# Производная и дифференциал.

- Первое правило Лопиталя (G.-F. de l'Hospital) (раскрытие неопределённости вида $\frac{0}{0}$ )

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x_0$ и равны нулю в этой точке $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Пусть $g'(x)\neq 0$ в окрестности точки $x_0$. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива

формула:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема Лопиталя верна и в случае, когда

$$x \to \infty, \quad x \to -\infty, \quad x \to +\infty$$

Замечание. Если окажется, что отношение производных $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ снова представляет собой неопределенность и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя применяют повторно.

Пример 1. Найти $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(x-1)\cdot(x+1)^2}{\left(1+x^2\right)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}-1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

Пример 3.    Найти    $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

## • Второе правило Лопиталя (раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x_0$, за исключением самой точки $x_0$, причем $g'(x) \neq 0$ .

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

причем справедлива формула:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

# Другие виды неопределённостей.

$$(0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty)$$

Неопределённости вида $0\cdot\infty, \quad \infty-\infty$

можно свести к $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, а затем

раскрыть с помощью правила Лопиталя.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} : \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\tan x\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\tan x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot x=0$$

Неопределённости вида $0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$
имеют место при рассмотрении функций

$$y = f(x)^{g(x)}$$

если при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞, а $g(x)$- соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределённости с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

сводятся к неопределённости вида $0 \cdot \infty$

## Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = \left[0\cdot\infty\right] = e^0 = 1$$

см. пример 5

## Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{e^x-1-x}\cdot\ln\left(1+x^2\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(e^x-1\right)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{e^x+x^2e^x-1-x^2}}=$$

первое правило Лопиталя

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{e^x+2xe^x+x^2e^x-2x}}=e^{\frac{2}{1}}=e^2$$

## Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{2\cos x\cdot\ln\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2\ln\tan x}{\frac{1}{\cos x}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln\tan x}{\frac{1}{\cos x}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{\sin^2 x}}=e^{\frac{0}{1}}=e^0=1$$

второе правило Лопиталя