Математика
Тема 1.
Матрицы и определители.
Лекция 2

Данчул Александр Николаевич
зав. кафедрой информационных технологий в управлении,
д.т.н., профессор
436-03-23, каб.2125 (2 корп.)
DANCH@UR.RAGS.RU

2012 г.

Минор и алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы

Опр. 14. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы, полученной из A удалением i-ой строки и j-го столбца.
Опр. 15. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется минор этого элемента со знаком, определяемым по «шахматному правилу»

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{matrix}$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ -2 & 1 & \boxed{5} \end{vmatrix}; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-(1\cdot 1-0\cdot(-2))=-1$$

Вычисление определителя квадратной матрицы разложением по строке (столбцу)

Теорема Лапласа

1. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) матрицы A на ***их*** алгебраические дополнения.

разложение по i-ой строке

$$\forall i \quad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

разложение по j-ому столбцу

$$\forall j \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Вычисление определителя квадратной матрицы разложением по строке (столбцу)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(3\cdot 5 - 1\cdot 4) + 0 + 2\cdot((-1)\cdot 1 - 3\cdot(-2)) = 11 + 10 = 21$$

Теорема Лапласа

2. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой ***другой*** строки (столбца) матрицы A равно 0.

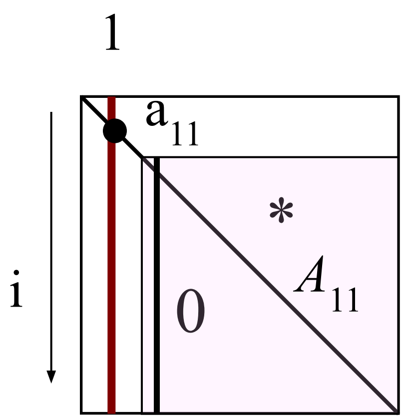
$$\forall i \underset{k\neq i}{\forall k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{kj} = a_{i1}\cdot A_{k1} + a_{i2}\cdot A_{k2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{kn} = 0$$

$$\forall j \ \underset{l\neq j}{\forall l} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{il} = a_{1j}\cdot A_{1l} + a_{2j}\cdot A_{2l} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nl} = 0$$

Вычисление определителей

Определитель удобно вычислять по строке или столбцу, содержащему наибольшее число нулей.

Определитель диагональной и треугольной матрицы равен произведению элементов, принадлежащих главной диагонали.



$$|A| = \sum_{l=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1} = a_{11} \cdot A_{11} + \sum_{l=2}^{n} a_{i1} \cdot A_{11} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + \sum_{l=1,\ l \neq j}^{n} 0 \cdot A_{i1} = a_{11} \cdot A_{11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + \sum_{l=2}^{3} 0 \cdot A_{i1} = 1 \cdot A_{11} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

Определитель единичной матрицы равен 1

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

Можно доказать, используя теорему Лапласа

$$\forall i \ |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}; \qquad \forall j \ |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. Свойства строк и столбцов одинаковы.
2. Если все элементы какой-либо строки матрицы равны 0, то ее определитель тоже равен 0.
3. Если все элементы какой-либо строки матрицы умножить на число λ, то ее определитель тоже умножится на λ.
4. При перестановке любых двух строк матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
5. Если матрица содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.
6. Если элементы двух строк матрицы пропорциональны, ее определитель равен 0.
7. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, предварительно умноженные на одно и то же число λ.
8. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Элементарные преобразования матриц

№	Преобразование	Характеристика изменения
1	Транспонирование матрицы	Определитель не меняется
2	Перестановка двух строк (столбцов)	Определитель меняет знак
3	Сложение одной строки с другой строкой, умноженной на число	Определитель не меняется
4	Умножение одной строки на число	Определитель умножается на это число
5	Вычеркивание нулевой строки	Меняется размер матрицы

Обратная матрица

Число a^{-1} называется обратным к числу a, отличному от 0, если $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$.

Опр. 16. Матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A порядка n, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (1)$$

Очевидно, что по правилам умножения матриц матрицы A^{-1} и E должны быть квадратными порядка n.

Так как умножение матриц некоммутативно, докажем совпадение левой и правой обратных матриц, умножаемых слева и справа на A в формуле (1).

$$A_{л}^{-1} = A_{л}^{-1} \cdot E = A_{л}^{-1} \cdot (A \cdot A_{п}^{-1}) = (A_{л}^{-1} \cdot A) \cdot A_{п}^{-1} = E \cdot A_{п}^{-1} = A_{п}^{-1}$$

Опр. 17. Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен 0.

Вычисление обратной матрицы

Необходимым и достаточным условием существования для A обратной матрицы является ее невырожденность.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} \qquad (2)$$

где $\widetilde{A}$ - присоединенная матрица, элементы $\widetilde{a}_{ij}$ которой получаются транспонированием матрицы алгебраических дополнений исходной матрицы . $\forall i \forall j \quad \widetilde{a}_{ij} = A_{ji}$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1;$

$A_{11} = 5; \quad A_{12} = -3;$

$A_{21} = -2; \quad A_{22} = 1;$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

Опр. 18. *Минором порядка k* матрицы A размера $m \times n$ называется определитель матрицы, полученной из A выделением произвольных k ее строк и k столбцов.

Очевидно, что $1 \le k \le \min(m, n)$

Опр. 19. *Рангом* матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Ранг нулевой матрицы равен 0.

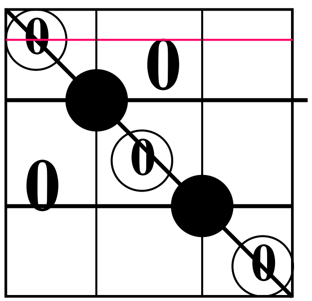
Очевидно, что $0 \le r(A) \le \min(m, n)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \det A = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 11; \quad r(A) = 2$$

При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Вычисление ранга матрицы

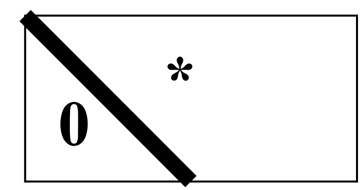
1. Ранг диагональной матрицы равен числу элементов диагонали, отличных от нуля.



В ненулевой минор выделяем строки и столбцы, где стоят ненулевые элементы диагонали. Все миноры большего порядка будут содержать нулевую строку.

r(A)=2

2. Ранг верхней треугольной матрицы, в которой *все* элементы главной диагонали, не равны 0, равен числу строк.



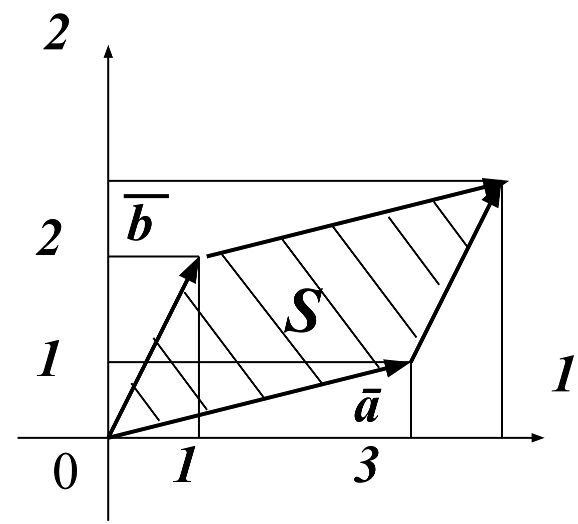
3. Ранг прямоугольной матрицы удобно вычислить, приведя ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду: верхние строки представляют собой треугольную или трапециедальную матрицу, в которой *все* элементы главной диагонали не равны 0, а нижние строки – нулевые.
Тогда ранг будет равен числу ненулевых строк в этой матрице.

Геометрический смысл ранга квадратной матрицы 2-го и 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot 1 = 5 = S;\ \ r = 2$$

$$b = 2\cdot a = (6\ \ 2)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 6\cdot 1 = 0;\ \ r = 1$$



Если ранг матрицы равен 1, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны (находятся на одной линии).

Если ранг матрицы A_3 равен 2, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарны (находятся в одной плоскости), а если равен 1, то коллинеарны.

Ранг матрицы равен размерности фигуры (тела), построенной на векторах, координаты которых записаны в строках матрицы.