

ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ПРИМА

Лекция 1

МИНИМАЛЬНАЯ БАЗА РЕБЕР

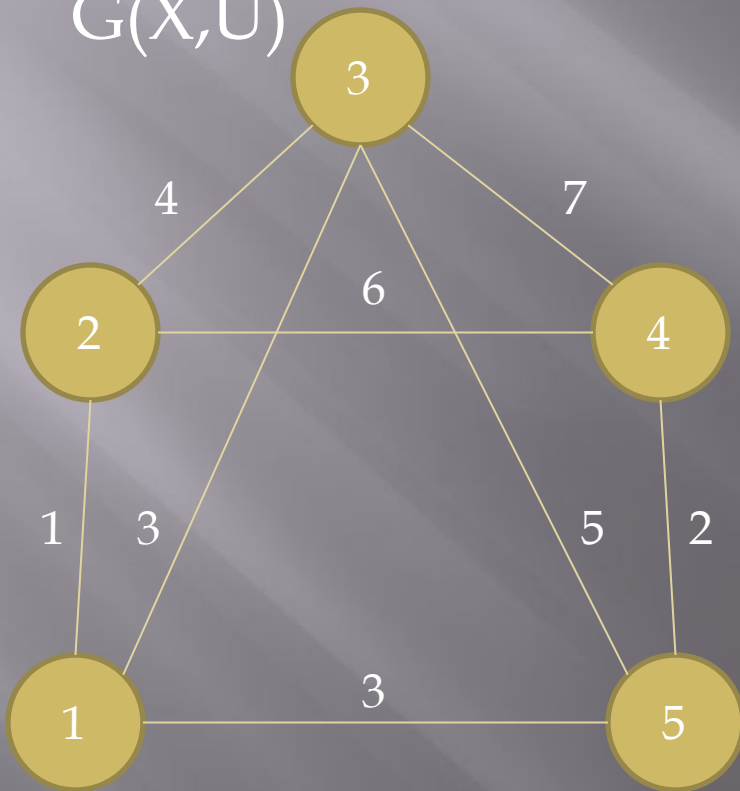
- Содержательная постановка задачи: на связном взвешенном неориентированном графе $G(X,U)$ выделить подмножество ребер $U' \subseteq U$

таких, что:

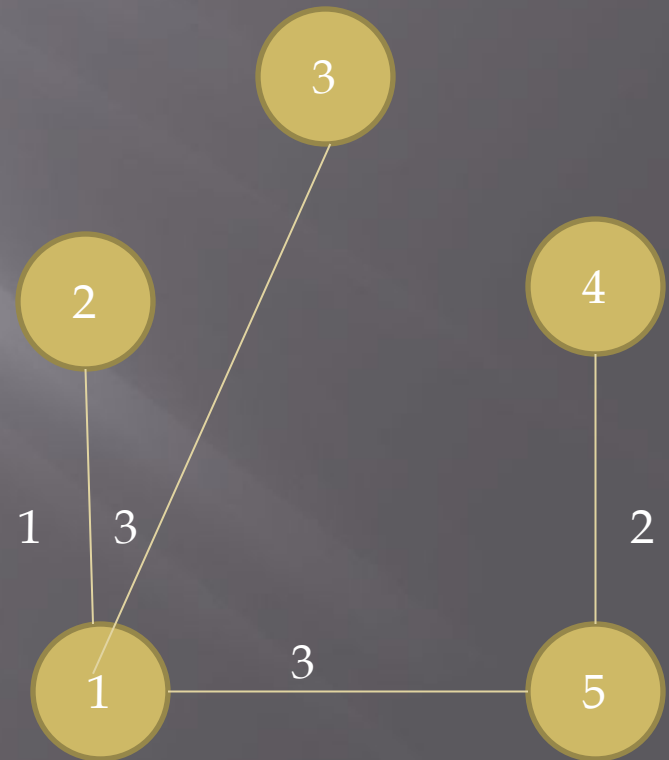
- 1. Граф $G(X,U')$ является связным.
- 2. Суммарный вес ребер подмножества U' является минимальным.
- Определение: связным называется граф, между любой парой вершин которого существует маршрут.

ПРИМЕР 1

- Исходный граф $G(X, U)$

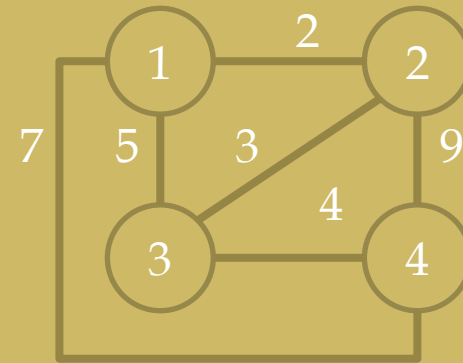


- Граф $G(X, U')$



Формальная постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \sum_j r(i, j) z(i, j) \rightarrow \min; \\ \forall p, \forall q \neq p: \sum_d \prod_{(i, j) \in L^d(p, q)} z(i, j) = 1; \\ \forall (i, j) \in U: z(i, j) = 1, 0, \end{array} \right.$$

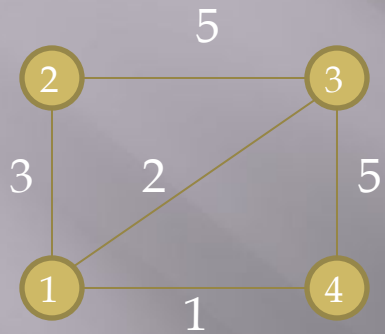


где $L^d(p, q)$ – маршрут, соединяющий p -ю и q -ю вершины,
 $z(i, j)$ - булева переменная, равная единице, если ребро (i, j)
принадлежит подмножеству U и равная нулю в противном случае,
 $r(i, j)$ - вес ребра (i, j) .

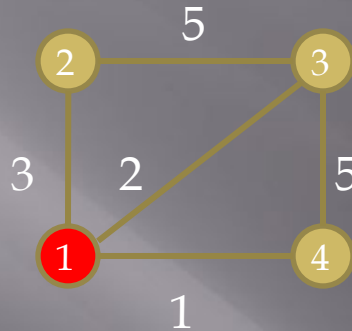
Алгоритм Прима

- Шаг 1. Выбирается произвольная i -я вершина.
- Шаг 2. Выбирается инцидентное выбранной вершине ребро
- Шаг 3. Ребро (i, r) с минимальным весом, а вершины i -я и r -я «стягиваются» в одну вершину.
- Шаг 4. Вес «стянутого» ребра добавляется к ранее накопленной сумме.
- Шаг 5. Если образовались параллельные ребра, то из них остается то, вес которого минимален, а остальные удаляются.
- Шаг 6. Если все вершины графа стянуты в одну, то перейти к шагу 7, в противном случае – к шагу 1.
- Шаг 7. Конец алгоритма. «Стянуты» искомые ребра.

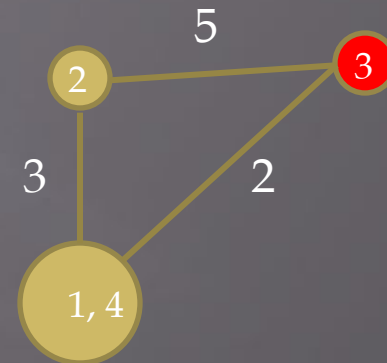
Пример 2



A) граф $G(X,U)$.



B) $U'=(1,4)$; $R(U')=1$.



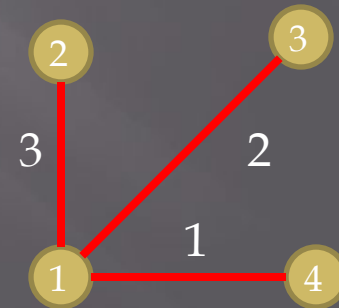
C) $U'=\{(1,4),(1,3)\}$; $R(U')=3$.



D) $U'=\{(1,4),(1,3),(1,2)\}$; $R(U')=6$.



E) Конец алгоритма.



F) Граф $G(X,U')$

Достоинства и недостатки алгоритма Прима

Достоинства:

1. Гарантия получения глобально оптимального решения.
2. Число итераций равно $|X| - 1$, где X – множество вершин.
3. Простота и наглядность.

Недостаток:

Алгоритм применим только к неориентированным графам.

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

0	5	1	0	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
0	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	0
3	8	0	9	0	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№3

0	7	1	2	6	3
7	0	8	4	0	8
1	8	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№4

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	4
2	4	3	0	7	9
6	0	7	7	0	5
3	8	4	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№5

0	0	10	2	6	3
0	0	0	4	0	8
10	0	0	13	7	0
2	4	13	0	0	9
6	0	7	0	0	15
3	8	0	9	15	0

№6

0	5	1	12	6	13
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	4
12	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
13	8	4	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№7

0	15	10	12	6	13
15	0	0	14	0	8
10	0	0	3	7	0
12	14	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
13	8	0	9	5	0

№8

0	0	11	2	8	3
0	0	0	4	0	8
11	0	0	3	7	0
2	4	3	0	10	19
8	0	7	10	0	15
3	8	0	19	15	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№9

0	12	11	2	16	13
12	0	0	14	0	8
11	0	0	13	17	0
2	14	13	0	10	9
16	0	17	10	0	15
13	8	0	9	15	0

№10

0	5	1	2	6	4
5	0	10	4	0	5
1	10	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	2
4	5	0	9	2	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№11

0	25	21	32	16	23
25	0	0	24	0	28
21	0	0	23	27	0
32	24	23	0	0	29
16	0	27	0	0	35
23	28	0	29	35	0

№12

0	3	1	2	6	0
3	0	0	4	10	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	6
6	10	7	0	0	5
0	8	0	6	5	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№13

0	0	1	2	6	3
0	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	0
6	0	7	0	0	5
3	8	0	0	5	0

№14

0	35	31	22	36	33
35	0	0	34	0	38
31	0	0	33	37	0
22	34	33	0	0	39
36	0	37	0	0	35
33	38	0	39	35	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№15

0	14	10	11	15	13
14	0	0	14	0	17
10	0	0	13	17	0
11	14	13	0	0	19
15	0	17	0	0	16
13	17	0	19	16	0

№16

0	15	21	22	26	23
15	0	0	4	0	8
21	0	0	3	41	0
22	4	3	0	0	19
26	0	41	0	0	35
23	8	0	19	35	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№17

0	4	1	2	0	3
4	0	0	4	0	8
1	0	0	3	2	0
2	4	3	0	0	1
0	0	2	0	0	5
3	8	0	1	5	0

№18

0	5	0	12	6	0
5	0	0	4	0	4
0	0	0	3	7	0
12	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	15
0	4	0	9	15	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№19

0	45	51	42	36	33
45	0	0	34	0	38
51	0	0	43	27	0
42	34	43	0	0	39
36	0	27	0	0	35
33	38	0	39	35	0

№20

0	1	11	12	4	13
1	0	0	4	0	8
11	0	0	3	6	0
12	4	3	0	0	2
4	0	6	0	0	4
13	8	0	2	4	0

Задания к контрольной работе:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№21

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	4
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	5
6	0	7	0	0	5
3	4	0	5	5	0

№22

0	8	9	2	2	3
8	0	0	4	0	8
9	0	0	23	27	0
2	4	23	0	0	9
2	0	27	0	0	15
3	8	0	9	15	0

Пользуясь алгоритмом Прима,
определить минимальную базу ребер
графа $G(X,U)$, заданного матрицей M :

№23

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	4
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	5
6	0	7	0	0	5
3	4	0	5	5	0

№24

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	4
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	5
6	0	7	0	0	5
3	4	0	5	5	0