). Лейбниц $mv^2$ (без 1/2) называл *vis viva (буквально - жизненная сила),* но точного физического смысла этой величины не сформулировал. Термин «кинетическая энергия» в применении к этой величине предложил Т. Юнг в 1809 году, и только в 1829 году Гаспар де Кориолис установил связь механической работы $A$ и кинетической энергии $mv^2/2$. Понятие ***потенциальной*** энергии появилось в механике еще позже – (~1853) года в работах В. Ренкина и Г. Гельмгольца

# Консервативные и неконсервативные силы.

- Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положений частицы.
- Работа неконсервативных сил зависит от формы траектории.

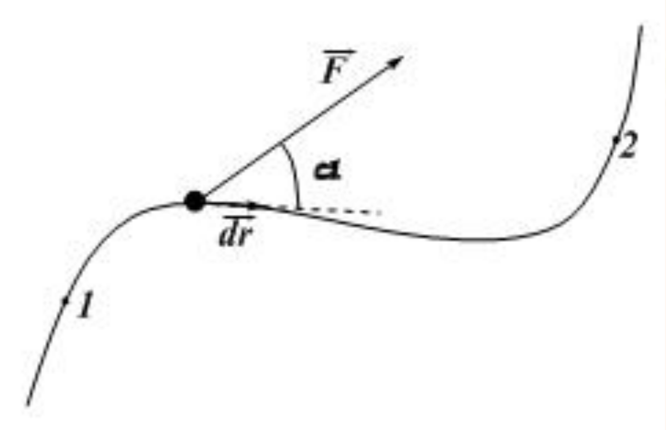



Работа консервативных сил на замкнутой траектории равна нулю

## Консервативные и неконсервативные силы.

Работа консервативных сил не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положений частицы.

СЛЕДСТВИЕ: для консервативных сил можно ввести понятие потенциальной энергии, зависящей исключительно от координат точки в поле консервативной силы.



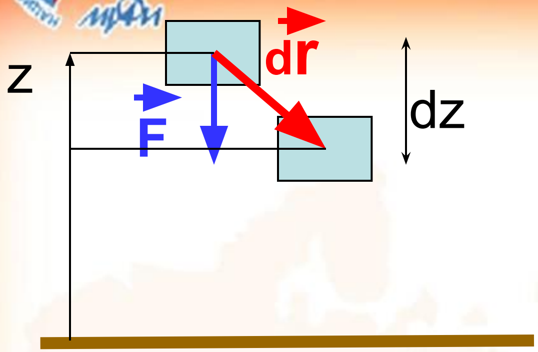

Работа консервативной силы равна разности потенциальных энергий объекта в начальной и конечной точках траектории: $A_{12} = U_1 - U_2$

*В частности, для 2-х близких точек:*

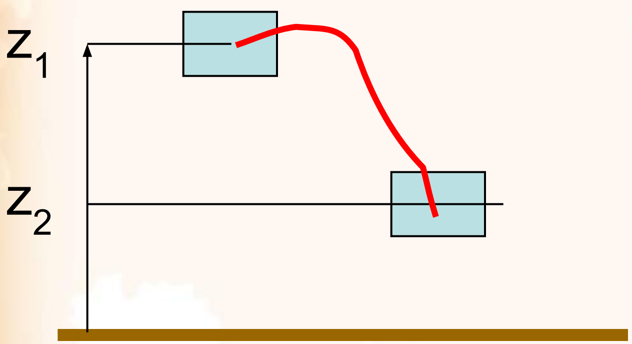
$$dA_{12} = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}+\mathbf{dr}) = -(\mathbf{dr}, dU/d\mathbf{r}) =$$
$$= -dx(\partial U/\partial x) - dy(\partial U/\partial y) - dz(\partial U/\partial z)$$

Физический смысл имеет именно разность значений потенциальной энергии между разными точками. Абсолютное значение потенциальной энергии можно отсчитывать от любого уровня, какой удобен

# Работа силы тяжести




- Однородная сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ на малом участке траектории $d\vec{r}$ совершает элементарную работу
  $dA = m(\vec{g}, d\vec{r}) = -mg\,dz$

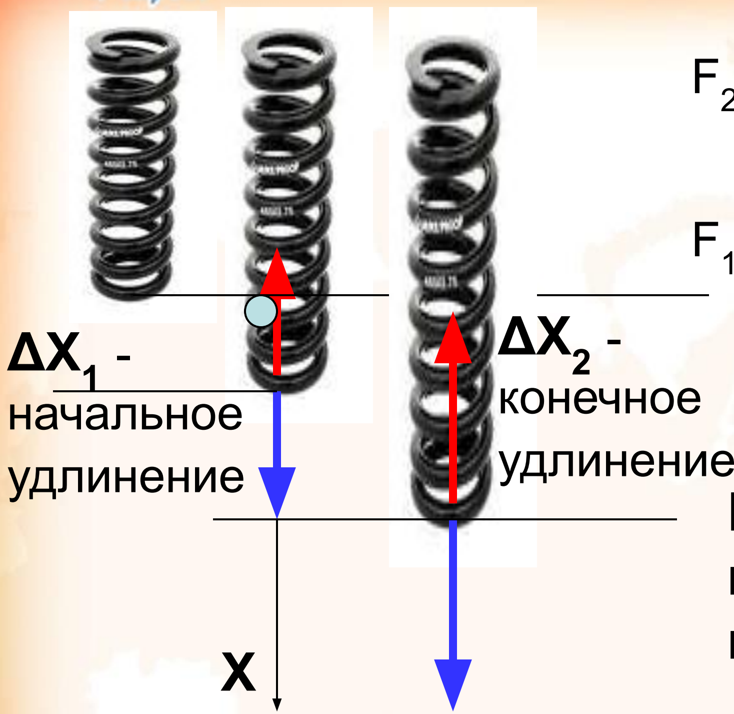


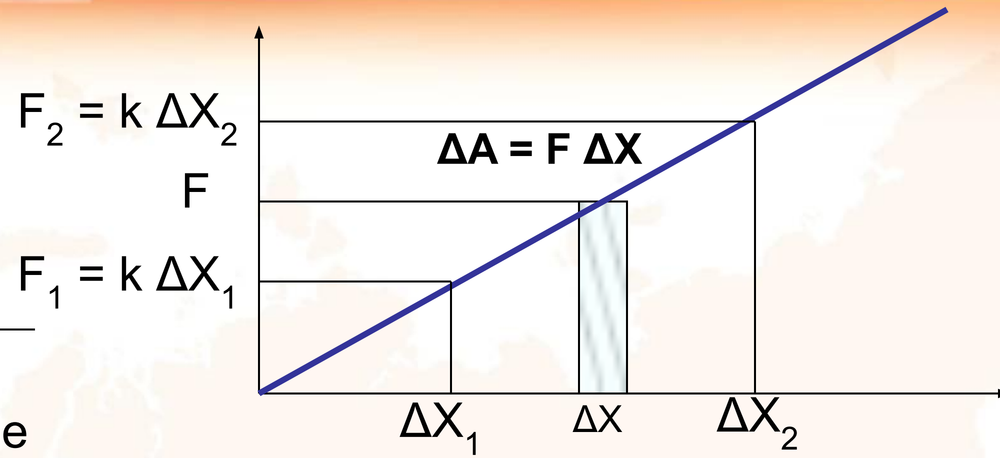

- На конечном участке траектории между точками 1 и 2 работа равна:

$$A = \int_1^2 (-mg)\,dz = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2)$$

- Работа зависит только от начальной и конечной точек траектории. Сила тяжести - консервативная сила
- Потенциальная энергия силы тяжести: $U = mgz$. Отсчитывать вертикальную координату $z$ можно от любого уровня, какой удобен в той или иной задаче.

# Работа упругой силы.




Работа численно равна площади под графиком F(x). При увеличении деформации пружины она отрицательна:

$$A_{12} = \int (-k\Delta x)d\Delta x = k(\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2)/2$$

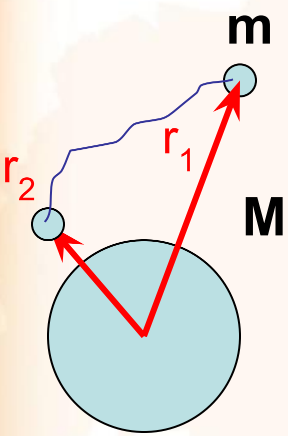
Потенциальную энергию упругой деформации удобно и естественно отсчитывать от недеформированного состояния ($\Delta x=0$):

$$U = k\Delta x^2/2$$

# Работа гравитационной силы.

Центральная сила - это сила, направленная от центра поля, модуль которой зависит только от расстояния до центра.

ПРИМЕРЫ: сила Кулона, сила гравитации (на больших расстояниях)




Работа гравитационной силы при сближении тел с массами M и m от расстояния $r_1$ до расстояния $r_2$ равна

$$A_{12} = \int (-GMm/r^2)dr = GMm(1/r_2 - 1/r_1) = U_1 - U_2$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия и определяется величинами масс взаимодействующих тел и расстоянием между ними:

$$U_{гр} = - GMm/r$$

Потенциальную энергию гравитационного взаимодействия естественно считать равной нулю при бесконечном взаимоудалении тел, При сближении она уменьшается и становится отрицательной.

## Связь между потенциальной энергией и силой.

- Элементарная работа консервативной силы

$$\delta A_{\text{êî í ñ}} = -dU$$

- Из определения работы следует

$$\delta A_{\text{êî í ñ}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

- Полный дифференциал потенциальной энергии

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

- Для проекций консервативной силы на оси декартовой системы координат верны соотношения

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{'}F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

## Связь между потенциальной энергией и силой.

- Т.е. вектор консервативной силы равен градиенту потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком.

$$\vec{F} = -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \right\} = -\nabla U \quad = \ - dU/d\mathbf{r}$$

- Консервативная сила, действующая на частицу всегда перпендикулярна к эквипотенциальным поверхностям и направлена в сторону убывания потенциальной энергии.

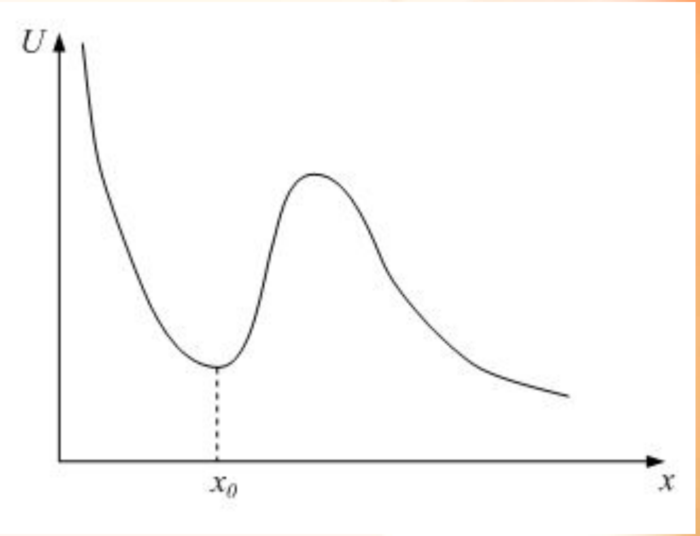
# Условия равновесия системы с одной степенью свободы.

- Для системы с одной степенью свободы $U = U(x)$ и $\mathbf{F}_x = -(dU/dx)\mathbf{e}_x$
- Положения равновесия отвечают экстремумам функции $U(x)$, где $F_x = 0$
- Возле экстремума (точка $x_0$) функция

$U(x)=U(x_0)+(x-x_0)dU/dx+((x-x_0)^2/2)d^2U/dx^2+.$

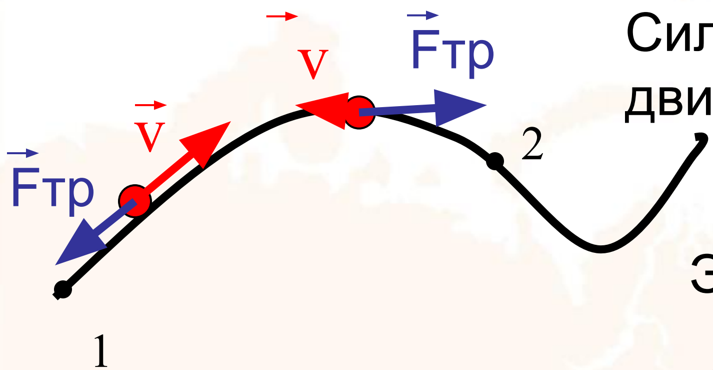
$= U(x_0) + ((x - x_0)^2/2)d^2U/dx^2 + ....$

$F_x = - dU/dx = \sim - (x-x_0)d^2U/dx^2$




- Если $x_0$ - максимум ($d^2U/dx^2 < 0$) => сила направлена ***от*** положения равновесия, равновесие неустойчивое
- Если $x_0$ - минимум ($d^2U/dx^2 > 0$) => сила направлена ***к*** положению равновесия, равновесие устойчивое

Работа неконсервативных сил зависит от формы траектории.




Сила трения направлена против скорости движения материальной точки.

Элементарная работа силы трения равна.

$$dA = (\mathbf{F}, \mathbf{dr}) = -Fds,$$

где $ds$ - элемент пройденного пути.

Работа силы трения на пути между точками 1 и 2 равна.

$$A_{12} = \int Fds,$$

На обратном пути пути между точками 2 и 1 работа снова равна.

$$A21 = \int Fds,$$

Работа силы трения всегда отрицательна.

## Потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле.

Работа консервативной силы не зависит от формы траектории

$$A_{12cons} = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F d\vec r = U(\vec r_1) - U(\vec r_2),$$

$U(\vec r)$ - потенциальная энергия точки в поле консервативной силы.

Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии

$$A_{12cons} = -\Delta U$$

$$\delta A_{cons} = -dU$$

….. и может пойти на приращение кинетической энергии точки

$$dA_{12cons} = dT$$

=> Сумма потенциальной и кинетической энергии точки, движущейся в консервативном поле сил, остается неизменной

$$U + T = Const$$

# Полная механическая энергия частицы.

Сумма кинетической и потенциальной энергий частицы есть полная механическая энергия

$$E = T + U$$

Приращение полной механической энергии равно работе сторонних (неконсервативных) сил

$$dE = dT + dU = \delta A_{\Sigma} - \delta A_{cons} = \delta A_{ext}$$

Если сторонние НЕ консервативные силы на частицу не действуют - ее полная механическая энергия сохраняется!

(Закон сохранения энергии)

1. Изолированная частица

$$T = const$$

2. Частица движется в потенциальном, стационарном поле консервативных сил

$$T + U = const$$

3. Тело движется в потенциальном, стационарном поле сил и на нее действует сила трения – уравнение баланса энергии

$$\Delta\left(T + U\right) = A_{12}^{(\text{тр})}$$

4. Замкнутая система взаимодействующих материальных точек, в которой нет НЕ консервативных сил.

$$T + U_{вз} = const$$

# Уравнение баланса энергии.

Отрицательная работа силы трения означает, что тело вынуждено совершать над силой трения положительную работу за счет своей энергий, которая, соответственно, уменьшается. При наличии неконсервативных сил, действующих на тело, вместо закона сохранения энергии следует использовать уравнение баланса энергий:

$$E_1\ (=U_1+T_1\ ) = E_2\ (=U_2+T_2) + A'$$

где $A'$ - работа, совершенная телом *против* неконсервативных сил (трения).

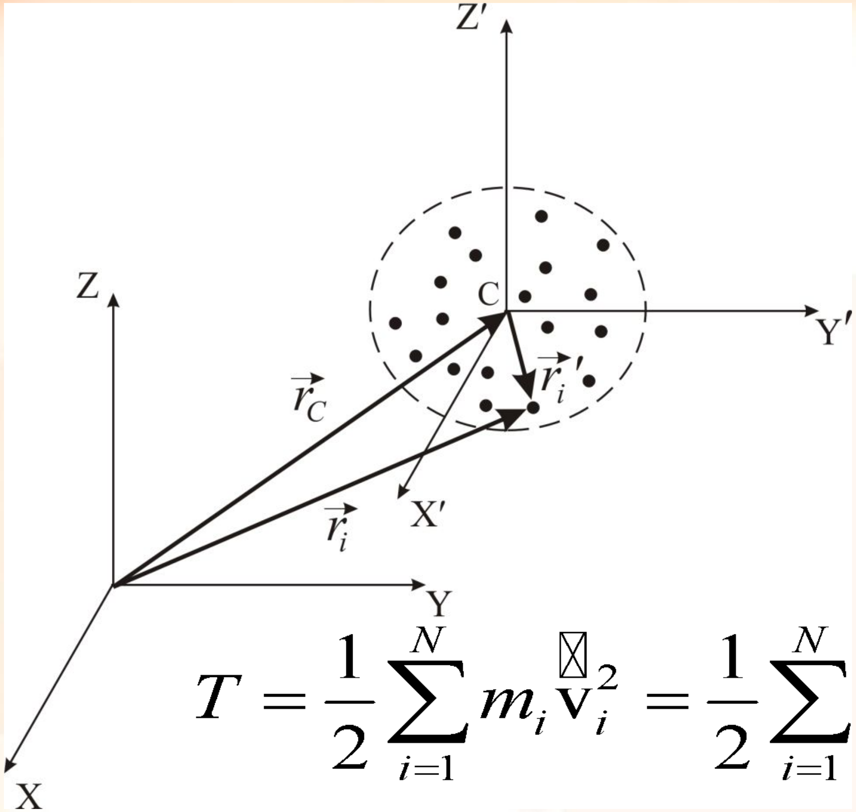
Закон сохранения энергии (или уравнение баланса энергии) можно применять не только к отдельным телам, но и к системам взаимодействующих тел. Полная механическая энергия (потенциальная плюс кинетическая) нескольких тел, объединяемых в систему, тоже будет сохраняться за вычетом тех Джоулей, что все тела системы потратят на работу против неконсервативных сил

# Уравнение баланса энергии. ПРИМЕР

**Вторая космическая скорость**.

- Первая космическая скорость $v_1 = (GM_з/R_з)^{1/2}$ позволяет космическому кораблю (спутнику) оставаться на круговой орбите вблизи поверхности Земли, не падая на Землю, но и не удаляясь далеко от планеты.
- Полная энергия спутника на ближней околоземной орбите равна сумме кинетической и потенциальной: $E = mv_1^2/2 - GM_зm/R_з = -GM_зm/2R_з < 0$
- На большом (бесконечном) отдалении от Земли потенциальная энергия равна нулю, да еще должна быть какая-то пусть и маленькая кинетическая. Следовательно, полная энергия даже вблизи поверхности Земли должна быть положительной – тогда он сможет «обменять» кинетическую энергию на потенциальную и остаться в» в плюсе» даже вдали от планеты.
- Условие осуществления этого: $E = mv^2/2 - GM_зm/R_з > 0$. Минимальная скорость позволяющая уйти за пределы поля земного притяжения называется второй космической: $v_2 = (2GM_з/R_з)^{1/2} = \sim 11{,}6$ км/с

# Связь кинетической энергии системы частиц в ц–системе и в л–системе.




$$\vec r_i = \vec r_C + \vec r_i'$$

$$\Downarrow$$

$$\vec v_i = \vec v_C + \vec v_i'$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec v_C + \vec v_i'\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i'^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec v_C^{\,2} + \frac{1}{2}2\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i'\right)\vec v_C$$

# Связь кинетической энергии системы частиц в ц–системе и в л–системе.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_C + \vec{v}_i'\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{v}_C^{\,2} + \frac{1}{2}2\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'\right)\vec{v}_C$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'^{\,2} = T'$$ - кинетическая энергия в *ц* - системе

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = m$$ - полная масса системы

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = \vec{P}' = 0$$ - полный импульс в *ц* - системе, равный нулю

$$\boxed{T = T' + \frac{1}{2} m \vec{v}_C^{\,2}}$$ **- теорема Кенига**

**Спасибо за внимание!**

Продолжение следует!