



**Розділ 9
ПОШИРЕННЯ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ
ХВИЛЬ НАД ПЛАСКОЮ
ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНОЮ
ПОВЕРХНЕЮ**

LOGO

Зміст

9.1 Загальні поняття

9.1.1 Типи хвиль

9.1.2 Поняття рухомої та стоячої хвилі

9.1.3 Фазова та групова швидкості

9.2 Структура е/м поля над ідеальною провідною поверхнею

9.2.1 Вектор E перпендикулярний до площини падіння

9.2.2 Вектор E паралельний площині падіння

9.3 Висновки

9.1 Загальні поняття

9.1.1 Типи хвиль

Як відомо (підрозділ 6.2), електромагнітні хвилі можна розділити на дві групи. До першої групи належать ті, що мають лише *поперечні* складники – це пари: $E_x - H_y$ і $E_y - H_x$, а *поздовжні* відсутні. Оскільки є лише *поперечні* складники, то така хвиля має назву хвиля *типу T*, або *поперечна електромагнітна (TEM)*.

Однак, як випливає з рівнянь Максвелла, в замкненому просторі можуть існувати і хвилі іншої групи, тобто хвилі, до складу яких входять складники H_z та E_z : якщо $H_z \neq 0$, але $E_z = 0$, або якщо $E_z \neq 0$, але $H_z = 0$. Ці хвилі, відповідно, мають назву *поздовжні хвилі типу H*, або *поперечно-електричні (TE)* та *поздовжні хвилі типу E*, або *поперечно-магнітні (TM)*.

Нижче покажемо, яким чином поширюються електромагнітні хвилі над ідеально-провідною поверхнею з урахуванням граничних умов.

Щоб навчитись побудувати структуру поля хвилі будь-якого порядку доцільно починати з хвиль *найпростіших типів*: H_{10} , H_{11} , E_{11} . Для цього необхідно дотримуватись таких правил:

– на стінках хвилеводу завжди виконуються граничні умови:

$$E_{\tau} = 0, E_n \neq 0, H_{\tau} \neq 0, H_n = 0;$$



9.1.2 Поняття рухомої та нерухомої хвилі

- Нехай на ідеально провідну поверхню (глибина проникнення рівна нескінченності) падає однорідна *пласка поперечна* хвиля (хвиля типу T). Падаюча хвиля повністю відіб'ється.

$$\text{Результуючий вектор: } \vec{\Pi}_{\text{рез}} = \vec{\Pi}_{\text{пад}} + \vec{\Pi}_{\text{від}} \quad (9.1)$$

- Із зміною кута падіння φ змінюється розподіл складників енергії електромагнітного поля:

$$\vec{\Pi}_{\text{пад}} = -i\vec{\Pi}_{\text{пад}} + k\vec{\Pi}_{\text{пад}} \quad (9.2)$$

$$\vec{\Pi}_{\text{від}} = i\vec{\Pi}_{\text{від}} + k\vec{\Pi}_{\text{від}} \quad (9.2a)$$

- Режим, за якого є перенесення енергії – *хвильовий режим* (рухома хвиля), а режим, за якого немає перенесення енергії – *коливальний режим* (стояча хвиля).

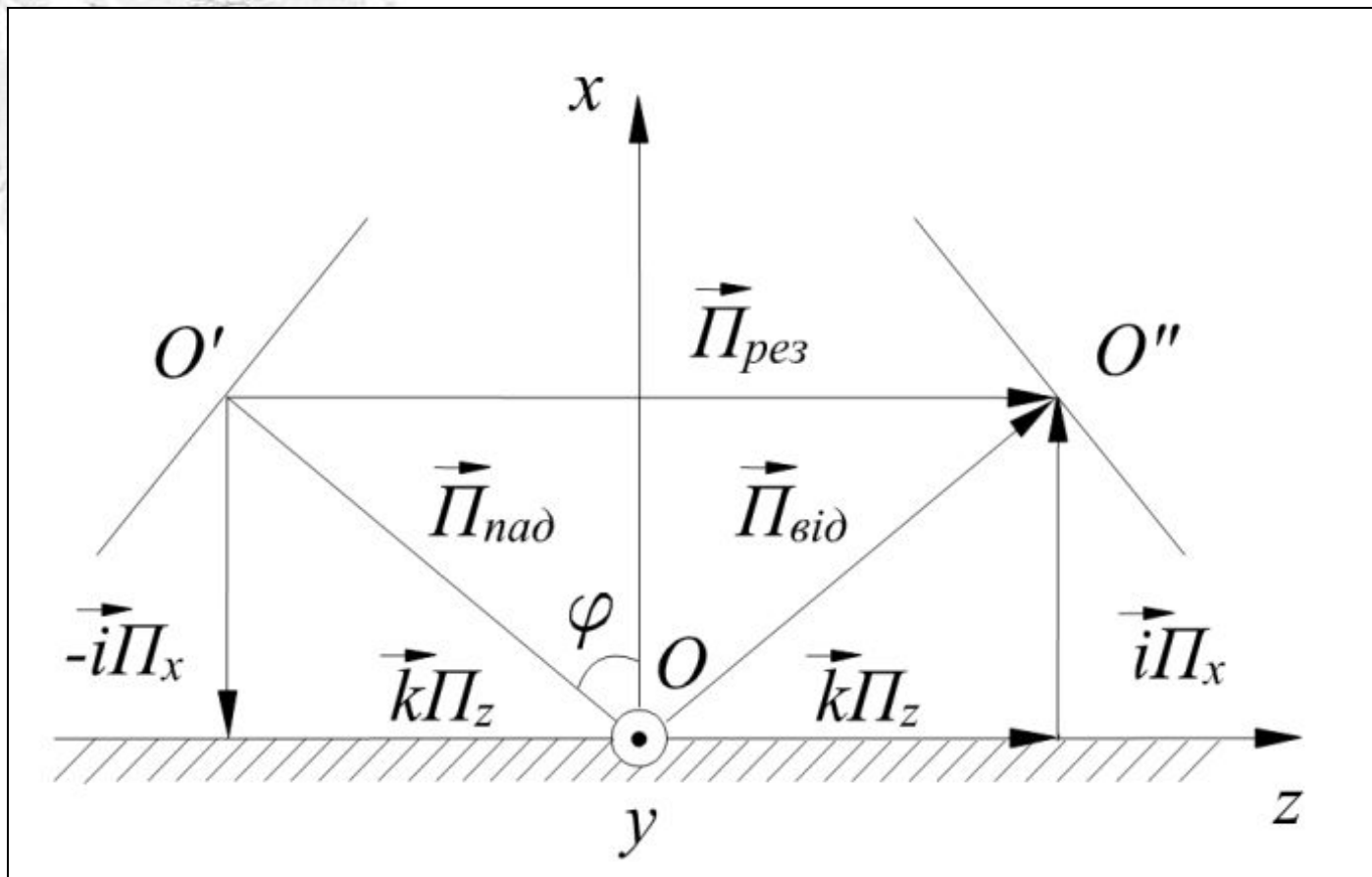
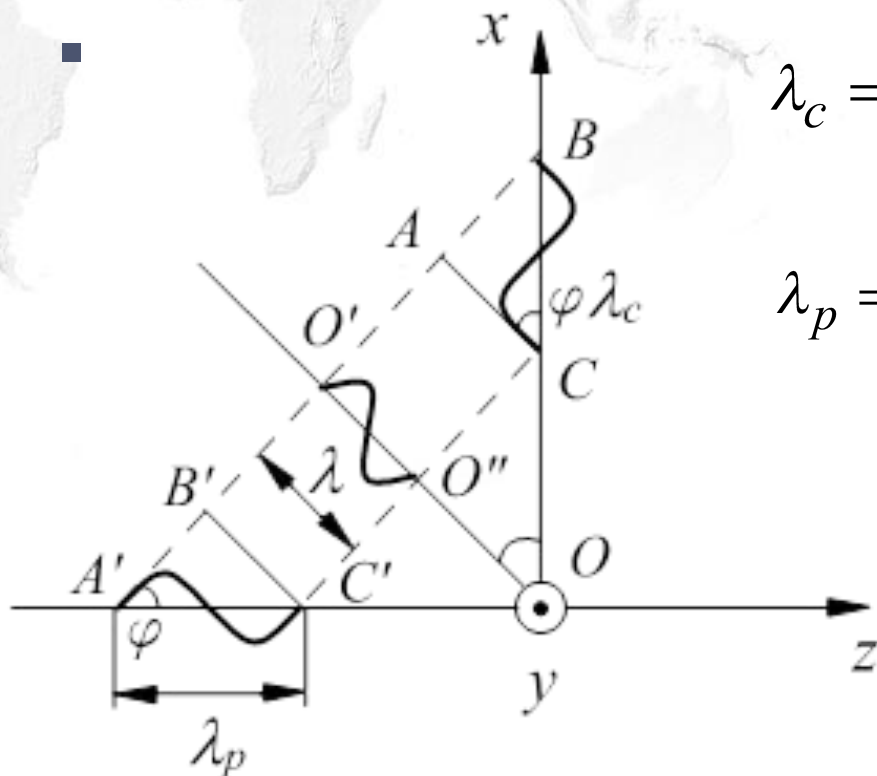


Рисунок 9.1. Процес похилого падіння електромагнітної хвилі на ідеально-провідну поверхню



Зв'язок між довжиною хвилі та її стоячою та рухомою складовою



$$\lambda_c = \frac{\lambda}{\cos \varphi} \quad (9.3)$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\sin \varphi} \quad (9.4)$$

Отже, якщо $\varphi = 0$, то рухомої хвилі. Якщо $\varphi = 90$, то немає стоячої хвилі.

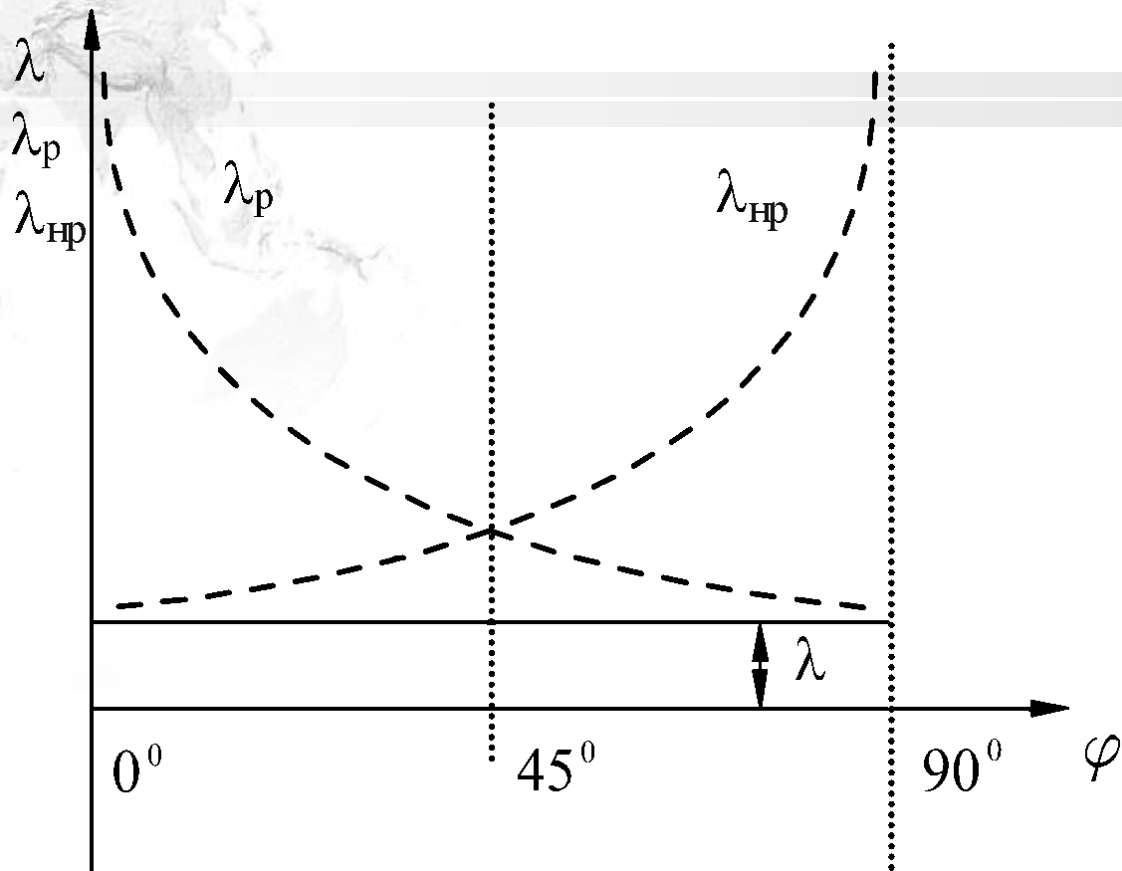


Рисунок 9.2. Залежності довжин хвиль від кута падіння

9.1.3. Фазова та групова швидкості

Нехай у момент t фронт хвилі, що падає, є у точці O' , а через інтервал Δt – O'' (рис. 9.3). Згідно визначенню, фронт однорідної плоскої хвилі є поверхнею однакових фаз. Тому переміщення фронту хвилі еквівалентно переміщенню деякого фазового стану з точки O' , в точку O'' зі швидкістю у діелектрику $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$.

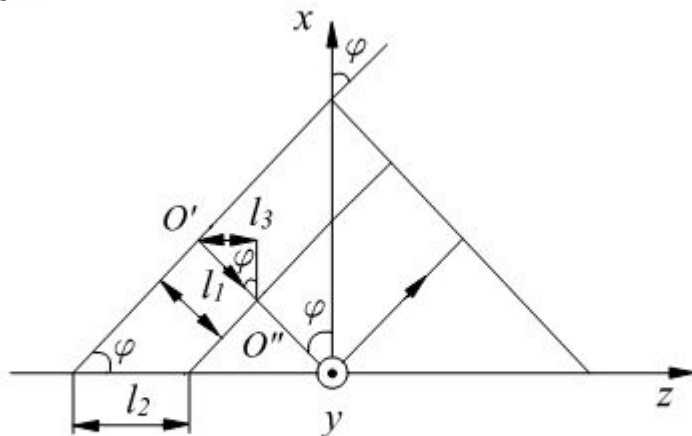


Рисунок 9.3. До визначення понять швидкостей електромагнітної хвилі



З рис. 9.3 випливає, що ця швидкість є *швидкістю фронту хвилі*, яку визначає формула:

$$v_{\dot{\varphi}\varphi} = \frac{l_1}{\Delta t}. \quad (9.5)$$

Оскільки отримана хвиля зміщується вздовж осі z , знаходимо швидкість зміщення фазового фронту хвилі в цьому напрямі – тобто *фазову швидкість*:

$$v_{\dot{\varphi}s} = \frac{l_2}{\Delta t} = \frac{l_1}{\Delta t} \frac{l_2}{l_1} = \frac{v_{\dot{\varphi}\varphi}}{\sin \varphi}. \quad (9.6)$$



З'ясуємо дві ситуації: кут $\varphi = 0$, тоді – фронт хвилі «пласко» падає на площину, тобто дотикається до неї всіма точками та $\varphi = \pi/2$ – фронт хвилі рухається вздовж площини, а фазовий стан у довільній точці на площині змінюється зі швидкістю світла (у вільному просторі).

Визначимо швидкість руху енергії, яка має назву *групова швидкість*. Нехай в момент t в точці O' маємо певний запас енергії. За проміжок часу Δt ця енергія зміститься в точку O'' вздовж осі z зі швидкістю:

$$v_{\text{грп}} = \frac{l_3}{\Delta t} = \frac{l_1}{\Delta t} \frac{l_3}{l_1} = v_{\text{фр}} \sin \varphi . \quad (9.7)$$

Ця швидкість не перевищує швидкість світла. Залежності значень швидкостей $v_{\text{фр}}$, $v_{\text{фз}}$, $v_{\text{грп}}$ від кута падіння φ наведено на рис. 9.5.

З (9.6) та (9.7) маємо:

$$v_{\text{фз}} v_{\text{грп}} = v_{\text{фр}}^2 . \quad (9.8)$$

Таким чином, у напівобмеженому просторі електромагнітну хвилю характеризують три швидкості: *фронту*, *фази* та *групова*. У вільному

просторі $v_{\text{фр}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

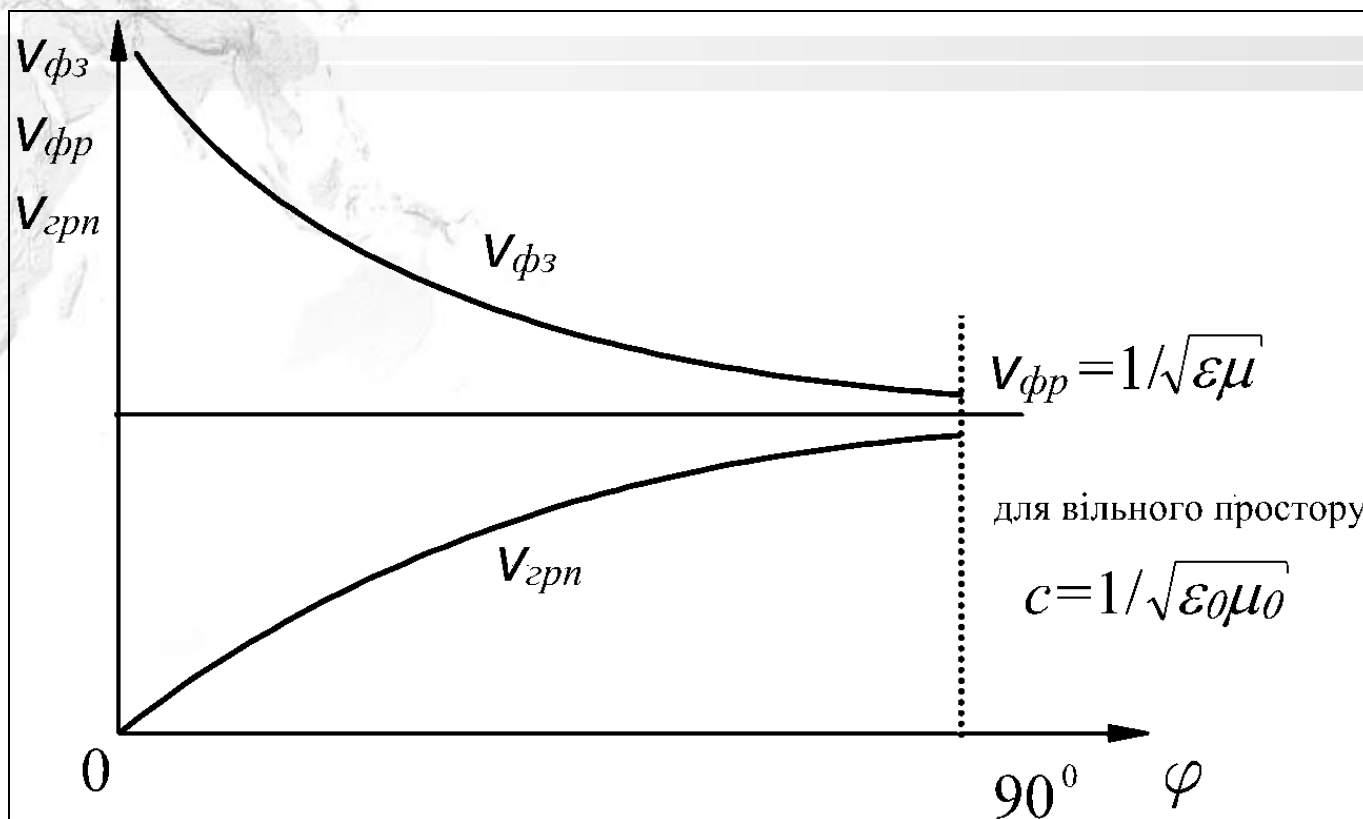


Рисунок 9.4. Залежність швидкостей $v_{\phi z}, v_{grp}, v_{\phi p}$ від кута падіння ϕ

9.2. Структура електромагнітного поля над ідеальною провідною поверхнею

Поняття «структура поля» визначає сукупність у просторі векторів \vec{E} та \vec{H} сформованої хвилі. Необхідно з'ясувати структуру поля електромагнітної хвилі для двох ситуацій:

- вектор \vec{E} хвилі, що падає, перпендикулярний площині падіння;
- вектор \vec{E} хвилі, що падає, паралельний площині падіння.

9.2.1. Вектор E перпендикулярний до площини падіння

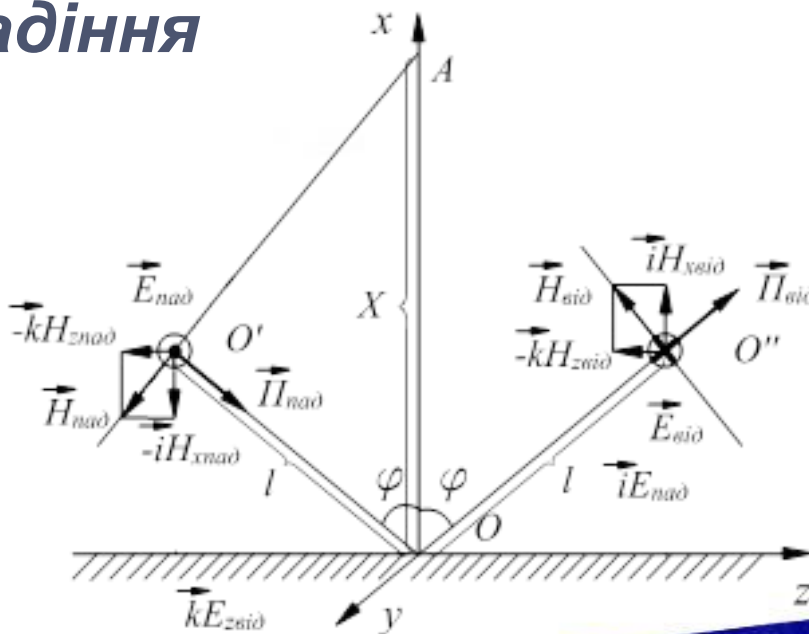


Рисунок 9.5. Складові поля за умови, якщо вектор E перпендикулярний до площини падіння

Взаємна орієнтація векторів хвилі, що падає є:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{j}E_{y \text{ пад}} , \quad (9.9)$$

$$\vec{H}_{\text{пад}} = -\vec{i}H_{x \text{ пад}} - \vec{k}H_{z \text{ пад}} . \quad (9.10)$$

На підставі граничних умов, з урахуванням того, що на поверхні ідеального провідника $E_{\tau} = 0$ маємо:

$$E_{y \text{ пад}} + E_{y \text{ від}} = 0 , \quad (9.11)$$

$$E_{y \text{ пад}} = -E_{y \text{ від}} . \quad (9.11a)$$

Знак «мінус» в (9.11a) означає, що напрям відбитого вектора $\vec{E}_{\text{від}}$ змінюється на протилежний.

Відповідно до напрямку вектора Пойнтінга $\vec{\Pi}_{\text{від}}$ запишемо $\vec{H}_{\text{від}}$.

$$\vec{H}_{\text{від}} = \vec{i}H_{x \text{ від}} - \vec{k}H_{z \text{ від}} . \quad (9.12)$$

Отримане в результаті значення $E_{y\text{рез}}$, визначимо, додаванням миттєвих значень відповідних проекцій хвилі, що падає та відбитої хвилі. Нехай у точці $x=0$ маємо:

$$E_{y\text{пад}} = E_{m,y} \cos \omega t \quad , \quad (9.13)$$

$$E_{y\text{від}} = -E_{m,y} \cos \omega t \quad (9.13a)$$

Тоді, в точках O та O' відповідно:

$$E_{y\text{пад}}(O) = E_{m,y} \cos(\omega t + \beta l) \quad , \quad (9.14)$$

$$E_{y\text{від}}(O') = -E_{m,y} \cos(\omega t - \beta l) \quad . \quad (9.15)$$

Напруженість E у довільній точці визначимо додаванням (9.14) та (9.15). Нагадаємо: $A[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] = -2A \sin \alpha \sin \beta$. Тоді:

$$E_{y\text{рез}} = -2E_{m,y} \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \sin \omega t \quad . \quad (9.16)$$

Із урахуванням, що $l = x \cos \varphi$, маємо:

$$E_{y\text{рез}} = -2E_{m,y} \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin \omega t \quad . \quad (9.16a)$$



Звернемось до співмножника, що не залежить від часу – він визначає амплітуду:

$$E_{y \max} = -2E_m \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \quad (9.17)$$

Таким чином, амплітуда поля залежить від координати x . На осі x існують точки, де $E_{y \max} = 0$, що мають назву *вузли*, та *пучності* – $E_{y \max} = 2E_m$, тобто вздовж осі x сформована нерухома хвиля (рис. 9.6).

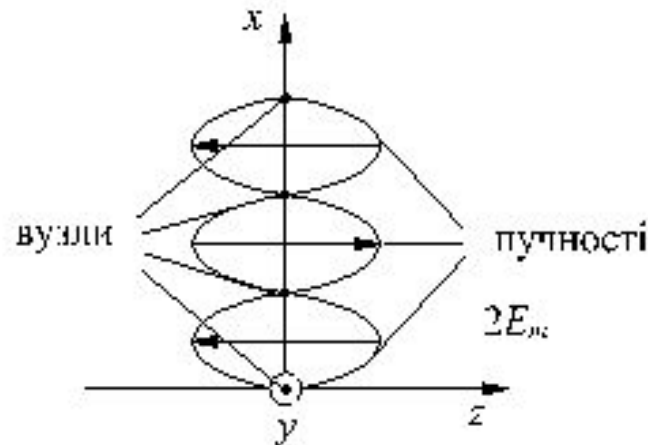


Рисунок 9.6. Ілюстрація напруженості поля у формі нерухомої хвилі



Вузли напруженості поля ϵ за умов $(2\pi \cos \varphi) \frac{x_n}{\lambda} = n\pi$, де $n=0, 1, 2, 3, \dots$, тобто

$$x_n = \frac{n\lambda}{2 \cos \varphi} . \tag{9.18}$$

Довжина нерухомої хвилі – див. формулу 9.3.

Для визначення складників вектора \vec{H} можна двома способами:

- виконати усі операції, як із вектором \vec{E} ;
- використати співвідношення між \vec{E} та \vec{H} через хвильовий імпеданс.

Скористаємось останнім; з урахуванням, що середовище – вільний простір, для якого хвильовий імпеданс – активний: $Z_w^\circ = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi$.

Визначимо співвідношення між складниками E_y та H_x .

$$\frac{E_{y \text{ пар}}}{H_{x \text{ пар}}} = \frac{E_{\text{пар}}}{-H_{\text{пар}} \sin \varphi} = \frac{-Z_w^\circ}{\sin \varphi} = -R_{\text{ек}} , \tag{9.19}$$



З (9.19) та (9.19а), якщо вважати, що R_{ch} – дійсна додатна величина (за умов вільного простору), впливає, що поперечні складники електричного та магнітного полів хвилі, що падає, та відбитої, однакові, тобто змінюються за тим самим законом.

Тоді:

$$\begin{aligned} H_{x\text{рез}} &= -\frac{E_{y\text{рез}}}{R_{ch}} = 2 \frac{E_m}{R_{ch}} \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t = \\ &= 2 \frac{E_m}{Z_w} \sin\varphi \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t = \\ &= 2H_m \sin\varphi \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t = \\ &= 2H_{mz} \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda} x\right) \sin\omega t \end{aligned} \quad (9.20)$$

Визначимо $H_{z\text{рез}}$ на підставі граничних умов для тангенціальних складників вектора \vec{H} на межі розподілу з ідеальним провідником. Як видно з рис. 9.6 тангенціальний складник після відбиття не змінюється, тобто:

$$\begin{aligned}
 H_{z \text{ рез}} &= -2H_m \cos \varphi \cos\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin \omega t, \\
 &= -2H_{mz} \cos\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{9.21}$$

У співвідношеннях між E та H для будь-якої точки поля вздовж осі z для конкретного значення координати маємо додатковий зсув за фазою $\beta z = 2\pi z / \lambda$.

Запишемо співвідношення (9.16а), (9.20), (9.21) з урахуванням додаткового зсуву за фазою таким чином:

$$E_{y \text{ рез}} = -2H_{m y} \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t - \beta z); \tag{9.22}$$

$$H_{x \text{ рез}} = 2H_{m x} \sin\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t - \beta z); \tag{9.23}$$

$$H_{z \text{ рез}} = -2H_{m z} \cos\left(\frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda} x\right) \cos(\omega t - \beta z) \tag{9.24}$$



Формуємо структуру поля в момент $t=0$. Для цього виконуємо таке:

1) приймаємо за основу формули складових поля уздовж осей x та z (9.22...9.24);

2) умовно визначаємо знаки співмножників уздовж осей x та z з урахуванням знаків в формулах (9.22...9.24) аргументу $(\omega t - \beta z)$:

	x	z
E_y	-	-
H_x	+	-
H_z	-	+

3) починаємо укладення структури поля з осі z : $E_y(z), H_x(z), H_z(z)$ (рис. 9.8а);

4) наводимо $E_y(x), H_x(x), H_z(x)$ вздовж осі x (рис. 9.8б);

5) перемножуємо складники: $E_y(x)E_y(z)$; $H_x(x)H_x(z)$; $H_z(x)H_z(z)$ та наводимо зорієнтовані криві на рис. 9.8в;

6) перша перевірка – лінії вектора \vec{H} замкнені, друга перевірка – лінії вектора \vec{H} спрямовані вздовж межі – є дотичними;

7) наводимо вектори \vec{H} так само: вони є в площині, що перпендикулярна площині аркуша (рис. 9.8в).



Формулюємо висновок: оскільки в результаті силові лінії напруженості магнітного поля мають складники H_x та H_z то з хвилі типу T , сформовано поздовжню хвилю типу H , або поперечну електричну хвилю – типу TE , якщо вектор \vec{E} перпендикулярний площини падіння.

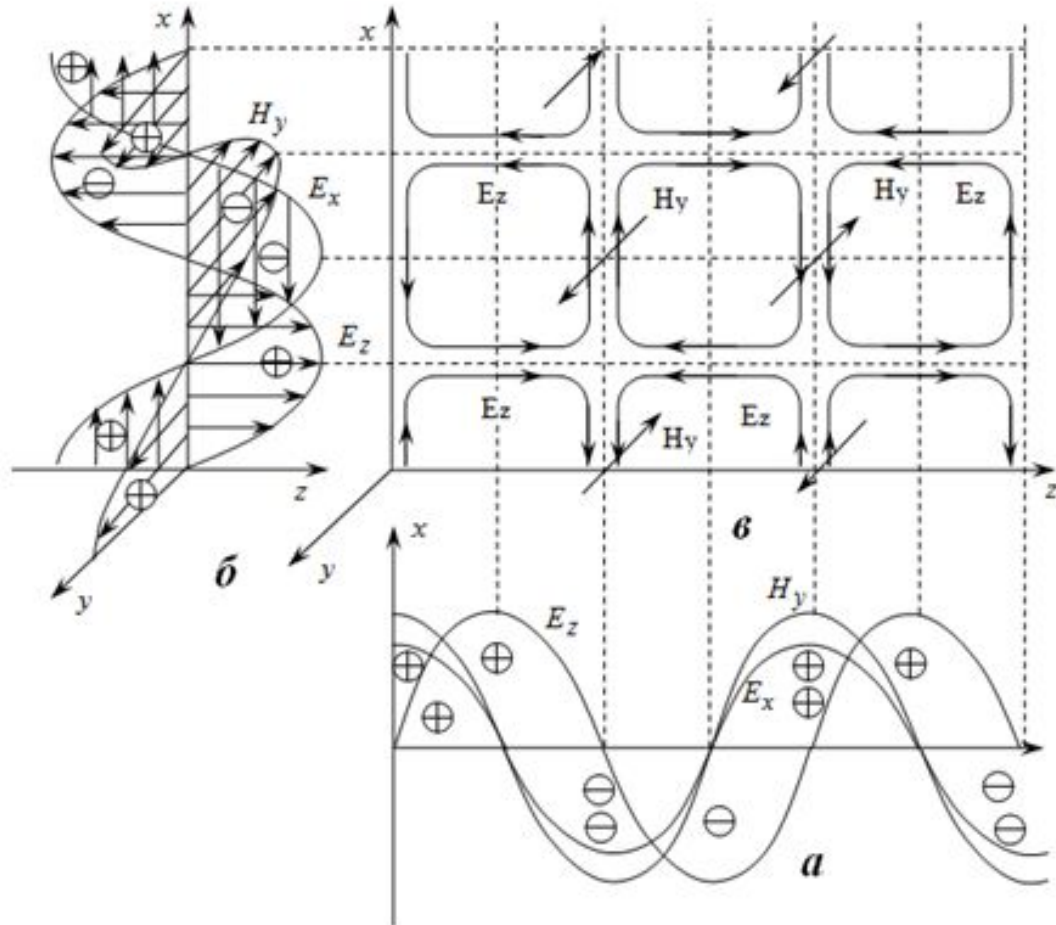


Рисунок 9.7. Структура поля за умови, що \vec{E} перпендикулярний площині падіння:

a – складники вздовж осі *z*; *б* – складники вздовж осі *x*; *в* – результивне



9.2.2. Вектор \vec{E} паралельний площині падіння

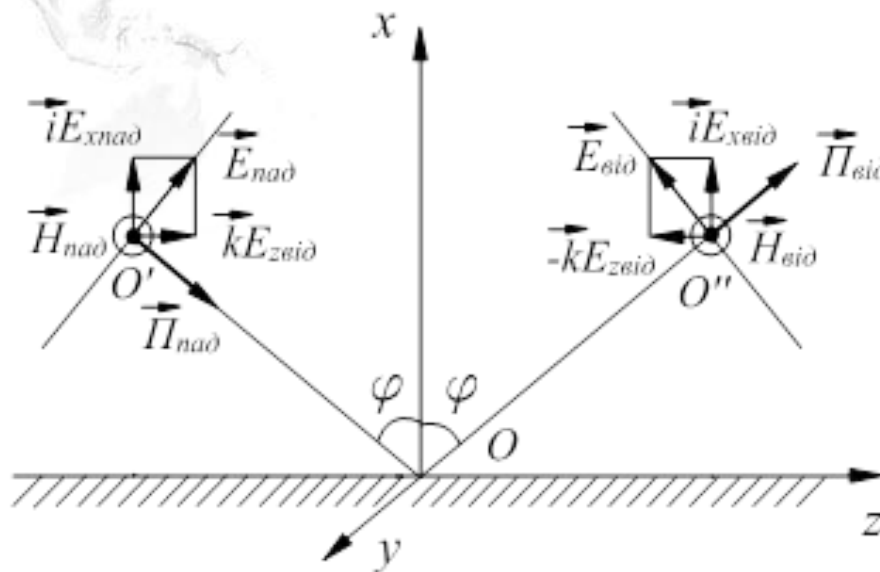


Рисунок 9.8. Складники поля за умови, якщо вектор \vec{E} паралельний площині падіння



Нагадаємо – *площина падіння* є площиною з вектором *Пойнтин-га* та нормаллю до межі середовищ. В цій ситуації вектори \vec{E} та \vec{H} хвилі, що падає, мають такі складники:

$$\vec{H}_{\text{пад}} = \vec{j}H_y, \quad (9.25)$$

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{i}E_x + \vec{k}E_z. \quad (9.26)$$

У цьому випадку вектор \vec{H} на підставі граничних умов ($H_x \neq 0$) на межі поділу має не нульове значення, його напрям після відбиття не змінюється (рис. 9.9). Тому у формулі для $H_{y\text{рез}}$ за віссю x повинна бути функція \cos , адже $\cos 0 = 1$; за часом функція може бути будь-яка, наприклад також \cos :

$$H_{y\text{рез}} = 2H_m \cos\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t - \beta z). \quad (9.27)$$

Складники електричного поля $E_{x\text{рез}}$ разом з $H_{y\text{рез}}$ формують рухому хвилю уздовж осі z , вони є у «фазі» ($\vec{P}_{\text{ср}} \neq 0$), тобто знову використовуємо функцію \cos :

$$E_{x\text{рез}} = 2E_{m_x} \cos\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t - \beta z), \quad (9.28)$$

де $E_{m_x} = E_m \sin\varphi$.

$$E_{z\text{рез}} = -2E_{m_z} \sin\left(\frac{2\pi \cos\varphi}{\lambda}x\right) \sin(\omega t - \beta z), \quad (9.29)$$

де $E_{m_z} = E_m \cos\varphi$.

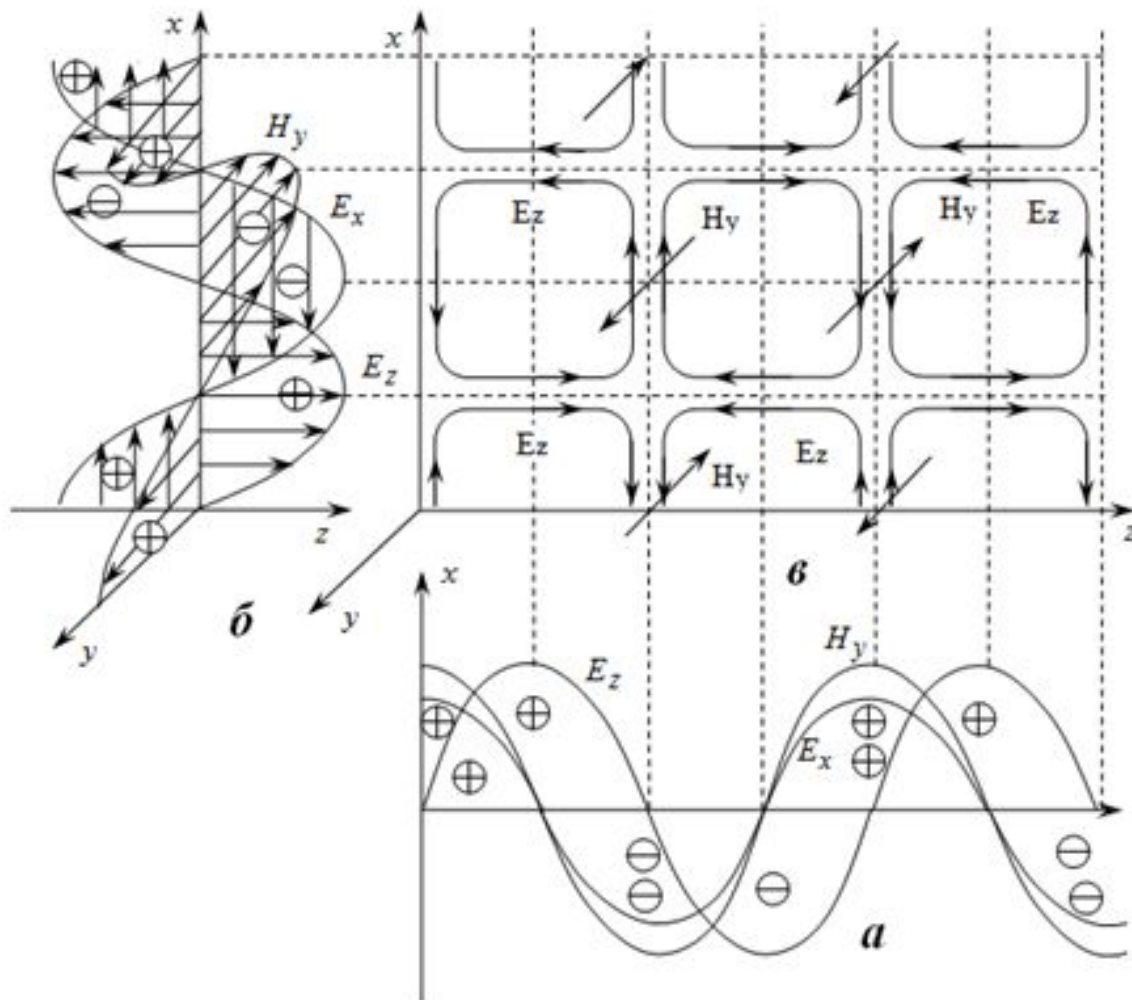


Рисунок 9.9. Структура поля за умови, що \vec{E} паралельний площині падіння:

а – вздовж осі z ; б – вздовж осі x ; в – результуюча



Висновки

- 1. Електромагнітні хвилі можна розділити на дві групи. До першої групи належать ті, що мають лише поперечні складники - це пари $E_x - H_y$ та $E_y - H_x$, а поздовжні відсутні. Така хвиля має назву хвиля типу T або поперечна електромагнітна (TEM).
- 2. Однак, як випливає з рівнянь Максвелла в замкнутому просторі можуть існувати і хвилі іншої групи, тобто хвилі, до складу яких входять складники E_z та H_z : якщо $H_z \neq 0 \rightarrow E_z = 0$, або $E_z \neq 0 \rightarrow H_z = 0$. Ці хвилі, відповідно, мають назву хвилі типу TE , або поперечні електричні (TE) та хвилі типу TM , або поперечні магнітні (TM).
- 3. За умов падіння електромагнітної хвилі типу T на ідеально провідну поверхню утворюється відбита хвиля, при цьому результувне поле спрямовано вздовж ідеальної провідної поверхні.
- 4. Результивний вектор $\vec{\Pi}$ має два складники:
 - уздовж осі x (характеризує режим стоячої хвилі);
 - уздовж осі y (характеризує режим рухомої хвилі).



- 5. За довільних значень кута φ результитивне поле має два складники: рухому, яка поширюється у додатному напрямку осі z , та стоячу вздовж осі x .
- 6. У напівобмеженому просторі електромагнітна хвиля характеризується трьома швидкостями: фронту $v_{\text{фр}}$, фази $v_{\text{фз}} = \frac{v_{\text{фр}}}{\sin\varphi}$ та групової $v_{\text{гр}} = v_{\text{фр}} \sin\varphi$ (зауважимо, що $v_{\text{фз}} v_{\text{гр}} = v_{\text{фр}}^2$). У вільному просторі $v_{\text{фр}} = c$.
- 7. За умов падіння ЕМХ на ідеальну провідну поверхню доцільно ввести поняття характеристичного опору R_{ch} , який визначають через хвильовий імпеданс Z_w та кут падіння: $R_{ch} = Z_w / \sin\varphi$.
- 8. Структури полів електричних та магнітних векторів різні за умов різної орієнтації вектора \vec{E} хвилі типу T , що падає:
 - якщо вектор \vec{E} , перпендикулярний до площини падіння - в результаті утворюється хвиля типу H (TE);
 - якщо вектор \vec{E} , паралельний до площини падіння - в результаті утворюється хвиля типу E (TH).



Контрольні питання та завдання

- 1. Охарактеризуйте поняття і параметри фазової та групової швидкості хвилі.
- 2. Охарактеризуйте поняття і параметри рухомої і стоячої хвилі.
- 3. Назвіть види електромагнітних хвиль, в залежності від складників поля H_z та E_z .
- 4. Дайте визначення коливальному та хвильовому режиму, за яким напрямком здійснюється перенесення енергій під час поширення хвиль?
- 5. Наведіть вектори Пойнтинга для падаючої та відбитої хвилі в проєкціях на координатні осі.
- 6. Дайте визначення поняттю «довжина хвилі».
- 7. Наведіть співвідношення, які описують залежність між довжинами стоячої λ_c , рухомої λ_p та падаючої хвиль λ .
- 8. Сформулюйте звязок між режимом хвилі та кутом її падіння.
- 9. Охарактеризуйте явище падіння однорідної плоскої хвилі на ідеально провідну поверхню.