

ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО -

это неравенство, содержащее неизвестную величину в показателях степеней при некоторых постоянных основаниях этих степеней

$$2^x < 8$$

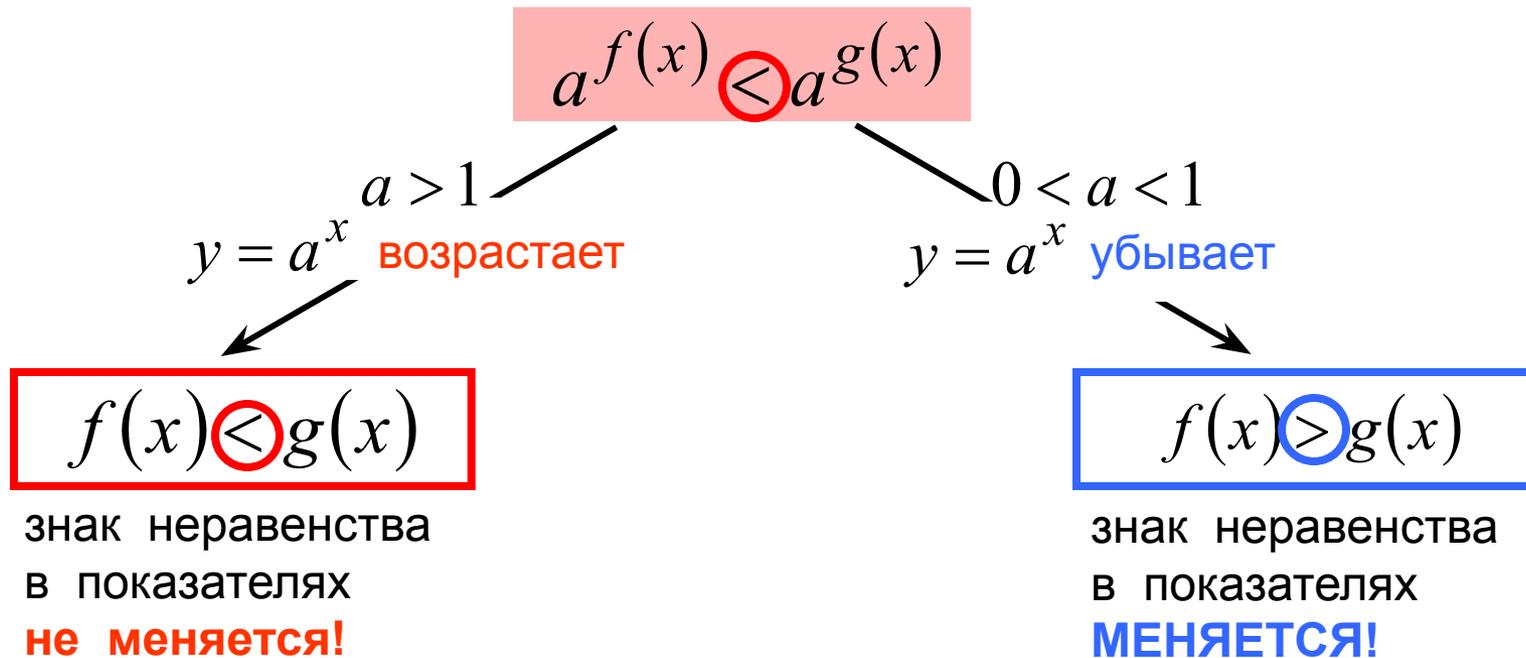
~~$$x^2 < 4$$~~

$$2^{7-3x} \geq 0,5^{x-4}$$

$$25^x - 5^{x+1} + 4 > 0$$

Неравенство вида $a^{f(x)} < b$
или $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$
- **простейшее показательное неравенство.**

Решение простейшего показательного неравенства основано на использовании характера монотонности показательной функции:



Примеры решения простейших показательных неравенств

$$1) 2^x \geq 8$$

$$2^x \geq 2^3$$

$y = 2^x$ возрастает,
поэтому

$$x \geq 3$$

Ответ. $[3; +\infty)$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает,

поэтому

$$x > -3$$

Ответ. $(-3; +\infty)$

$$3) 5^x \leq 1$$

$$5^x \leq 5^0$$

$y = 5^x$ возрастает,
поэтому

$$x \leq 0$$

Ответ. $(-\infty; 0]$

Примеры решения простейших показательных неравенств

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \textcircled{>} \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает,
поэтому

$$x \textcircled{<} 3$$

Ответ. $(-\infty; 3)$

$$5) \left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \textcircled{\leq} \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$$

$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ убывает,
поэтому

$$x \textcircled{\geq} -1$$

Ответ. $[-1; +\infty)$

$$6) 0,2^x \geq 125$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 5^3$$

$$5^{-x} \textcircled{\geq} 5^3$$

$y = 5^x$ возрастает,
поэтому

$$-x \textcircled{\geq} 3$$

$$x \textcircled{\leq} -3$$

Ответ. $(-\infty; -3]$

Примеры решения простейших показательных неравенств

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$
при любых значениях x
принимает только положительные значения!

7) $3^x \geq 0$

Ответ.
 $(-\infty; +\infty)$

8) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -2$

Ответ.
решений нет

9) $2^x \geq -0,5$

Ответ.
 $(-\infty; +\infty)$

10) $0,3^x < 0$

Ответ.
решений нет

$$4^{1-x} < \frac{1}{8}$$

$$(2^2)^{1-x} < 2^{-3}$$

$$2^{2-2x} < 2^{-3}$$

$y = 2^x$ возрастает,
поэтому

$$2 - 2x < -3$$

$$-2x < -3 - 2$$

$$-2x < -5$$

$$x > 2,5$$

Ответ. $(2,5; +\infty)$

$$4^x \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \leq 0,25$$

$$\left(4 \cdot \frac{1}{8}\right)^x \leq \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает,

поэтому

$$x \geq 2$$

Ответ. $[2; +\infty)$

$$\sqrt{2}^{2x-6} > 0,5$$

$$2^{\frac{1}{2} \cdot (2x-3)} > \frac{1}{2}$$

$$2^{x-1,5} > 2^{-1}$$

$y = 2^x$ возрастает,
поэтому

$$x - 1,5 > -1$$

$$x > 0,5$$

Ответ. $(0,5; +\infty)$

$$0,2^{0,27-3x^2} \geq 1$$

$$0,2^{0,27-3x^2} \not\geq 0,2^0$$

$y = 0,2^x$ убывает,
поэтому

$$0,27 - 3x^2 \leq 0$$

квадратное неравенство,
решается графически

Рассмотрим функцию

$$y = -3x^2 + 0,27$$

график - парабола

1) ветви вниз

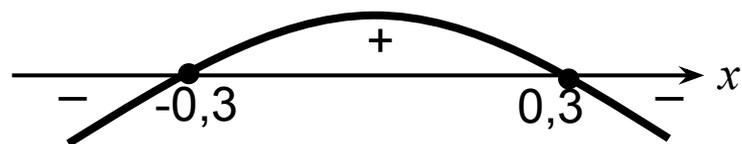
2) точки пересечения с осью Ox

$$-3x^2 + 0,27 = 0$$

$$3x^2 = 0,27$$

$$x^2 = 0,09$$

$$x = \pm 0,3 \quad \text{- две точки}$$



Ответ. $(-\infty; -0,3] \cup [0,3; +\infty)$

$$7^{x^2-x-4} \leq 49$$

$$7^{x^2-x-4} \leq 7^2$$

$y = 7^x$ возрастает,
поэтому

$$x^2 - x - 4 \leq 2$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

*квадратное неравенство,
решается графически*

Рассмотрим функцию

$$y = x^2 - x - 6$$

график - парабола

1) ветви вверх

2) точки пересечения с осью Oх

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ x = 3 \end{cases}$$

- две точки



Ответ. $[-2; 3]$

$$0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} \geq 64$$

$$2^{-x^2} \cdot 2^{2x+2} \geq 2^6$$

$$2^{-x^2+2x+2} \geq 2^6$$

$y = 2^x$ возрастает,
поэтому

$$-x^2 + 2x + 2 \geq 6$$

$$-x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

квадратное неравенство,
решается графически

Рассмотрим функцию

$$y = -x^2 + 2x - 4$$

график - парабола

1) ветви вниз

2) точки пересечения с осью Oх

$$-x^2 + 2x - 4 = 0$$

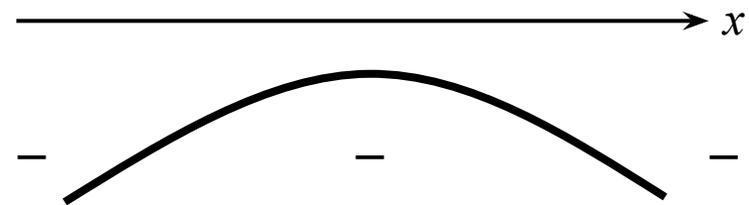
$$D = -12 < 0$$

корней нет

т.е. парабола

с осью Oх

не пересекается



Ответ. решений нет

$$0,15^{\frac{2x+1}{3-x}} \geq 1$$

$$0,15^{\frac{2x+1}{3-x}} \geq 0,15^0$$

$y = 0,15^x$ убывает,
поэтому

$$\frac{2x+1}{3-x} \leq 0$$

*дробно-рац. неравенство,
решается методом интервалов*

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{2x+1}{3-x}$$

1) Область определения функции

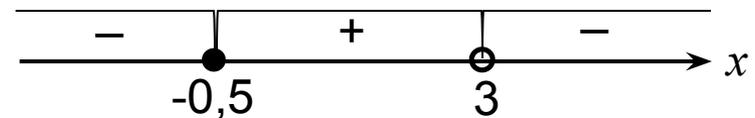
$$D(y): \begin{aligned} 3-x &\neq 0 \\ x &\neq 3 \end{aligned}$$

2) Нули функции

$$\frac{2x+1}{3-x} = 0$$

$$x = -0,5$$

3) Знаки функции на интервалах



Ответ. $(-\infty; -0,5] \boxtimes (3; +\infty)$

$$2^{\sqrt{x^2+8x}} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$$

$$2^{\sqrt{x^2+8x}} < 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}}$$

$$2^{\sqrt{x^2+8x}} \leq 2^3$$

$$\sqrt{x^2+8x} \leq 3$$

$$\sqrt{x^2+8x} - 3 < 0$$

*иррациональное неравенство,
решается методом интервалов*

Ответ. $(-\infty; -0,5] \cup (3; +\infty)$

Рассмотрим функцию

$$y = \sqrt{x^2 + 8x} - 3$$

1) Область определения функции

$$D(y): x^2 + 8x \geq 0$$

парабола

ветви вверх

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x+8) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = -8 \end{cases} \sqrt{x^2 + 8x} - 3 = 0$$



2) Нули функции

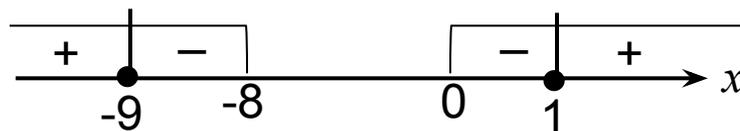
$$\sqrt{x^2 + 8x} = 3$$

$$x^2 + 8x = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ x = -9 \end{cases}$$

3) Знаки функции на интервалах



Домашнее задание

$$1) 5^{3x-2} > 625$$

$$2) \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-8} > \left(\frac{9}{25}\right)^{3-x}$$

$$3) (0,09)^{5-x} > 0,3^{x+7}$$

$$4) 0,2^x < 5^{2x+9}$$

$$5) (0,1)^{5x-9} \leq 0,001$$

$$6) 5^x \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^x \geq \frac{4}{9}$$

$$7) 5^{x^2-3x} \geq 1$$

$$8) \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{x+3}} \geq \frac{4}{9}$$

$$9) (0,6)^{x^2-x} > \frac{9}{25}$$

$$10) 4^{\sqrt{x-x^2}} > 0,25$$