Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии и следствия из них.

Урок-лекция

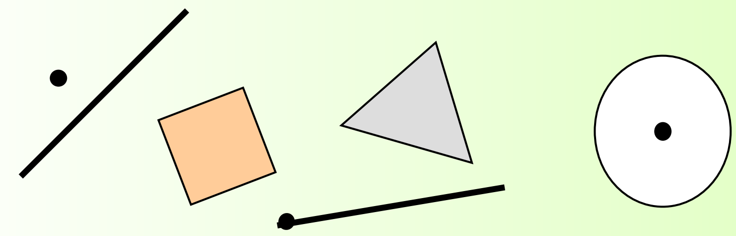
«планиметрия» – наименование смешанного происхождения: от греч. **metreo** – *измерять* и лат. **planum** – *плоская поверхность (плоскость)*

Школьный курс ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

7-9
класс
ы

ГЕОМЕТРИЯ на плоскости

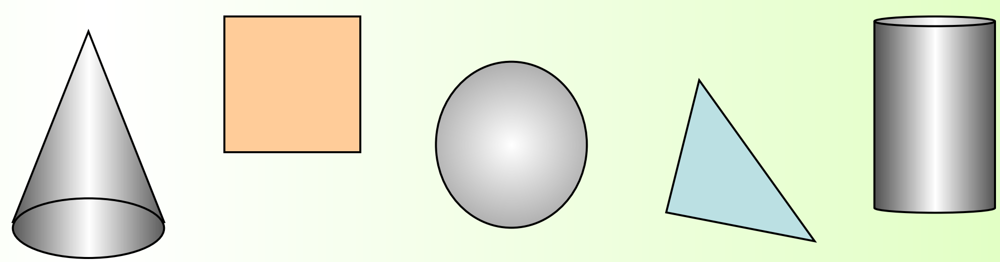


СТЕРЕОМЕТРИЯ

10-11
класс
ы

ГЕОМЕТРИЯ в пространстве

«стереометрия» – от греч. **stereos** – *пространственный* (**stereon** – *объем*).



Геометрия

Наука, которая изучает свойства геометрических фигур

Планиметрия

Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур ***на плоскости***

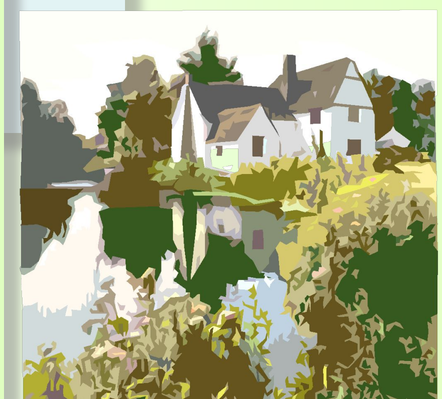
Стереометрия

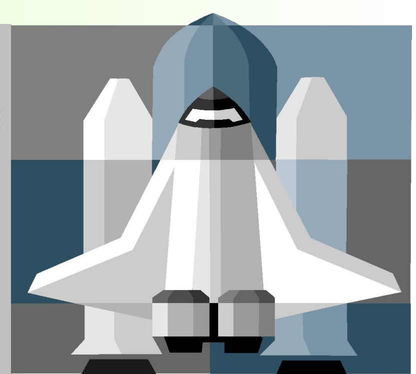
Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур ***в пространстве***

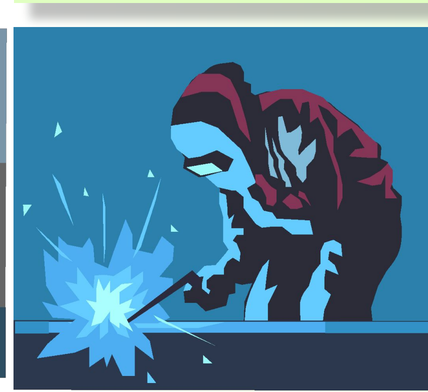
Мы знаем, что

- **ГЕОМЕТРИЯ** возникла из практических задач людей;
- **ГЕОМЕТРИЯ** лежит в основе всей техники и большинства изобретений человечества;
- **ГЕОМЕТРИЯ** нужна

• технику,
• инженеру,
• рабочему,
• архитектору,
• модельеру …

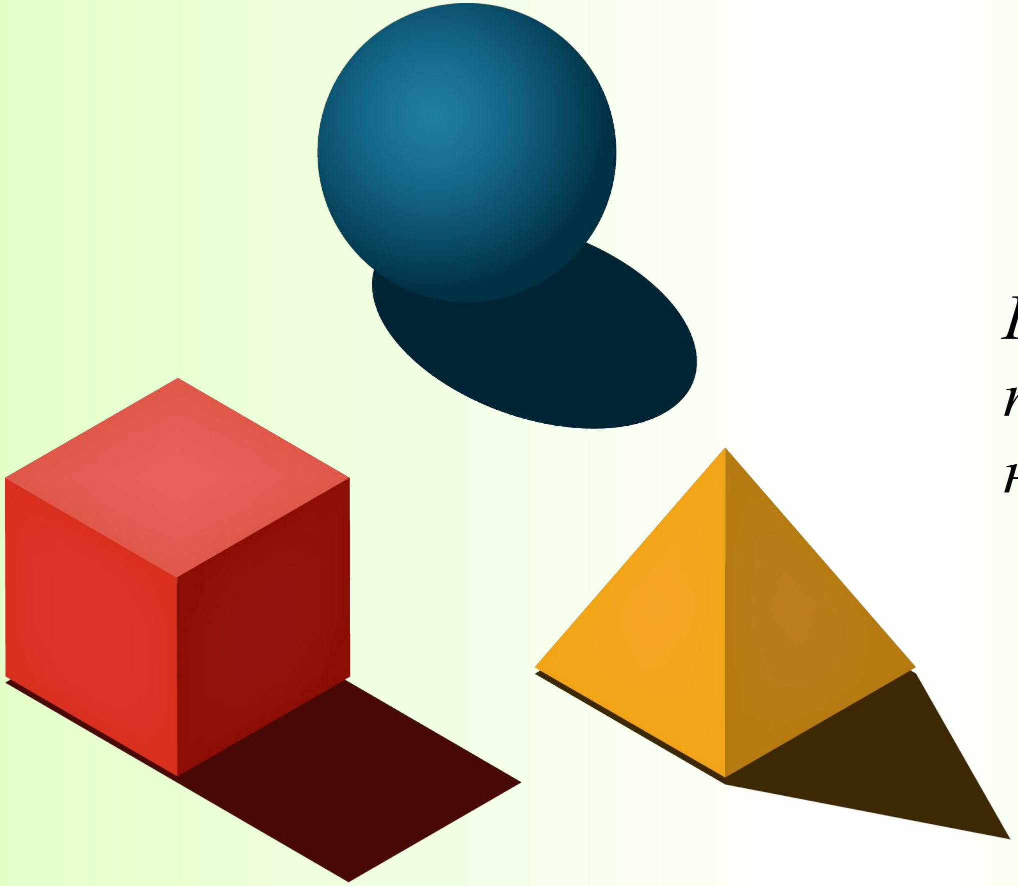




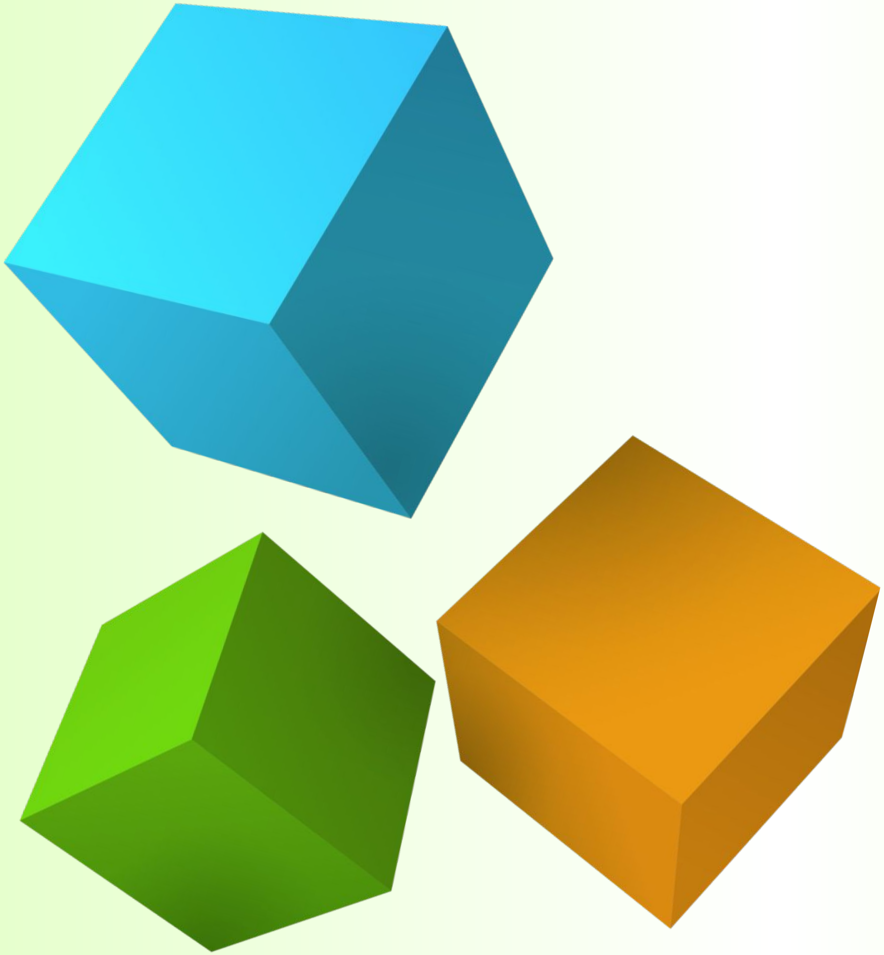


Изучая СТЕРЕОМЕТРИЮ

- Мы проведем систематическое рассмотрение свойств геометрических тел в пространстве.
- Освоим различные способы вычисления практически важных геометрических величин.
- При этом мы будем развивать пространственное воображение и логическое мышление

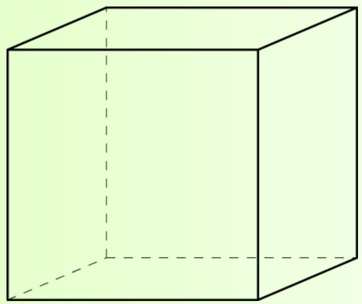


Геометрические фигуры в пространстве называют ***телами***

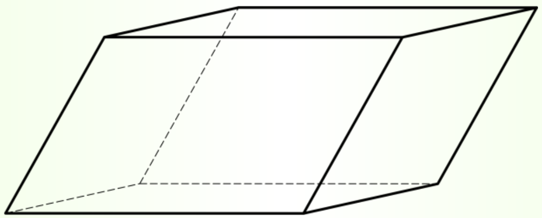


Одна и та же фигура допускает различные изображения

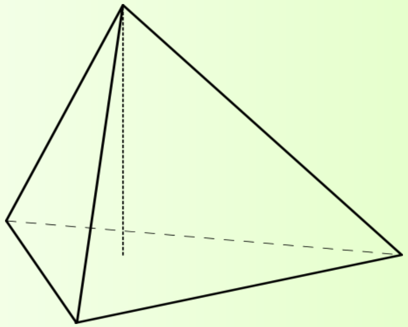
Изображения пространственных фигур



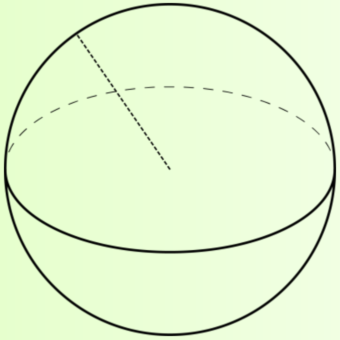
Куб



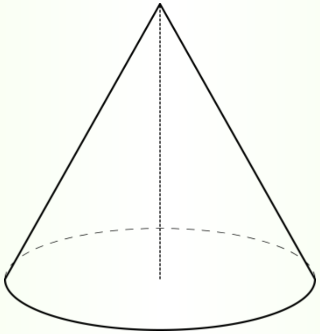
Параллелепипед



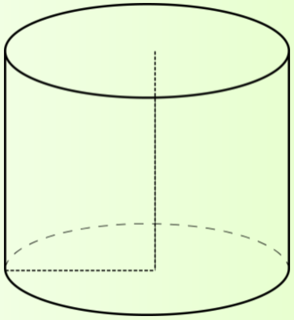
Пирамида



Ша
р



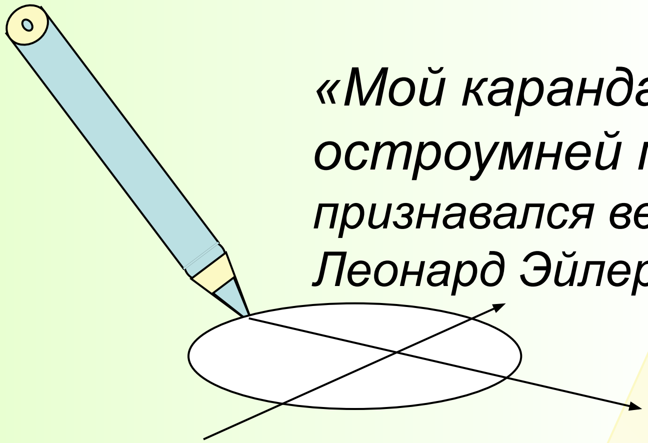
Конус



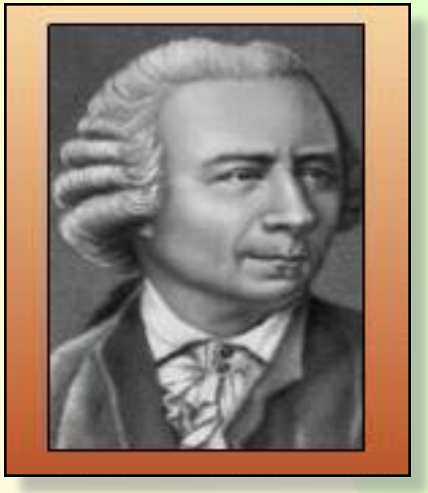
Цилиндр

При изучении стереометрии мы будем пользоваться рисунками, чертежами: они помогут нам понять, представить, проиллюстрировать содержание того или иного факта.

Поэтому прежде, чем приступить к пониманию сущности аксиомы, определения, доказательству теоремы, решению геометрической задачи, постарайтесь наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь .



«Мой карандаш, бывает еще остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).



ВЫВОД:

Интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии

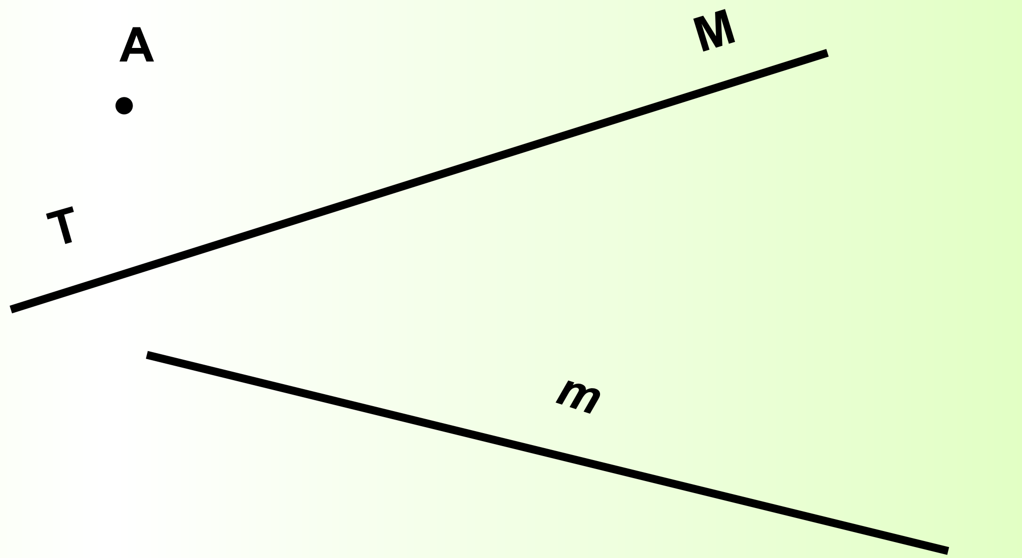
ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ

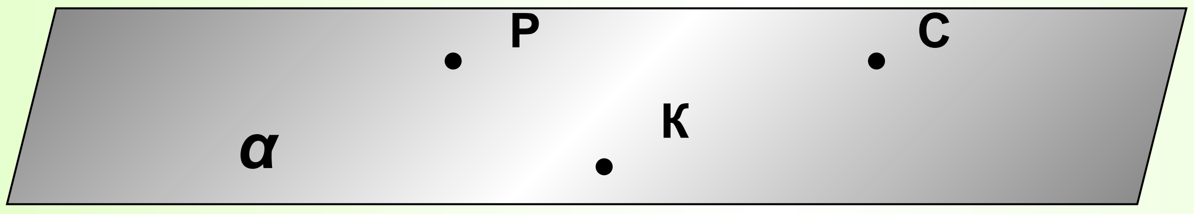
Учебный материал по геометрии

- Аксиомы стереометрии
- Параллельность прямых и плоскостей
- Перпендикулярность прямых и плоскостей
- Многогранники

Основные понятия стереометрии

- точка,
- прямая,
- плоскость,
- расстояние





$\boldsymbol{\alpha}$ = (РКС)

|РК|

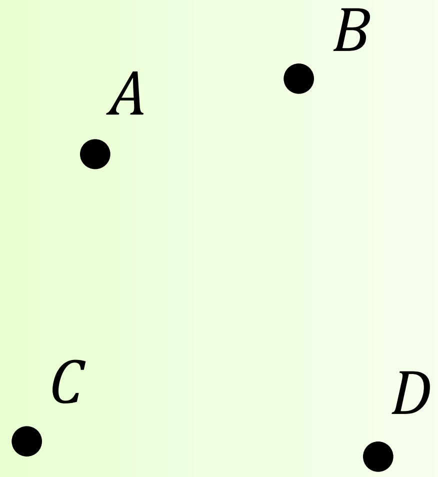
$A \notin \boldsymbol{\alpha}$, $KC \subset \boldsymbol{\alpha}$, $P \in \boldsymbol{\alpha}$, $|PK|$ **= 2 см**

Изображение плоскости

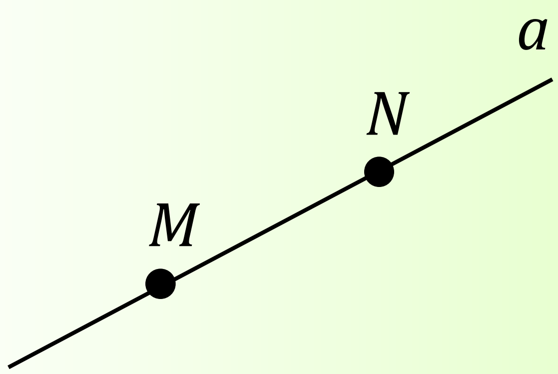
Изображение плоскости в виде параллелограмма

Изображение плоскости в виде произвольной области

Обозначения точек и прямых

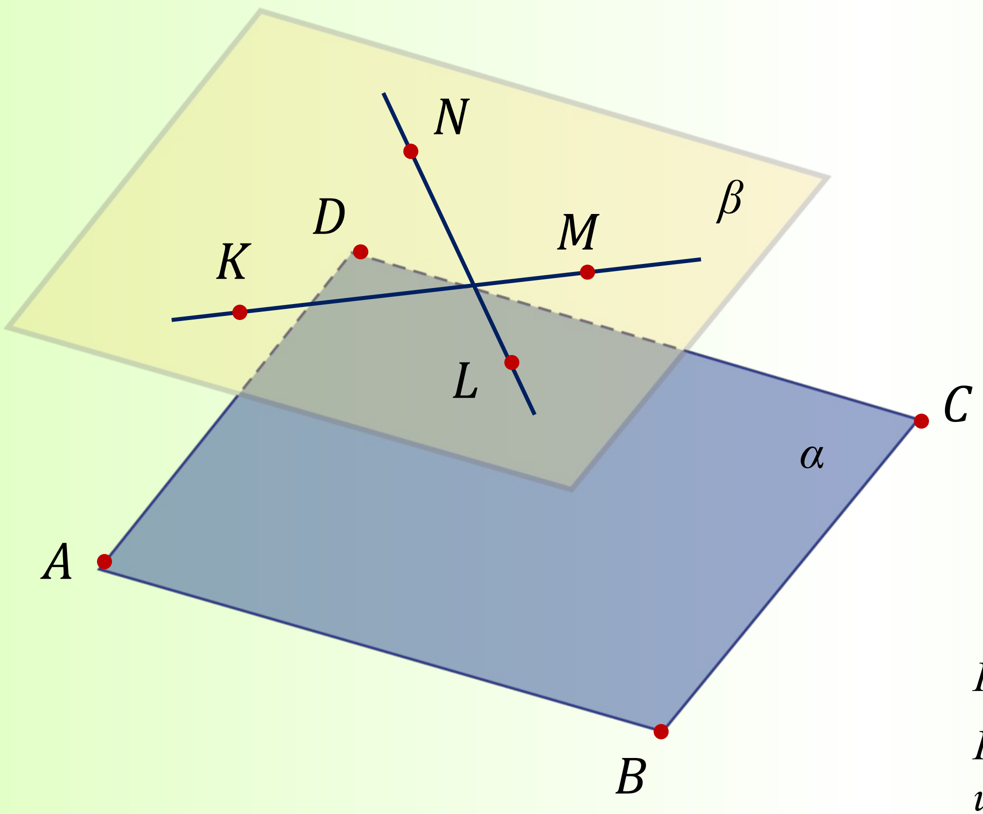


Точки A, B, C и D



Прямая a, она же MN

Обозначение плоскостей



*Плоскости также можно называть **по трём точкам,** через которые плоскости проходят*

Плоскость α, она же плоскость (ABC)

Плоскость β, она же плоскость (KLN) или (KLM)

$\in$ — *принадлежит плоскости*

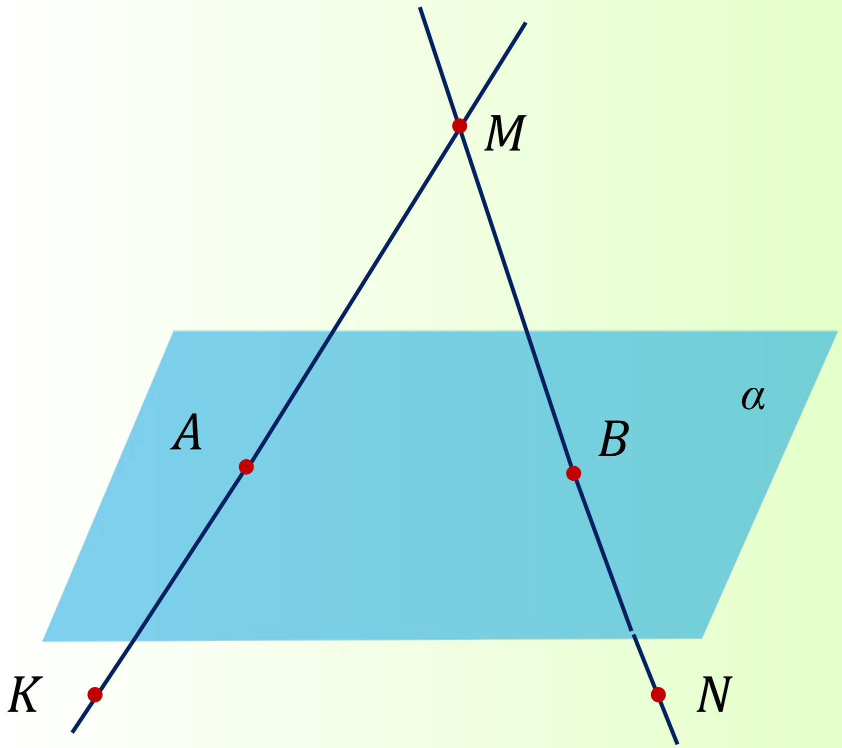
$\subset$ — *лежит в плоскости*

$\notin$ — *не принадлежит плоскости*

$\not\subset$ — *не лежит в плоскости*

$A \in \alpha$, $B \in \alpha$

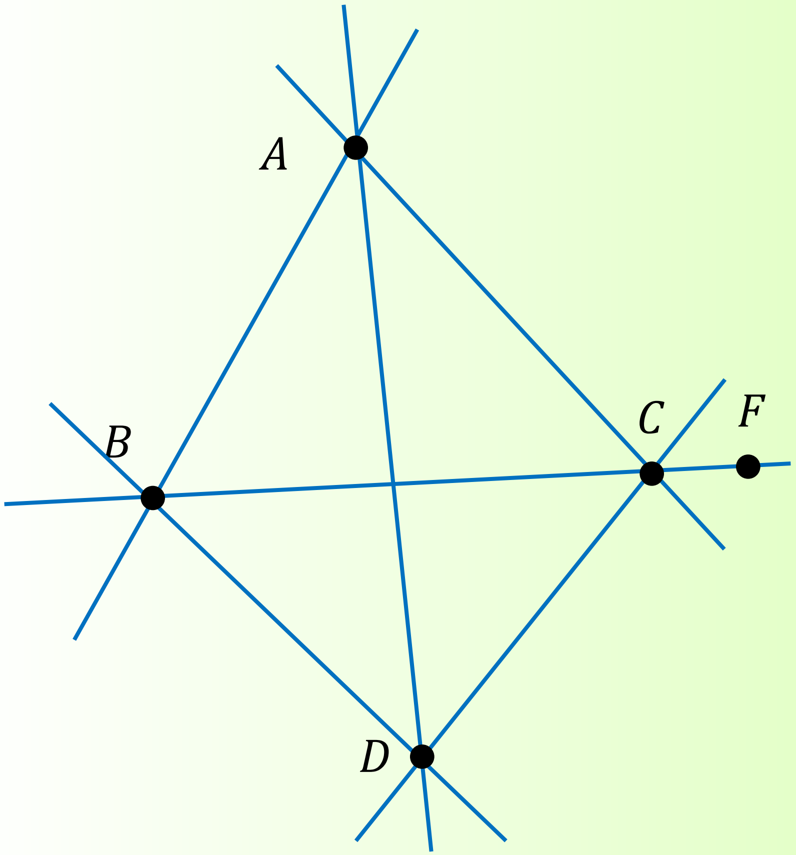
$M \notin \alpha$, $N \notin \alpha$, $K \notin \alpha$



Задача 1

Дано: *Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости*
Указать плоскости, *которым принадлежит:*

а) прямая AB
б) точка F
в) точка C

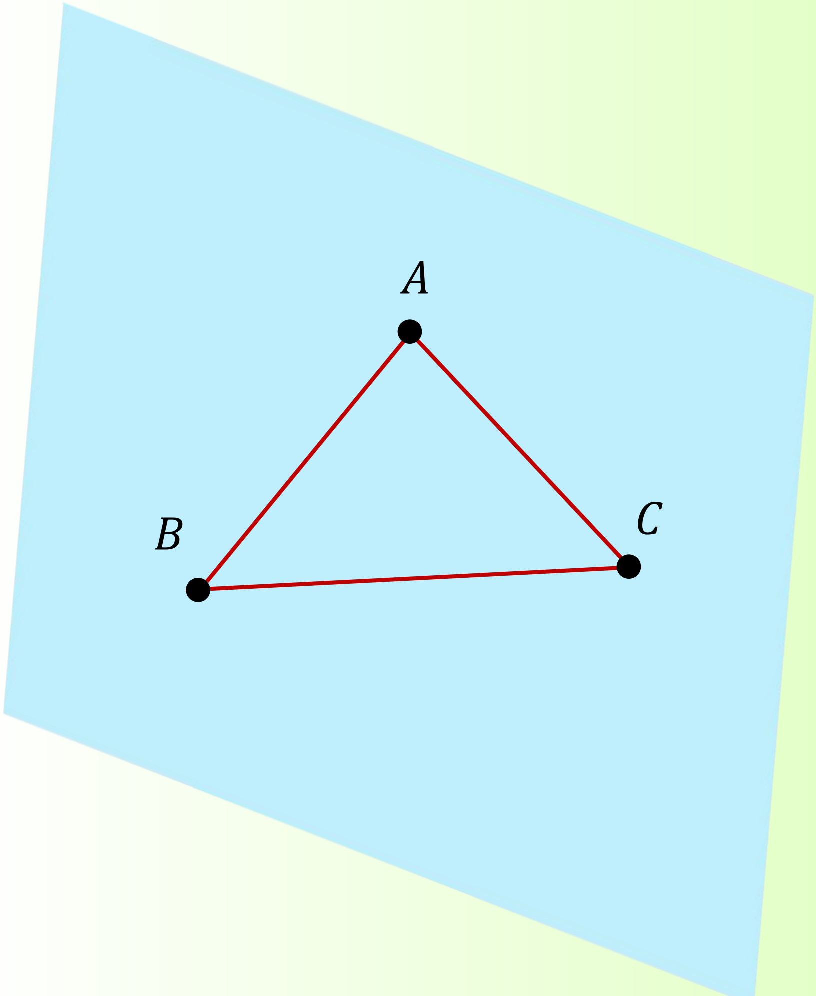


Решение:
а) $AB \subset (ABC)$, $AB \subset (ABD)$
б) $F \in (ABC)$, $F \in (BCD)$
в) $C \in (ABC)$, $C \in (BCD)$, $C \in (ACD)$

Задача 2

Дано: *A, B, C*
AB, BC, AC
Доказать *что отрезки AB, AC, BC лежат в одной плоскости*
Доказательство:
Проведём через точки A, B, C плоскость (ABC)
Прямая $AB \subset (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *отрезок* $AB \subset (ABC)$
$AC, BC \subset (ABC)$

Что и требовалось доказать



В стереометрии мы будем рассматривать ситуации, задающие различные расположения в пространстве основных фигур относительно друг друга

Определите: верно, ли суждение?

1. Любые три точки лежат в одной плоскости. **ДА**
2. Любые четыре точки лежат в одной плоскости. НЕТ
3. Любые четыре точки не лежат в одной плоскости. НЕТ
4. Через любые три точки проходит плоскость и при том только одна. НЕТ
5. Если прямая пересекает 2 стороны треугольника, то она лежит в плоскости треугольника. **ДА**
6. Если прямая проходит через вершину треугольника, то она лежит в плоскости треугольника. НЕТ
7. Если прямые не пересекаются, то они параллельны. НЕТ
8. Если плоскости не пересекаются, то они параллельны. **ДА**

Аксиомы стереометрии

Слово «***аксиома***» греческого происхождения и в переводе означает истинное, исходное положение теории.

!

Определение

Аксиома *– это утверждение не требующее доказательства.*

Аксиомы стереометрии *– утверждения о свойствах геометрических тел, принимаемые в качестве исходных положений, на основе которых доказываются все теоремы и вообще строится вся геометрия.*

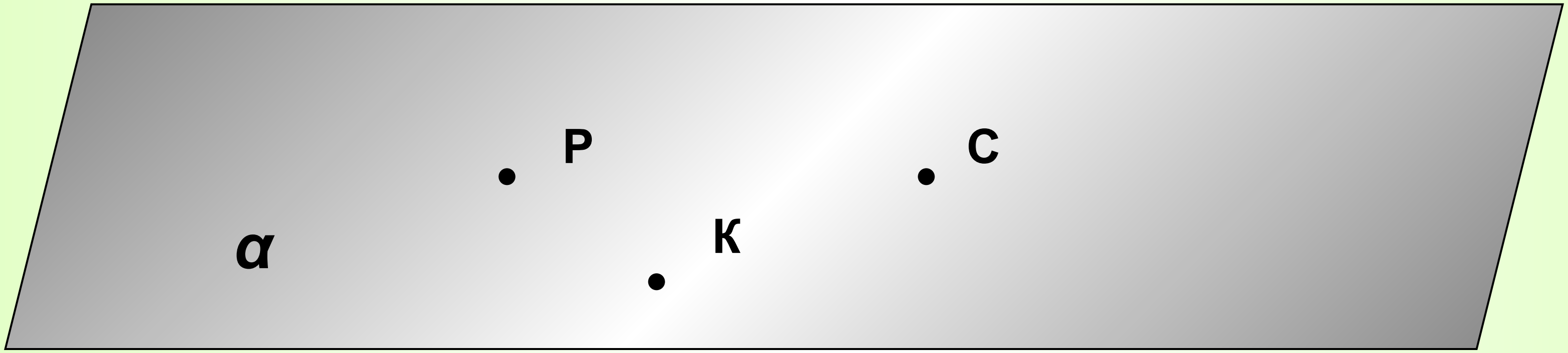
Система аксиом стереометрии дает описание свойств пространства и основных его элементов

Понятия «***точка***», «***прямая***», «***плоскость***», «***расстояние***» принимаются без определений: их описание и свойства содержатся в аксиомах

Аксиомы стереометрии

А-1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой проходит плоскость, и притом только одна

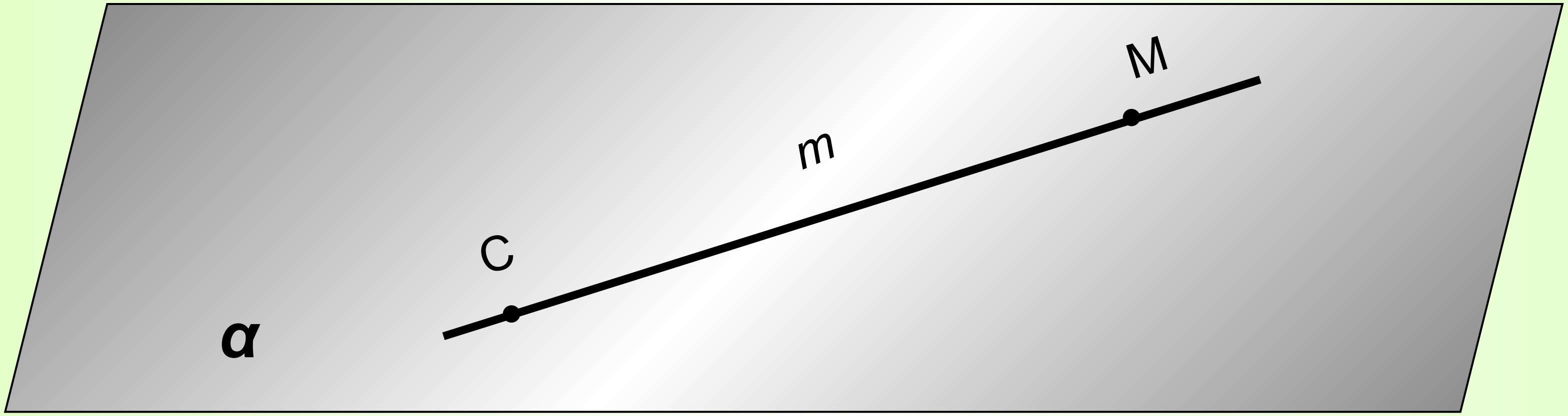


α = (РКС)

Аксиомы стереометрии

А-2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

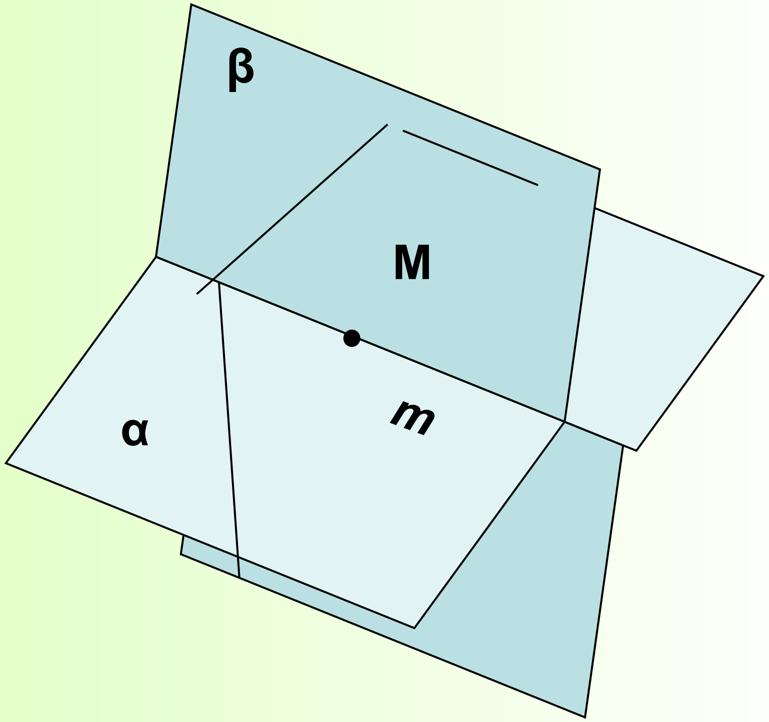


Если $M, C \in \alpha$ $M, C \in m$, **то** $m \subset \alpha$

Аксиомы стереометрии

А-3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$M \in \alpha$, $M \in \beta$, $M \in m$

⇓

$m \in \alpha$, $m \in \beta$

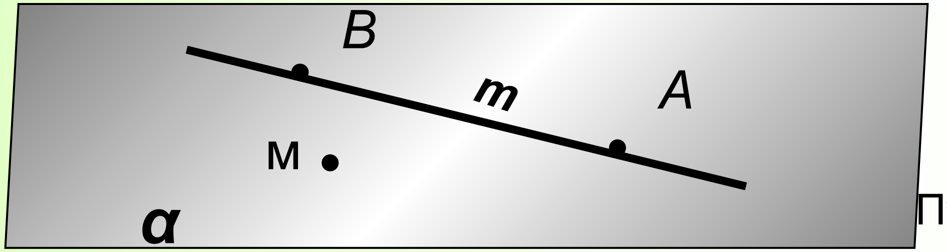
⇓

$\alpha \cap \beta = m$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Т-1

Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.



<u>Дано</u>: М∉*m*

<u>Доказательство</u>

Пусть точки ***А, В* ∈ *m.***

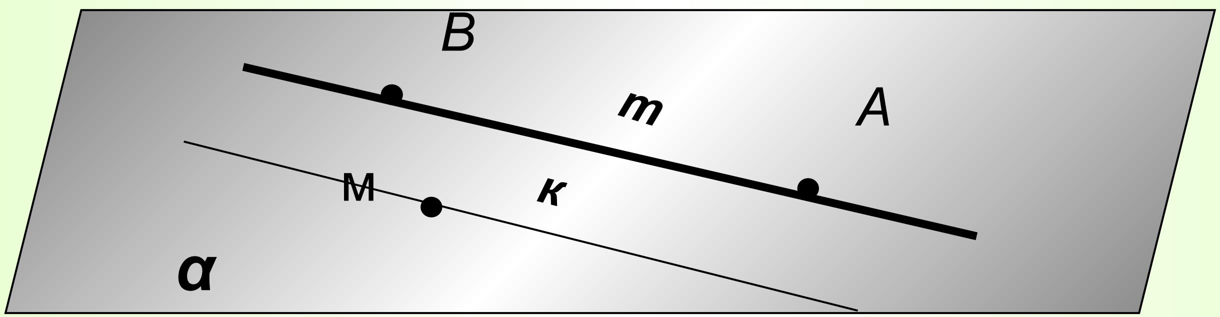
- Так как **М∉*m***, то точки ***А, В и М*** не принадлежат одной прямой.
  По А-1 через точки ***А, В и М*** проходит только одна плоскость — плоскость ***(АВМ)***,
  Обозначим её ***α.*** Прямая ***m*** имеет с ней две общие точки — точки ***А*** и ***В***, следовательно, по аксиоме А-2 эта прямая лежит в плоскости ***α***..
  Таким образом, плоскость ***α*** проходит через прямую ***m*** и точку ***М*** и является искомой.

- Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую ***m*** и точку ***М***, не существует.
  Предположим, что есть другая плоскость — ***β***, проходящая через прямую ***m*** и точку ***М***.
  Тогда плоскости ***α*** и ***β*** проходят через точки ***А, В*** и ***М***, не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость ***α*** единственна.

- Теорема доказана

СЛЕДСТВИЕ ИЗ Т-1

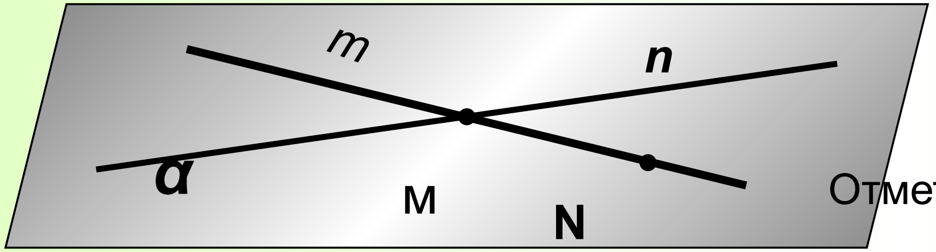
Через две ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Т-2

Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано: $m \cap n = M$

Доказательство

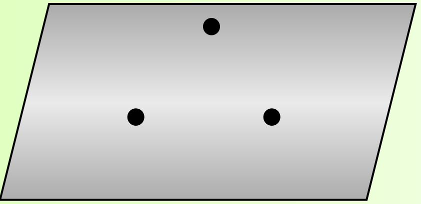
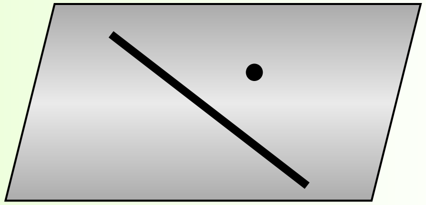
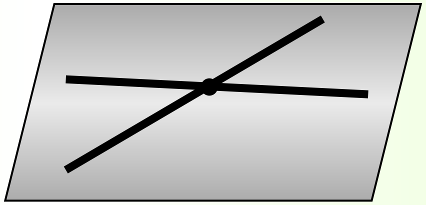
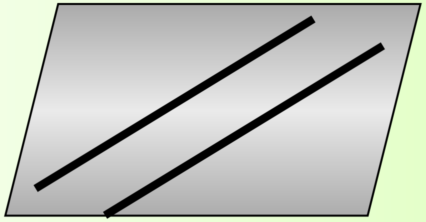
Отметим на прямой ***m*** произвольную точку **N**, отличную от **M.**

- Рассмотрим плоскость ***α*** **=(n, N).** Так как ***M∈ α*** и ***N∈α,*** то по А-2 ***m ⊂ α.*** Значит обе прямые ***m, n*** лежат в плоскости ***α*** и следовательно ***α,*** является искомой
- Докажем единственность плоскости ***α.*** Допустим, что есть другая, отличная от плоскости ***α*** и проходящая через прямые ***m*** и ***n,*** плоскость ***β.***
  Так как плоскость ***β*** проходит через прямую ***n*** и не принадлежащую ей точку ***N,*** то по Т-1 она совпадает с плоскостью ***α.*** Единственность плоскости ***α*** доказана.
- Теорема доказана

ВЫВОД

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

- По трем точкам, не лежащим на одной прямой
- По прямой и точке, не лежащей на этой прямой
- По двум пересекающимся прямым
- По двум параллельным прямым

Задача 3

Дано: *ABCD – тетраэдр;*

PE, MK, EC – прямые;

Назвать:

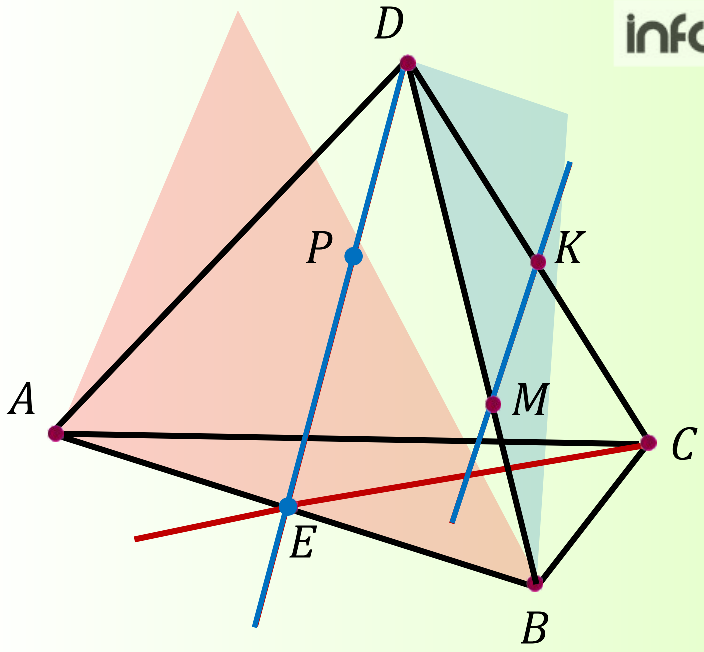
а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC;
б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB;

Решение:

а)

$\left.\begin{array}{l} P \in ABD; \\ E \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow PE \in ABD;$

$\left.\begin{array}{l} M \in ABD; \\ K \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow MK \in ABD;$



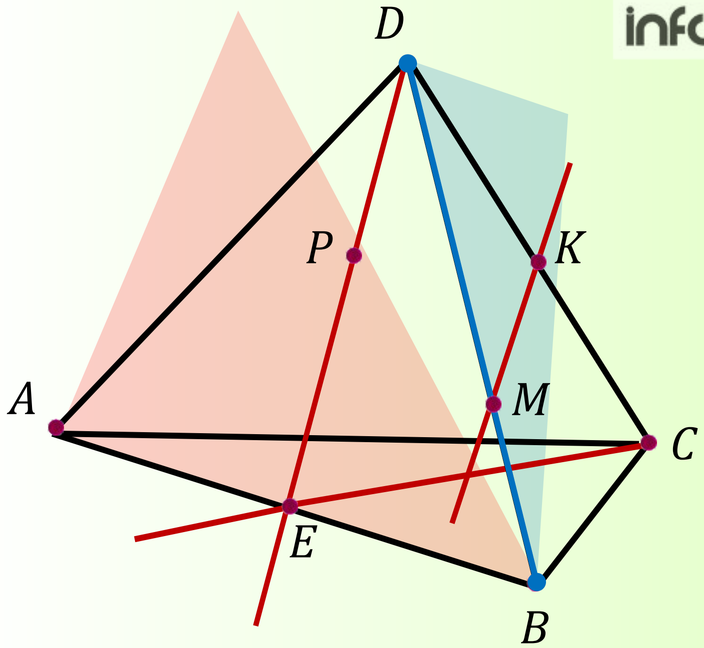
Задача 3

Дано: *ABCD – тетраэдр;*

PE, MK, EC – прямые;

Назвать:

а) плоскости, в которых лежат прямые
PE, MK, DB, AB, EC;
б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC,
прямой CE с плоскостью ADB;



Решение:

а)

$\left.\begin{array}{l} P \in ABD; \\ E \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow PE \in ABD;$

$\left.\begin{array}{l} M \in ABD; \\ K \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow MK \in ABD;$

$\left.\begin{array}{ll} D \in ABD; & D \in BCD; \\ B \in ABD; & B \in BCD; \end{array}\right] \Rightarrow BD \in ABD,\ BD \in BCD;$

Задача 3

Дано: *ABCD – тетраэдр;*

PE, MK, EC – прямые;

Назвать:

а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC;
б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB;

Решение:

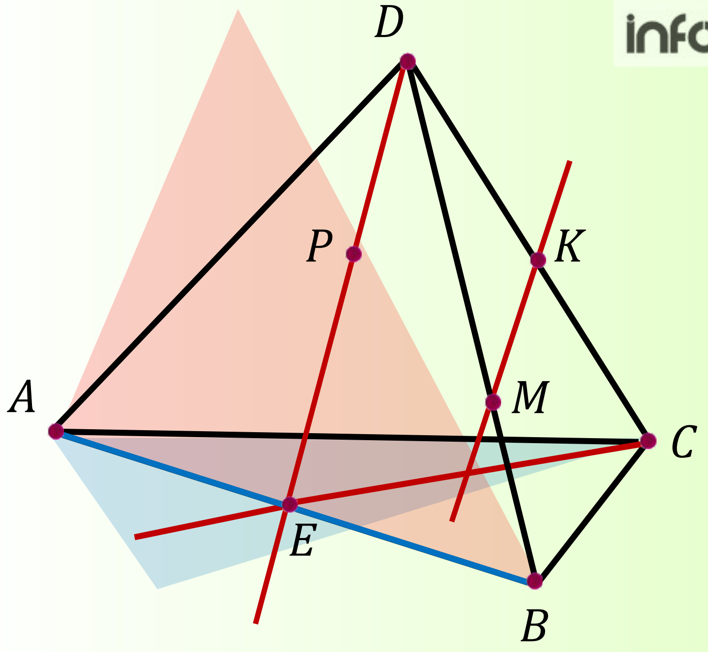
а)

$\left.\begin{array}{l} P \in ABD; \\ E \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow PE \in ABD;$

$\left.\begin{array}{l} M \in ABD; \\ K \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow MK \in ABD;$

$\left.\begin{array}{ll} D \in ABD; & D \in BCD; \\ B \in ABD; & B \in BCD; \end{array}\right] \Rightarrow BD \in ABD, BD \in BCD;$

$\left.\begin{array}{ll} A \in ABD; & A \in ABC; \\ B \in ABD; & B \in ABC; \end{array}\right] \Rightarrow AB \in ABD, AB \in ABC;$



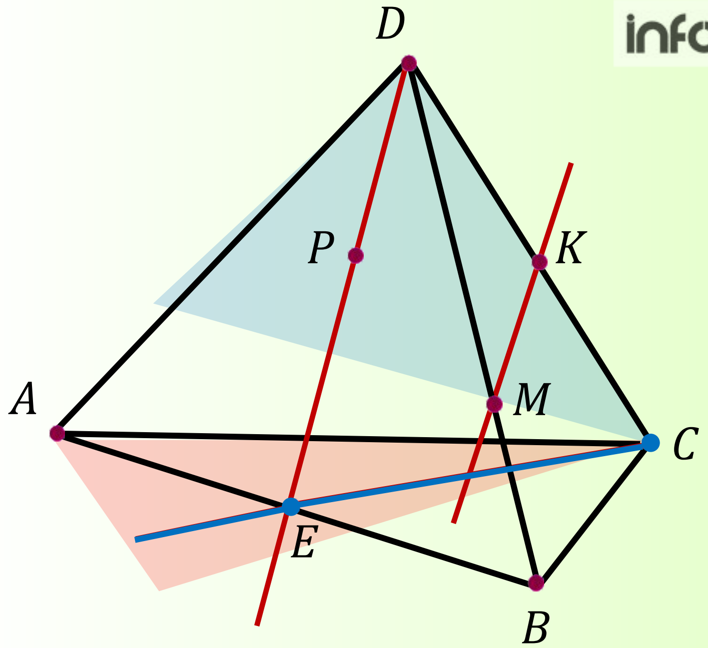
Задача 3

Дано: *ABCD – тетраэдр;*

PE, MK, EC – прямые;

Назвать:

а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC;
б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB;



Решение:

а)

$\left.\begin{array}{l} P \in ABD; \\ E \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow PE \in ABD;$ $\left.\begin{array}{l} M \in ABD; \\ K \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow MK \in ABD;$

$\left.\begin{array}{ll} D \in ABD; & D \in BCD; \\ B \in ABD; & B \in BCD; \end{array}\right] \Rightarrow BD \in ABD, BD \in BCD;$

$\left.\begin{array}{ll} A \in ABD; & A \in ABC; \\ B \in ABD; & B \in ABC; \end{array}\right] \Rightarrow AB \in ABD, AB \in ABC;$

$\left.\begin{array}{ll} E \in ABC; & E \in CDE; \\ C \in ABC; & C \in CDE; \end{array}\right] \Rightarrow EC \in ABC, AB \in CDE;$

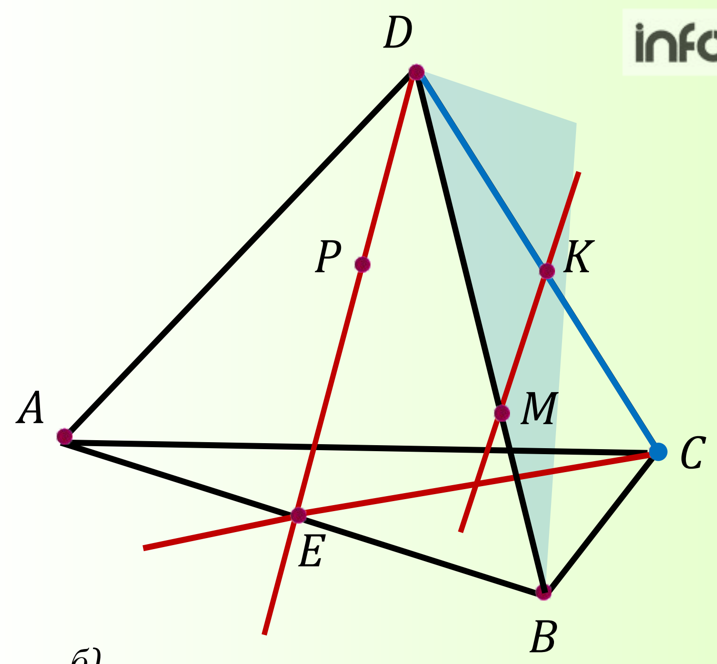
Задача 3

Дано: *ABCD – тетраэдр;*

PE, MK, EC – прямые;

Назвать:

а) плоскости, в которых лежат прямые
PE, MK, DB, AB, EC;
б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC,
прямой CE с плоскостью ADB;



Решение:

а)

$\left.\begin{array}{l} P \in ABD; \\ E \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow PE \in ABD;$

$\left.\begin{array}{l} M \in ABD; \\ K \in ABD; \end{array}\right] \Rightarrow MK \in ABD;$

$\left.\begin{array}{ll} D \in ABD; & D \in BCD; \\ B \in ABD; & B \in BCD; \end{array}\right] \Rightarrow BD \in ABD, BD \in BCD;$

$\left.\begin{array}{ll} A \in ABD; & A \in ABC; \\ B \in ABD; & B \in ABC; \end{array}\right] \Rightarrow AB \in ABD, AB \in ABC;$

$\left.\begin{array}{ll} E \in ABC; & E \in CDE; \\ C \in ABC; & C \in CDE; \end{array}\right] \Rightarrow EC \in ABC, AB \in CDE;$

б)

$\left.\begin{array}{l} C \in DK; \\ C \in ABC; \end{array}\right] \Rightarrow DK \cap ABC = C;$

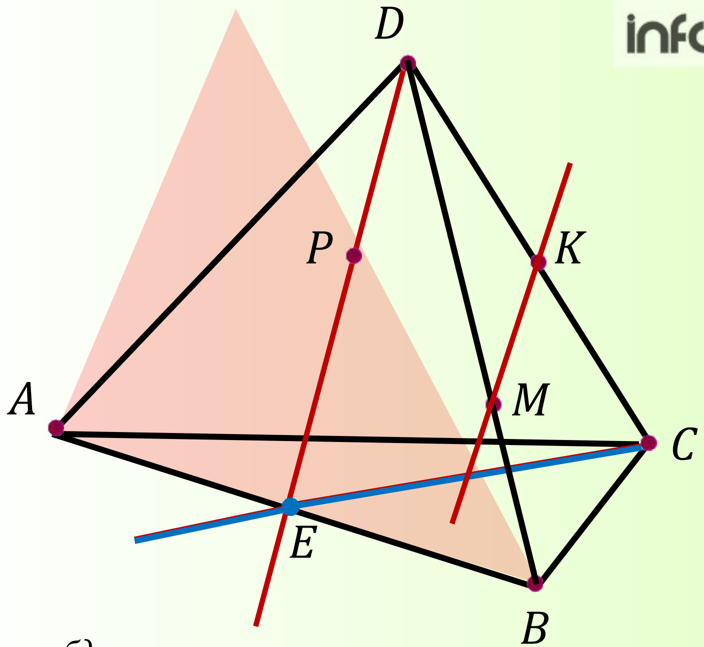
Задача 3

Дано: *ABCD – тетраэдр;*

PE, MK, EC – прямые;

Назвать:

а) плоскости, в которых лежат прямые
PE, MK, DB, AB, EC;
б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC,
прямой CE с плоскостью ADB;



Решение:

а)

$\left.\begin{matrix} P \in ABD; \\ E \in ABD; \end{matrix}\right] \Rightarrow PE \in ABD;$

$\left.\begin{matrix} M \in ABD; \\ K \in ABD; \end{matrix}\right] \Rightarrow MK \in ABD;$

$\left.\begin{matrix} D \in ABD; & D \in BCD; \\ B \in ABD; & B \in BCD; \end{matrix}\right] \Rightarrow BD \in ABD,\ BD \in BCD;$

$\left.\begin{matrix} A \in ABD; & A \in ABC; \\ B \in ABD; & B \in ABC; \end{matrix}\right] \Rightarrow AB \in ABD,\ AB \in ABC;$

$\left.\begin{matrix} E \in ABC; & E \in CDE; \\ C \in ABC; & C \in CDE; \end{matrix}\right] \Rightarrow EC \in ABC,\ AB \in CDE;$

б)

$\left.\begin{matrix} C \in DK; \\ C \in ABC; \end{matrix}\right] \Rightarrow DK \cap ABC = C;$

$\left.\begin{matrix} E \in CE; \\ E \in ABD; \end{matrix}\right] \Rightarrow DK \cap ABC = C;$

Задача 4

Дано:
A, B, C, D – не лежат в одной плоскости

Найти:
Могут ли 3 из них лежать на одной прямой?

Решение.

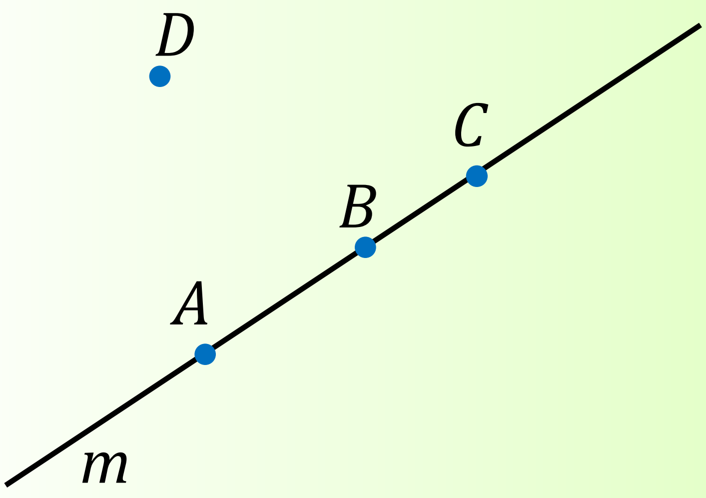
Пусть: $\left.\begin{array}{l}(A, B, C) \in m; \\ D \notin m;\end{array}\right]$

$\exists \alpha: (A, C, D) \in \alpha$ **(аксиома А1)**

$\left.\begin{array}{l}A \in \alpha \\ C \in \alpha\end{array}\right] \Rightarrow B \in \alpha$ **(аксиома А2)**

$(A, B, C, D) \in \alpha;$

Ответ: *Нет.*



Задача 5

Дано:

$(A,B,C) \in m$

Доказать:

$\exists \alpha: (A,B,C) \in \alpha$

Найти: *Количество плоскостей*

Решение.

Пусть: $D \notin m$;

$\exists \alpha: (A,C,D) \in \alpha$ **(аксиома 1)**

$(A, C) \in \alpha \Rightarrow B \in \alpha$ **(аксиома 2)** $\Rightarrow$

$\Rightarrow (A,B,C,D) \in \alpha$;

Плоскость α – *искомая плоскость.*

Т.к. **D – произвольная точка,** *то таких плоскостей бесконечное множество.*

Ответ: *бесконечное множество.*