



**ЛЕКЦІЯ 9**  
**МОДЕЛІ**  
**РОЗПОДІЛЕНОГО**  
**ЛАГУ**

# План

- 9.1 *Поняття лагу і лагових змінних.*
- 9.2 *Моделі розподіленого лагу. Взаємна кореляційна функція.*
- 9.3 *Оцінка параметрів моделей з лагами в незалежних змінних: метод послідовного збільшення кількості лагів, перетворення Койка (метод геометричної прогресії).*
- 9.4 *Оцінювання параметрів авторегресійних моделей*
- 9.5 *Виявлення автокореляції залишків в авторегресійних моделях.*
- 9.6 *Авторегресійне перетворення.*
- 9.7 *Перетворення методом ковзного середнього.*
- 9.8 *Перетворення ARMA і ARIMA.*

## *Поняття лагу і лагових змінних*

$$y_t = a + a_0x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + \dots + u_t.$$

(9.1)

$$y_t = a + a_0x_t + b_1y_{t-1} + b_2y_{t-2} + \dots + u_t.$$

(9.2)

*Моделі розподіленого лагу. Взаємна кореляційна функція.*

$$y_t = \sum_{\tau \geq 0} a_{\tau} x_{t-\tau} + \sum_{i=1}^m b_i x_{t,i} + u_t. \quad (9.3)$$

$$r_{\tau} = \frac{(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t x_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}}{\sqrt{\left[ (n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \right)^2 \right] \left[ (n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}^2 - \left( \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau} \right)^2 \right]}}. \quad (9.4)$$

# Перетворення Койка

$$y_t = \omega(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}),$$

(9.5)

$$\omega = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$v_t = u_t + \lambda u_{t-1}$$

## *Модель адаптивних сподівань*

$$y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + u_t(1 - \lambda u_{t-1}) \quad (9.6)$$

## *Модель часткового коригування*

$$y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma x_t + (1 - \gamma)y_{t-1} + u_t, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (9.7)$$

## Оцінювання параметрів авторегресійних моделей

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 y_{t-1} + v_t. \quad (9.8)$$

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (9.9)$$

$$v_t = u_t + \lambda u_{t-1}, \quad (9.10)$$

$$v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$$



$$\hat{a} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y \quad (9.11)$$

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + \lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 + \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a_0 + a_1 x_t + v_t, \quad (9.13)$$

$$u V^{-1} u$$



*Виявлення автокореляції залишків в авторегресійних моделях.*

$$h = \bar{\rho} \sqrt{\frac{n}{1 - nD(g)}}, \quad (9.14)$$

$$\bar{\rho} \approx 1 - \frac{DW}{2}. \quad (9.15)$$

## Авторегресійне перетворення

$$(y_t - m) = \alpha_1(y_{t-1} - m) + u_t, \quad (9.16)$$

$$(y_t - m) = \alpha_1(y_{t-1} - m) + \alpha_2(y_{t-2} - m) + u_t \quad (9.17)$$

$$(y_t - m) = \alpha_1(y_{t-1} - m) + \alpha_2(y_{t-2} - m) + \dots + \alpha_p(y_{t-p} - m) + u_t \quad (9.18)$$

*Перетворення методом ковзного середнього*

$$y_t = \gamma + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}, \quad (9.19)$$

$$y_t = \gamma + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q}$$

(9.20)

## Перетворення ARMA і ARIMA

$$y_t = \gamma + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}. \quad (9.21)$$

$$y_t - y_{t-1} - y_{t-2} - \dots - y_{t-d}.$$

$$y_t^* = \alpha_1 y_{t-1}^* + \dots + \alpha_p y_{t-p}^* + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_q u_{t-q},$$

(9.22)