

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

---

---

## Основная литература

1. *Молчанов, В. А.* Логика высказываний. – Саратов, 2014.
  2. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. Математическая логика. – М., 2011.
  3. *Игошин, В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. – М., 2010.
  4. *Игошин, В. И.* Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов. – М., 2008.
-

---

# Предмет математической логики

---

---

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики — древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

---

# ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНАЯ)

изучает формы, в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

# Научные законы

Утверждения	Физика	География	Физиология
$P_1$	Каждый металл — проводник	В каждом южном городе летом тепло	Все люди смертны
$P_2$	Ртуть — металл	Сочи — южный город.	Сократ — человек
Заключение	Ртуть — проводник	В Сочи летом тепло	Сократ смертен

**Общая форма всех этих законов  
- закон формальной логики**

$P_1$ . Каждый предмет, обладающий свойством  $R$ , обладает свойством  $Q$ .

$P_2$ : Предмет  $a$  обладает свойством  $R$ .

Заключение: Предмет  $a$  обладает свойством  $Q$ .

# Закон формальной логики в символьном виде

$$P_1: (\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)).$$

$$P_2: R(a)$$

$$Q(a).$$



Одна из основных задач логики - систематическая формализация и каталогизация правильных способов рассуждений.

В общем случае рассуждение - это последовательность умозаключений.

Умозаключение - способ получения новых суждений  $\Phi$  из ранее известных суждений  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ . Схематически это изображается диаграммой:

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n}{\Phi},$$
 где  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  – посылки и  $\Phi$  – заключение умозаключения.

---

**Математическая логика** занимается задачами формализации правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата**.

Главная цель – изучение математических рассуждений с целью точного определения понятия «математическое доказательство».

Первый исследователь этого направления – немецкий математик Г.Лейбниц (1646—1716).

---

## Этапы развития математической логики:

Английский математик Дж.Буль (1815—1864) создал алгебру логики.

Немецкий математик Г.Фреге (1848—1925) разработал логико-математические языки и теорию их осмысления (так называемую семантику).

Итальянский математик Дж.Пeano (1858—1932) изложил арифметику на языке математической логики.

---

В XIX веке математическая логика стала основой всех наук:

- открытие неевклидовой геометрии,
  - поиски обоснования математического анализа,
  - открытие парадоксов, т.е. рассуждений, приводящих к противоречиям.
-

---

Анализ парадоксов привел к созданию программы Д.Гильберта (1862—1943) обоснования математики на основе аксиоматического подхода.

Систематический подход к математике на основе математической логики впервые изложили английские математики Б.Рассел (1872—1970) и А.Уайтхед (1861—1947) в работе «Основания математики» (1910—1913).

К.Гедель (1906-1978) показал ограниченность аксиоматического подхода к обоснованию математики.

---

---

Бурное развитие математической логики и теории алгоритмов в наше время обусловлено:

- распространением информационно-коммуникационных технологий,
  - необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования разнообразных задач и процессов.
-

# Логика в информатике

В предыдущем примере:

➤ *исходные знания (база знаний):*

$P_1$ : Каждый металл — проводник.

$P_2$ : Ртуть — металл.

➤ *новые знания:*

Ртуть — проводник.

**Новые знания –  
результат применения закона  
формальной логики:**

$$P_1: (\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$P_2: R(a)$$

$$Q(a)$$



**Использована интерпретация  
формул закона логики:**

$R(x)$  — «предмет  $x$  — металл»;

$Q(x)$  — «предмет  $x$  — проводник»;

$a$  — «ртуть».

## Другая интерпретация формул закона логики:

$R(x)$  — «предмет  $x$  — южный город»;

$Q(x)$  — «предмет  $x$  — теплый летом»;

$a$  — «Сочи».

---

Знания — это представление информации в виде формальных высказываний.

Законы формальной логики преобразуют одни высказывания в другие, т.е. преобразуют информацию из одной формы представления в другую.

**Законы формальной логики — это  
инструмент преобразования  
информации!**

---

# Основная задача формальной логики.

База знаний:  $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ .

Предложение:  $\psi$ .

**Задача** (формальная): проверить, что  $\psi$  выводится из  $\Gamma$  по законам формальной логики.

**Задача** (неформальная): выяснить, является ли предложение  $\psi$  следствием утверждений базы знаний  $\Gamma$ .

Приложение 1.

## Базы знаний

(экспертные системы, Big Data и др.)

База знаний  $\Gamma$  — база знаний системы.

Предложение  $\psi$  — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро системы анализа данных.

Приложение 2.

## Семантический Web

База знаний  $\Gamma$  — ресурсы Интернет.

Предложение  $\psi$  — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро системы анализа ресурсов.

## **Автоматизация научных исследований (логическое программирование)**

База знаний  $\Gamma$  — система аксиом.

Предложение  $\psi$  — утверждение.

Аппарат логического вывода — ядро автоматической системы доказательства теорем.

## Для реализации приложений необходимо:

- Создать формальный язык для представления знаний.
- Выделить необходимую систему законов формальной логики.
- Проверить корректность логических законов.
- Проверить полноту построенной системы логических законов.
- Разработать алгоритм проверки выводимости одних предложений из других по заданным логическим законам.



---

# Логика высказываний

---

---

*Высказывание* - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания  $A, B, C, \dots$

*Истинностное значение* высказывания  $A$  обозначается символом  $\lambda(A)$  и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$ , если высказывание  $A$  истинно, и

$\lambda(A)=0$ , если  $A$  ложно.

---

---

# Алгебра высказываний

---

Из высказываний путем соединения их различными способами (с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно») можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний  $P$  с логическими операциями  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .