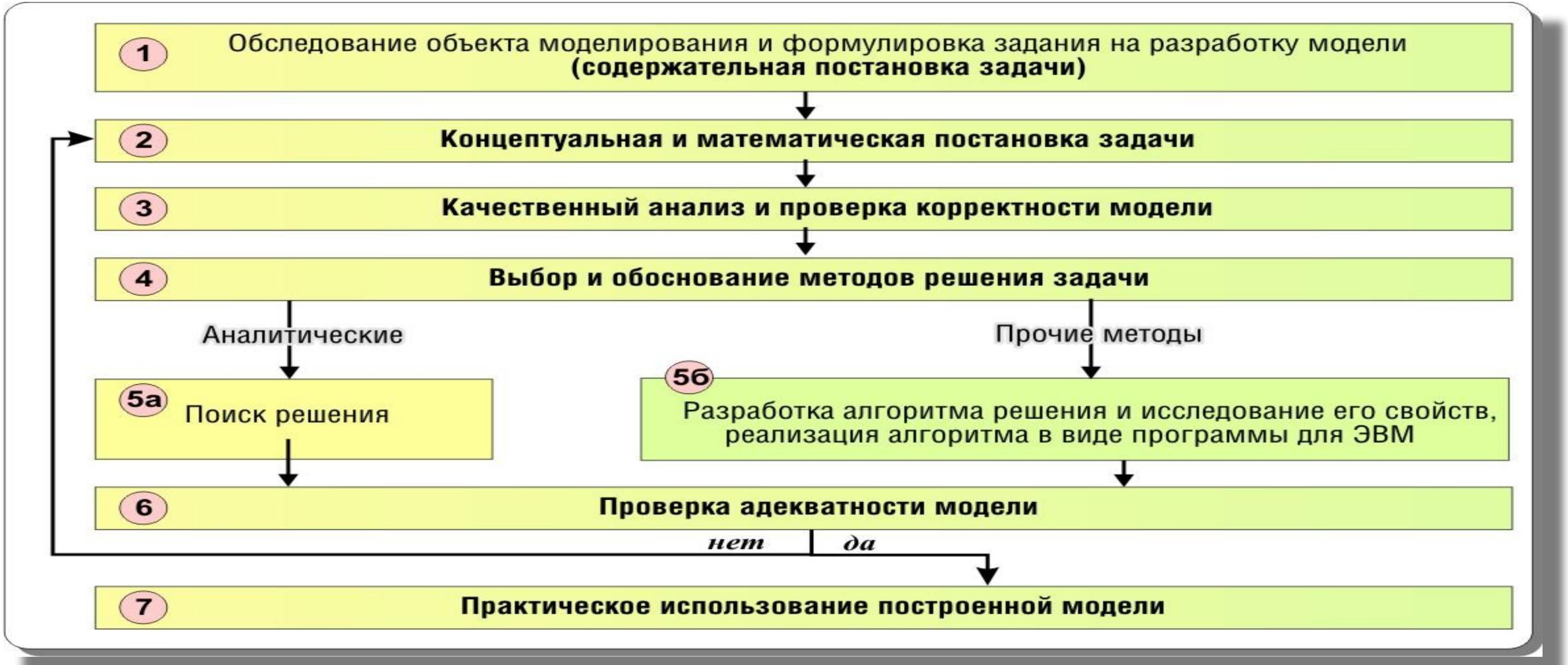
Тема 1. <u>ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ</u>

<u>Вычислительным экспериментом (ВЭ)</u> ***называется методология и технология исследований, основанная на применении прикладной математики и ЭВМ как технической базы математического моделирования.***

Тема 1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

<u>План построения вычислительного эксперимента:</u>



Этап 1. <u>**СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.**</u>

- **обследование объекта** моделирования с целью выявления **основных факторов, механизмов, влияющих на его поведение**, определения соответствующих **параметров, позволяющих описывать объект;**
- **сбор и анализ** имеющихся экспериментальных **данных об объектах-аналогах**, проведение при необходимости **дополнительных экспериментов**;
- **аналитический обзор литературных источников**, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных);
- анализ и обобщение всего накопленного материала, **разработка общего плана** создания математической модели.

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, дополнительные требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде <u>технического задания</u> на проектирование и разработку модели.

ПНИПУ кафедра "Авиационные двигатели", ст. преподаватель Конев И.П., 2015г.

ИНЖЕНЕРНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Тема 1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Этап 1. **СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.**

Пример. ***Содержательная постановка задачи о баскетболисте.***

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

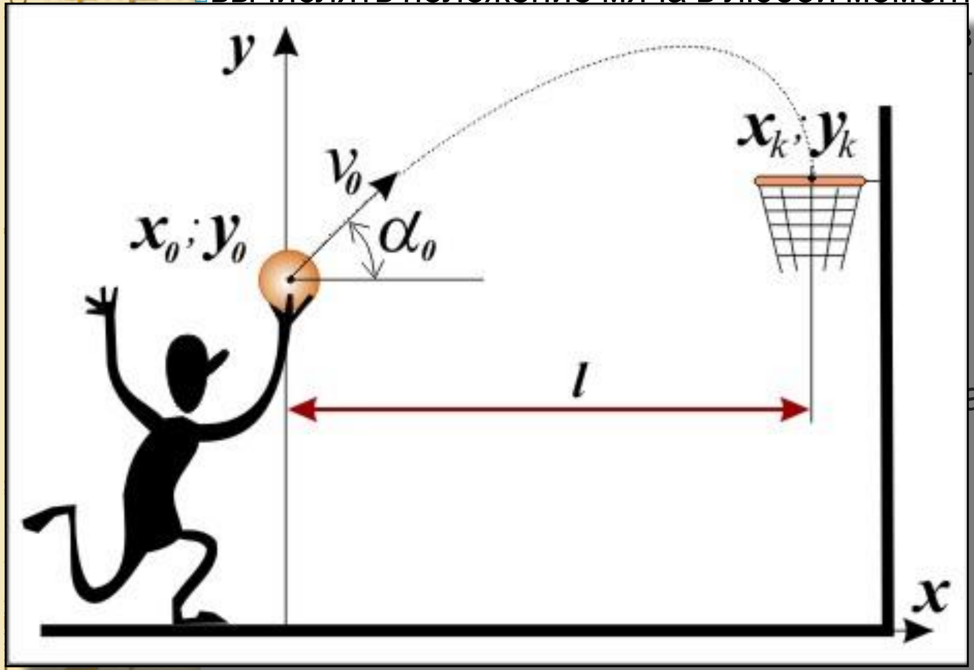
Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;

ину после броска при различных начальных

ти броска, угле броска).

а;



Этап 2. КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

***Концептуальная (естественно-научная)* формулируется на основании разра-ботанного на предыдущем этапе технического задания, с использованием имею-щихся знаний об объекте моделирования и требований к будущей модели.**

Это сформулированный в ***терминах конкретных дисциплин*** (физики, механики, химии, биологии и т.д.) ***перечень основных вопросов***, интересующих заказчика, а также ***совокупность гипотез относительно свойств и закономерностей поведения объекта моделирования***.

Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что для их обоснования могут быть приведены некоторые теоретические доводы и использованы экспериментальные данные, ос нованные на собранной ранее информации об объекте.

На данном этапе учитывая опыт разработчиков может быть найдена существующая модель.

Наибольшие трудности при формулировке концептуальной постановки приходится преодолевать в моделях, находящихся на «стыке» различных дисциплин. Различия традиций, понятий и языков, используемых для описания одних и тех же объектов, являются очень серьезными препятствиями, возникающими при создании «междисциплинарных» моделей.

Этап 2. КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Концептуальная постановка задачи о баскетболисте.

Движение баскетбольного мяча может быть описано в соответствии с законами классической механики Ньютона.

Примем следующие гипотезы:

- объектом моделирования является мяч – ***шар радиуса*** R
- мяч будем считать ***материальной точкой массой*** m положение которой совпадает с центром масс мяча;
- движение происходит в ***поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения*** g и описывается ***уравнениями классической механики Ньютона;***

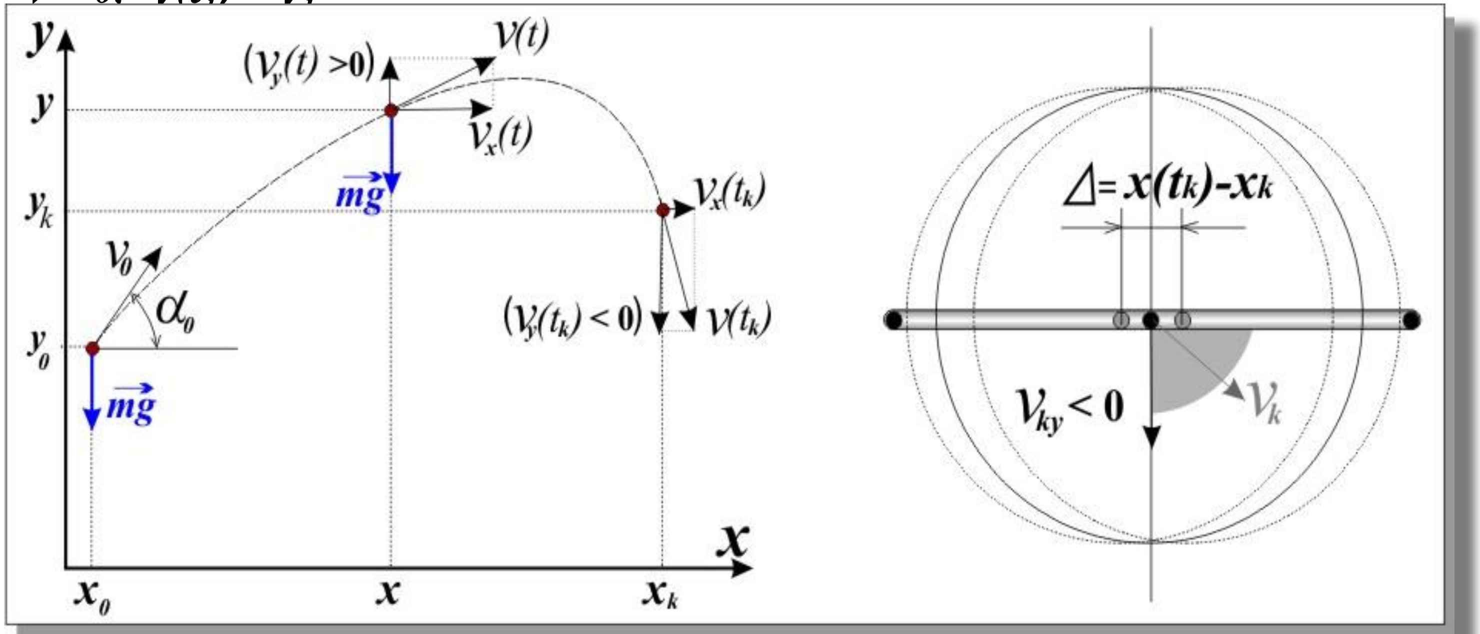
$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

- движение мяча происходит в ***одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли*** и проходящей через точку броска и центр корзины;
- ***пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс***.

Этап 2. КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Концептуальная постановка задачи о баскетболисте:

Определить закон движения материальной точки массой m под действием силы тяжести (mg), если известны начальные координаты точки x_o и y_o, её начальная скорость v_o и угол броска α_o. Центр корзины имеет координаты x_k и y_k. Вычислить точность броска $\Delta = x(t_k) - x_k$ где t_k определяется из условий: $t_k>0$, $v_y<0$, $y(t_k) = y_k$



Этап 2. КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Особенности приведенной в примере концептуальной постановки задачи.

- Первая из перечисленных гипотез особенно важна, так как она выделяет объект моделирования. В данном случае объект можно считать ***простым***. Однако в качестве объекта моделирования можно рассматривать систему «***игрок - мяч - кольцо***». Требуемая для описания подобной системы модель будет уже намного сложнее, так как игрок в свою очередь представляет собой сложную биомеха-ническую систему и его моделирование является далеко не тривиальной задачей.

- Гипотеза о том, что мяч можно считать материальной точкой, широко применяется для исследования движений тел в механике. В нашем случае она оправдана в ***силу симметрии формы мяча*** и ***малости его радиуса по сравнению с характерными расстояниями перемещения мяча***.

- Гипотезу о применимости в данном случае законов классической механики можно обосновать огромным экспериментальным материалом, связанным с изучением ***движения тел вблизи поверхности Земли со скоростями много меньше скорости света***. Предположение о постоянстве ускорения свободного падения также представляется обоснованным. А вот если бы моделировалось движение баллистической ракеты, то пришлось бы учитывать изменение ускорения свободного падения в зависимости от высоты и широты места а также высокую скорость движения.

Этап 2. <u>**КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**</u>

Особенности приведенной в примере концептуальной постановки задачи.

- Гипотеза о ***движении мяча в плоскости, перпендикулярной поверхности Земли, значительно упрощает модель***. Траектория мяча может не лежать в одной плоскости, если при броске он сильно подкручивается вокруг вертикальной оси. В этом случае поток воздуха, обтекающий мяч, становится не симметричным, и его траектория уже не будет лежать в одной плоскости.
- ***Гипотеза об отсутствии влияния сопротивления воздуха наименее обоснована***. При движении тела в газе или жидкости сила сопротивления увеличивается с ростом скорости движения. Учитывая невысокие скорости движения мяча, его правильную обтекаемую форму и малые дальности бросков, указанная ***гипотеза может быть принята в качестве первого приближения.***

Фактически в приведенном примере концептуальная постановка свелась к постановке классической задачи механики о движении материальной точ ки в поле сил тяжести.

Концептуальная постановка более абстрактна по отношению к содержательной, так как материальной точке можно сопоставить произвольный материальный объект, брошенный под углом к горизонту: футбольный мяч, ядро, камень или артиллерийский снаряд.

Этап 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Задача любого вида сводится к математической задаче.
Р. Декарт

***Математическая постановка задачи моделирования* - это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.**

Во многих областях знаний (механике, физике, биологии и т.д.) принято выделять законы, справедливые для всех объектов исследования данной области знаний, и соотношения, описывающие поведение отдельных объектов или их совокупностей.

К числу первых в физике и механике относятся, например, ***уравнения баланса массы, количества движения, энергии*** и т.д., справедливые при определенных условиях для любых материальных тел, независимо от их конкретного строения, структуры, состояния, химического состава. Уравнения этого класса подтверждены огромным количеством экспериментов, хорошо изучены и в силу этого применяются в соответствующих математических моделях как данность.

Определяющие соотношения - это основной элемент, «сердцевина» любой математической модели физико-механических процессов. Именно ошибки в выборе или установлении определяющих соотношений приводят к количествен-но неверным результатам моделирования.

ПНИПУ кафедра "Авиационные двигатели", ст. преподаватель Конев И.П., 2015г.
ИНЖЕНЕРНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
Тема 1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Этап 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Совокупность математических соотношений определяет оператор модели. В большинстве случаев оператор модели включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений.

Для обеспечения ***корректности*** постановки задачи к системе уравнений добавляются ***начальные или граничные условия***, которые, в свою очередь, могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка.

Математическая постановка задачи о баскетболисте.

$$\frac{dx}{dt} = V_x \qquad m\frac{dV_x}{dt} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y \qquad m\frac{dV_y}{dt} = -mg \qquad (2)$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0 \qquad (3)$$

$$V_x(0) = V_0\cos(\alpha_0) \qquad V_y(0) = V_0\sin(\alpha_0) \qquad (4)$$

необходимая точность попадания

$$\Delta = x(t_k) - x_k \qquad (5)$$

$$t_k > 0, \quad V_y(t_k) < 0, \quad y(t_k) = y_k \qquad (6)$$

Л 02 рис 03

t). $V_x(t)$, $V_y(t)$ из решения системы

ений является замкнутой, так как число
ференциальных и 2 алгебраических) равно
чи:

Этап 4. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛИ.

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок:

- ***Контроль размерностей - приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.***

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F \Rightarrow [\hat{e}\tilde{a}]\frac{[\grave{i}\ /\tilde{n}]}{[\tilde{n}]} = [\acute{I}\ ] \Rightarrow \left[\frac{\hat{e}\tilde{a}\cdot\grave{i}}{\tilde{n}^2}\right] \Rightarrow \left[\frac{\hat{e}\tilde{a}\cdot\grave{i}}{\tilde{n}^2}\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{[\grave{i}\ ]}{[\tilde{n}]} = \frac{[\grave{i}\ ]}{[\tilde{n}]}$$

- ***Контроль порядков,*** состоящий из грубой оценки порядков складываемых величин и исключением малозначимых параметров.
- ***Контроль характера зависимостей*** заключается в проверке того, что ***направление и скорость изменения выходных параметров*** модели, вытекающие из математических соотношений, ***такие, как это следует непосредственно из «физического» смысла изучаемой модели***.
- ***Контроль экстремальных ситуаций*** - проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым значениям, чаще всего к нулю или бесконечности.
- ***Контроль граничных условий*** - проверка того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям.

ПНИПУ кафедра "Авиационные двигатели", ст. преподаватель Конев И.П., 2015г.
ИНЖЕНЕРНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
Тема 1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Этап 4. **КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛИ.**

- ***Контроль физического смысла*** - проверка физического или иного смысла исходных и промежуточных соотношений.
- ***Контроль математической замкнутости***, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, притом однозначно, решить поставленную математическую задачу.

Например: Задача свелась к отысканию n неизвестных из некоторой системы алгебраических уравнений, то контроль замкнутости состоит в проверке того, что число независимых уравнений должно быть n.

Если их меньше n, то надо установить недостающие уравнения, а если их больше n, то либо уравнения зависимы, либо при их составлении допущена ошибка.

Однако если уравнения получаются из эксперимента или в результате наблюдений, то возможна постановка задачи, при которой число уравнений превышает n но сами уравнения удовлетворяются лишь приближенно, а решение ищется, например, по методу наименьших квадратов.

Математическая модель является корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок - размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

Этап 4. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛИ.

Из вышесказанного можно сделать следующее определение понятия ***вычислительный эксперимент***.

Вычислительный эксперимент – это не однократное вычисление по некоторому набору формул, а многостадийный процесс математической модели объекта исследования разработки алгоритмов её решения, программирования, расчётов, анализа результатов и их погрешностей.

Задача $y = f(x)$ называется **корректно поставленной**, если для любых входных данных x из некоторого класса ***существует единственное и устойчивое решение*** y.

Отсутствие устойчивости обычно означает, что ***сравнительно небольшой погрешности (входных параметров)*** δ_x ***соответствует весьма большая погрешность (выходных параметров)*** δ_y а значит получаемое решение будет далеко от

$$\begin{cases} 300x_1 + 400x_2 = 700 \\ 100x_1 + 133x_2 = 233 \end{cases} \quad \text{Система имеет решение} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300x_1 + 400x_2 = 700 \\ 100x_1 + 132x_2 = 233 \end{cases} \quad \text{Система имеет решение} \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Л 02 рис 04

...иводит к изменению решения в 300%.

...екор-ректность математической

Этап 4. **ВЫБОР И ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.**

Поиск решения задачи, ка правило, сводится к ***отысканию некоторых зависимостей искомых величин от исходных параметров*** модели. Как было отмечено ранее, все методы решения задач, составляющих «ядро» математических моделей, можно подразделить на аналитические и алгоритми-ческие (численные).

Аналитические методы более удобны для последующего анализа результатов, но применимы лишь для относительно простых моделей. В случае, если математическая задача ***допускает аналитическое решение, оно, без сомнения, предпочтительнее численного.***

Алгоритмические (численные) методы сводятся к некоторому алгоритму, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ. Точность решения в подобном эксперименте существенно зависит от выбранного метода и его параметров (например, шага интегрирования).

Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Это чаще всего достигается дискретизацией исходной задачи, т.е. переходом от функции непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента.

Например, **траектория центра тяжести баскетбольного мяча определяется не как непрерывная функция времени, а как дискретная функция координат от времени. Полученное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.**

Этап 5. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ.

Математикой разработано огромное количество алгоритмов решения тех или иных задач. Поэтому перед разработчиками математических моделей только стоит **проблема выбора того или иного из предлагаемых методов**.

Следующим шагом является процесс реализации выбранного способа в виде программы для ЭВМ или выбор существующей программы.

Техническое задание на разработку программного обеспечения оформляют в виде спецификации, включающей следующие разделы:

1. Название задачи - дается краткое определение решаемой задачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению (компьютеру, внешним устройствам и т.д.).

2. Описание - подробно излагается математическая постановка задачи, описываются применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входных данных для задач не вычислительного (логического) характера и т.д.

3. Управление режимами работы программы - формируются основные требования к способу взаимодействия пользователя с программой – описывается интерфейс «пользователь-компьютер».

4. Входные данные - описываются входные данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, которые они не могут принимать, и т.д.

Этап 5. **РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ.**

5. Выходные данные - описываются выходные данные, указывается, в каком виде они должны быть представлены (в числовом, графическом или текстовом), приводятся сведения о точности и объеме выходных данных, способах их сохранения и т.д.

6. Обработка ошибок - перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой (например, ошибки при вводе входных данных). Указываются способы диагностики (под диагностикой понимается, обнаружение ошибок при работе программного комплекса) и защиты от этих ошибок, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочных действий и реакция программного комплекса (компьютера) на эти действия.

7. Тестовые задачи - приводятся один или несколько тестовых примеров, на которых в простейших случаях проводится отладка и тестирование программного комплекса.

Этап 6. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Под адекватностью математической модели понимается степень соответствия результатов моделирования – экспериментальным данным или тестовой задаче.

Проверка адекватности модели преследует две цели:

- убедиться в справедливости принятых гипотез;
- установить, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

Проверка выполняется путем сравнения с **имеющимися экспериментальными данными** о реальном объекте или с результатами других, **созданных ранее и хорошо себя зарекомендовавших моделей**. В первом случае говорят о проверке путем сравнения с **экспериментом**, во втором - о сравнении с результатами решения **тестовой задачи**.

В моделях, предназначенных для выполнения оценочных расчетов, удовлетворительной считается точность **10-15%.** В моделях, используемых в управляющих системах, требуемая точность может быть **1-2%** и даже более.

Различают **качественное и количественное совпадение результатов сравнения**. При качественном сравнении требуется лишь **совпадение некоторых характерных особенностей** исследуемых параметров (например, наличие экстремальных точек, возрастание или убывание параметра). При количественном сравнении большое значение следует придавать точности исходных данных для моделирования и соответствующих им значений сравниваемых параметров.

Этап 6. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Неадекватность результатов моделирования возможна, по крайней мере, по трем причинам:

1) **значения задаваемых параметров модели не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез;**

2) **принятая система гипотез верна, но константы и параметры в использованных определяющих соотношениях установлены не точно;**

3) **не верна исходная совокупность гипотез.**

Все три случая требуют дополнительного исследования как моделируемого объекта (с целью накопления новой дополнительной информации о его поведении), так и исследования самой модели (с целью уточнения границ ее применимости).

При возникновении проблем, связанных с адекватностью модели, её корректировку требуется начинать с последовательного анализа всех возможных причин, приведших к расхождению результатов моделирования и результатов эксперимента.

Особенно опасной является ситуация, в которой при решении реальной задачи с использованием не проверенной должным образом модели получаются правдоподобные результаты. Для других условий модель может дать качественно неверные результаты.

В модели о баскетбольном мяче учтём сопротивление воздуха

Для достижения дальности броска **6,227м**, начальная скорость должна быть **6,575 м/с**, что на **2,1%** больше, чем для модели без учета сопротивления воздуха.

$$\boxed{F_{\text{ñî ï ð.}} = -k \cdot v^2}$$