*Способы представления криволинейных поверхностей

Лектор Вишнякова И. Н.

Кафедра Компьютерных информационных технологий

*Способы представления

* В зависимости от степени реалистичности:
  * поточечное представление
  * каркасное представление
  * в виде полигональной сетки
  * реалистическое изображение:
    * в аналитическом виде
    * бикубические параметрические поверхности

*Поточечное представление поверхности

* *Представление поверхности по точкам* требует знания координат каждой точки поверхности и ее цвета и прозрачности.
* *Плюсы*:
* позволяет достаточно просто описывать сложные объекты и сцены;
* простая процедура отображения сцены;
* *Минусы*:
* использование достаточного объема памяти;
* ограничение на разрешительную способность, точность моделирования;
* низкая скорость создания изображения;
* проблемы при масштабировании изображения.

*Каркасное представление поверхности

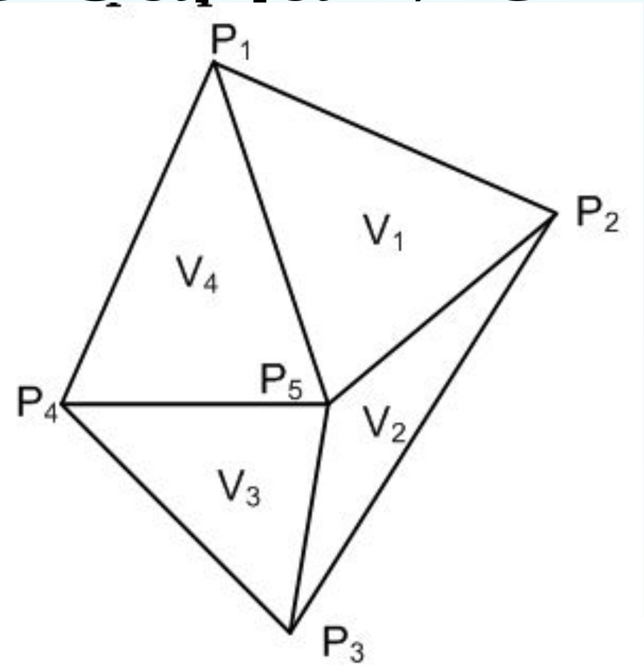
- *Каркасная модель* представляет собой каркас графического объекта, образованный отрезками прямых линий.
- **Плюсы**:
- минимальные затраты оперативной памяти;
- простая процедура отображения сцены;
- **Минусы**:
- представление не реалистично;
- узкое назначение - представление простых пространственных графических объектов.

*Полигональное представление поверхности

* ***Полигональная сетка*** – это совокупность связанных между собой плоских многоугольников (четырехугольников или треугольников).

* ***Способы представления*:**
  * Явное задание граней;
  * Задание граней с помощью указателей в списке вершин;
  * Явное задание ребер.

*Явное задание граней



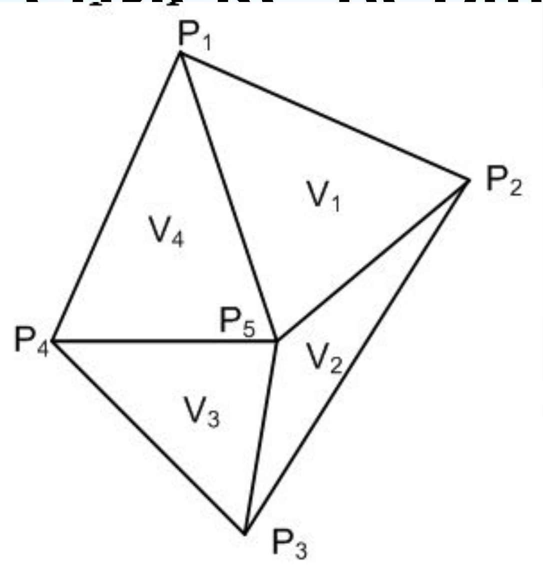
$$V_1 = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_5, y_5, z_5)\},$$

$$V_2 = \{(x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_5, y_5, z_5)\},$$

$$V_3 = \{(x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5)\},$$

$$V_4 = \{(x_4, y_4, z_4), (x_1, y_1, z_1), (x_5, y_5, z_5)\}$$

* Задание граней с помощью указателей в списке вершин



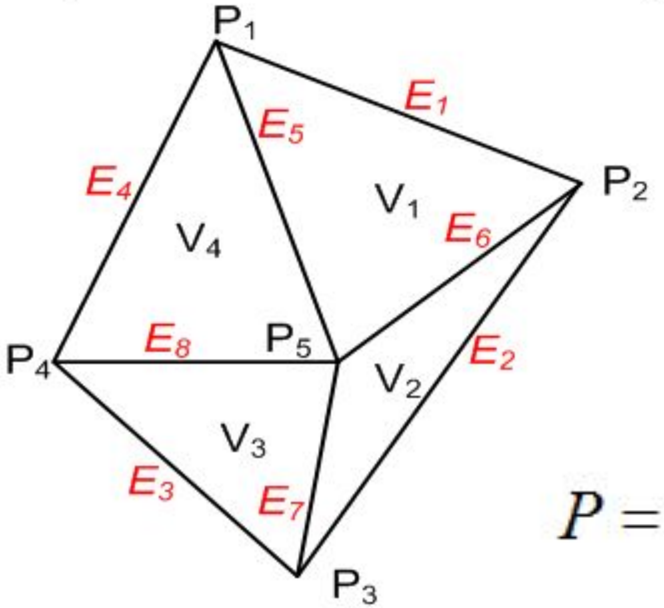
Список вершин полигональной сетки:

$$P = \begin{Bmatrix} P_1(x_1, y_1, z_1), P_2\,(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), \\ P_4(x_4, y_4, z_4), P_5(x_5, y_5, z_5) \end{Bmatrix}$$

Каждая грань представляется номерами вершин из общего списка вершин:

$$V_1 = \{1, 2, 5\},\ V_2 = \{2, 3, 5\},\ V_3 = \{3, 4, 5\},\ V_4 = \{4, 1, 5\}.$$

* Явное задание ребер



$$P = \begin{Bmatrix} P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), \\ P_4(x_4, y_4, z_4), P_5(x_5, y_5, z_5) \end{Bmatrix}.$$

$$E_1 = \{P_1, P_2, V_1, \lambda\},\ E_2 = \{P_2, P_2, V_2, \lambda\},$$

$$E_3 = \{P_3, P_4, V_3, \lambda\},\ E_4 = \{P_4, P_1, V_4, \lambda\},$$

$$E_5 = \{P_1, P_5, V_1, V_4\},\ E_6 = \{P_2, P_5, V_1, V_2\},$$

$$E_7 = \{P_3, P_5, V_2, V_3\},\ E_8 = \{P_4, P_5, V_3, V_4\}.$$

λ – пусто.

$$V_1 = \{E_1, E_6, E_5\},\ V_2 = \{E_6, E_2, E_7\},\ V_3 = \{E_7, E_3, E_8\},\ V_4 = \{E_5, E_8, E_4\}.$$

*Аналитическое задание поверхности

* Для описания поверхности используются математические формулы.
  * общая форма $F(x, y, z) = 0$;
  * с использованием двух функций: $y = F_y(x), \ z = F_z(x)$;
  * па $x = F_x(s,t), \quad y = F_y(s,t), \quad z = F_z(s,t)$
  * s, t - некоторые параметры, которые изменяются в определенном диапазоне.

*Бикубическое задание кривой

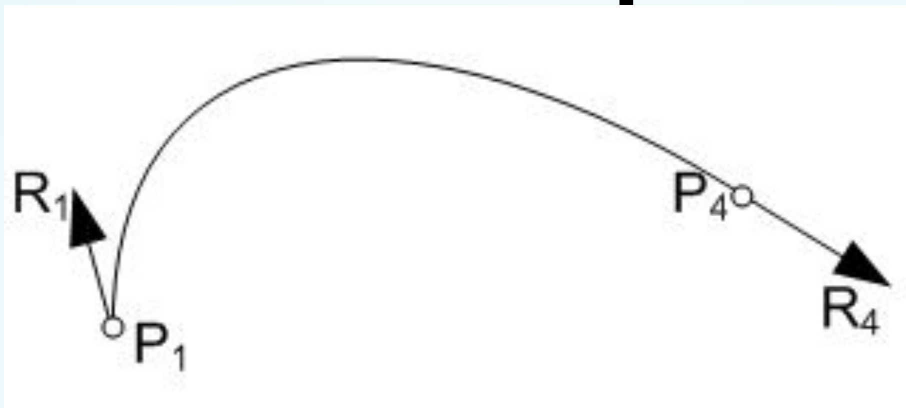
$$x = F_x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x;$$

$$y = F_y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y; \quad t \in [0;1] - \text{параметр.}$$

$$z = F_z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z;$$

- Способы представления кривых:
  - Метод Эрмита
  - Метод Безье
  - B-сплайн

*Бикубическая кривая Эрмита



* P_1, P_4 – крайние точки кривой;

* R_1, R_4 – направляющие вектора в крайних точках кривой соответственно.

* Необходимо вычислить коэффициенты $a_x, b_{x,} c_x, d_x$

* г

$$x(0) = P_{1x};\, x(1) = P_{4x};\, x'(0) = R_{1x};\, x'(1) = R_{4x}$$

*

Вычисление коэффициентов кривой Эрмита

Обозначим, $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$, $C_x = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$.

$$x(t) = T \cdot C_x = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}.$$

$$x(0) = P_{1x} = T \cdot C_x \big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot C_x;$$

$$x(1) = P_{4x} = T \cdot C_x \big|_{t=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot C_x;$$

$$x'(t) = 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x$$

$$x'(0) = R_{1x} = T \cdot C_x \big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C_x;$$

$$x'(1) = R_{4x} = T \cdot C_x \big|_{t=1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C_x.$$

*Получение матрицы Эрмита

$$\begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}, \text{ отсюда } \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix},$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix}, \text{ где } M_h = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ – матрица Эрмита,}$$

$$G_{hx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix} \text{ – геометрический вектор Эрмита.}$$

*Уравнения кривых Эрмита

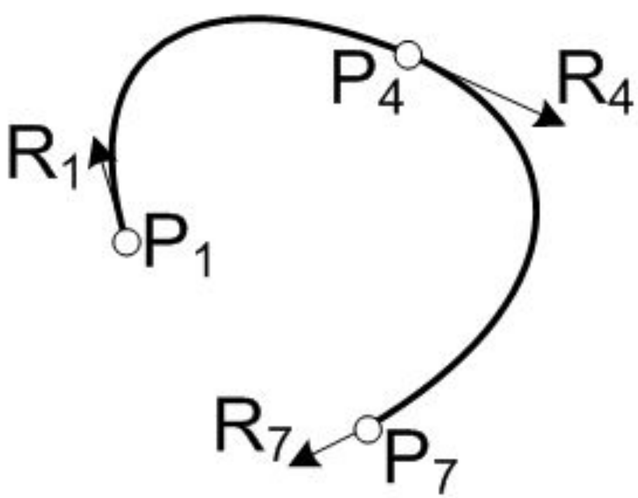
$$x = G_x(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hx};$$

$$y = G_y(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hy}; \quad t \in [0;1] - \text{параметр}.$$

$$z = G_z(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hz};$$

Склеивание кривых Эрмита

- Для склеивания этих кусочков должны выполняться следующие требования:
  - краевые точки кусков должны совпадать;
  - производные в этих точках должны совпадать;
  - длина векторов касательной может быть различной в одной и той же краевой точке.



$$G^1_{hx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix}, G^2_{hx} = \begin{bmatrix} P_{4x} \\ P_{7x} \\ kR_{4x} \\ R_{7x} \end{bmatrix}$$

Форма Эрмита

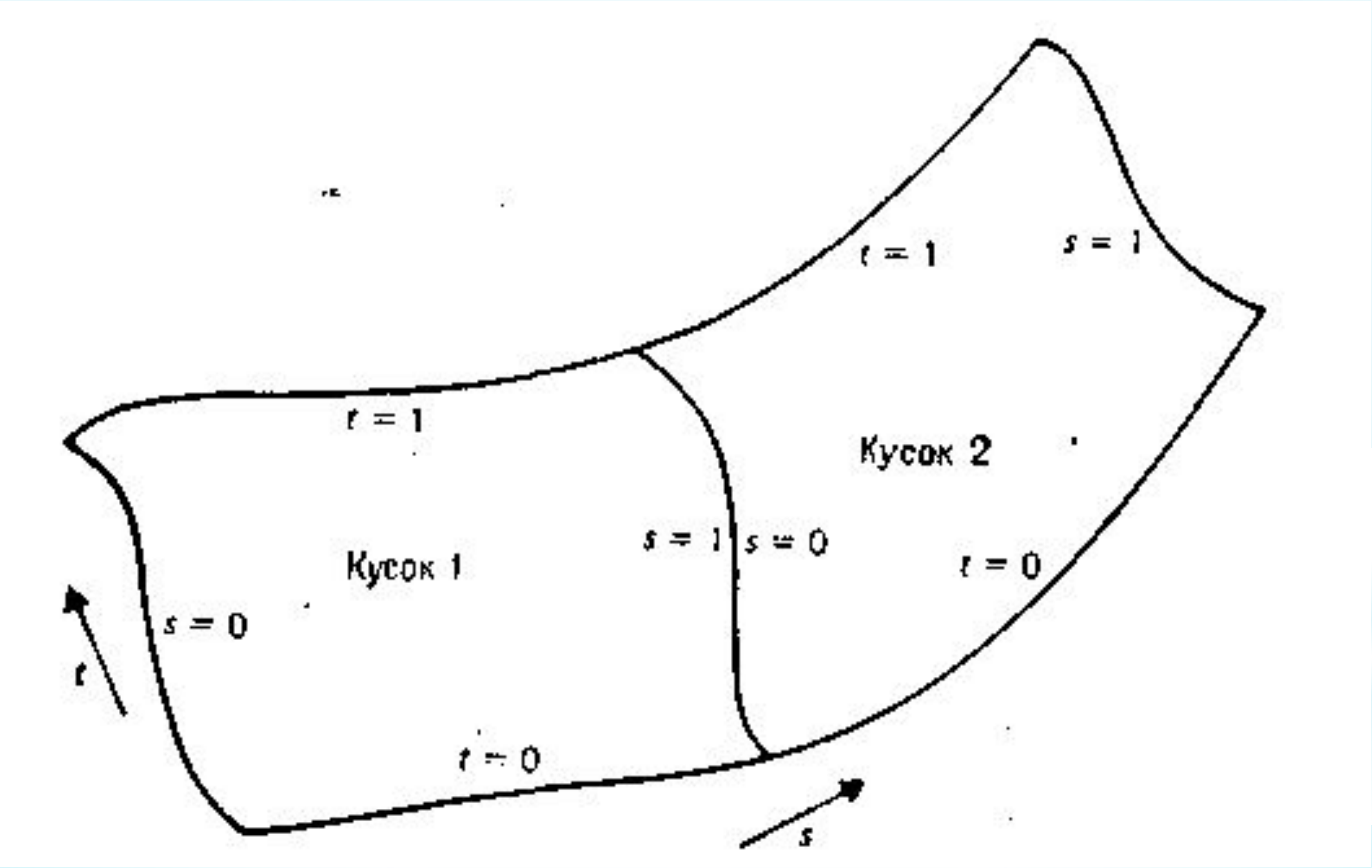
$$x = G_x(s,t) = S \cdot M_h \cdot Q_x \cdot M^T{}_h \cdot T^T;$$

$$y = G_y(s,t) = S \cdot M_h \cdot Q_y \cdot M^T{}_h \cdot T^T;$$

$$z = G_z(s,t) = S \cdot M_h \cdot Q_z \cdot M^T{}_h \cdot T^T;$$

$$Q_x = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \frac{\partial x}{\partial t}(0,0) & \frac{\partial x}{\partial t}(0,1) \\ x_{10} & x_{11} & \frac{\partial x}{\partial t}(1,0) & \frac{\partial x}{\partial t}(1,1) \\ \frac{\partial x}{\partial s}(0,0) & \frac{\partial x}{\partial s}(0,1) & \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t}(0,0) & \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t}(0,1) \\ \frac{\partial x}{\partial s}(1,0) & \frac{\partial x}{\partial s}(1,1) & \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t}(1,0) & \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t}(1,1) \end{bmatrix}$$

Склеивание кусков по параметру s



*Склеивание кусков по параметру s

Матрица 1-го куска

q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{24}
q_{41}	q_{42}	q_{43}	q_{44}

Матрица 2-го куска

q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{24}
kq_{41}	kq_{42}	kq_{43}	kq_{44}

*Склеивание кусков по параметру t

Матрица 1-го куска

	q_{12}		q_{14}
	q_{22}		q_{24}
	q_{32}		q_{34}
	q_{42}		q_{44}

Матрица 2-го куска

q_{12}		kq_{14}	
q_{22}		kq_{24}	
q_{32}		kq_{34}	
q_{42}		kq_{44}	

*Кривая Безье

Математическая кривая Безье степени n задается формулой:

$$B^n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_n^i(t) \cdot P_i ,$$

где $P_i = (x_i \quad y_i \quad z_i)$ – координаты i-той вершины разомкнутого многоугольника $P_0 \ldots P_n$;

$B_n^i(t) = C_n^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$ – базис Бернштейна,

$C_n^i = \dfrac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$ – биноминальный коэффициент.

Представление кривой Безье

P_1, P_2, P_3, P_4 – опорные точки кривой, которые образуют многоугольник, в который вписана кривая.

В параметрической форме кубическая кривая Безье (n = 3) описывается следующим уравнением:

$$B^3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3,$$

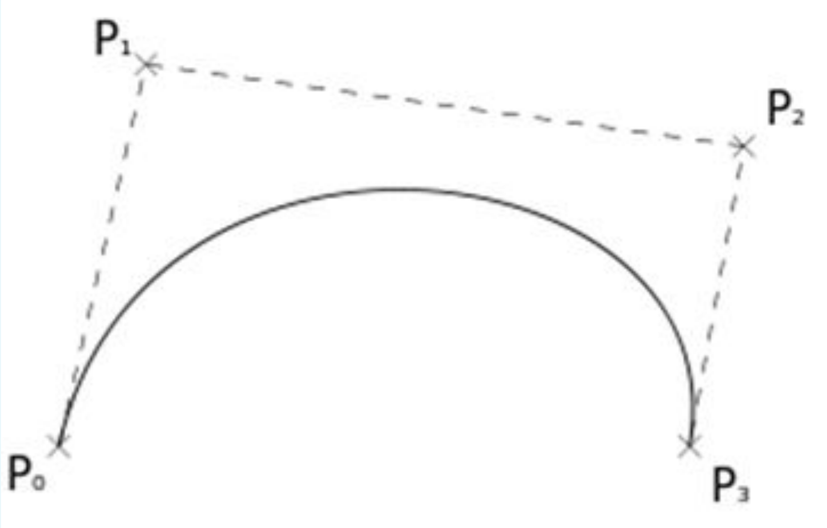
$t \in [0;1]$ – параметр.

Необходимо вычислить коэффициенты a_x, b_x, c_x, d_x при следующих условиях:

$$R_1 = 3(P_2 - P_1) = P'(0), \quad R_4 = 3(P_4 - P_2) = P'(1)$$

– направляющие вектора в крайних точках кривой соответственно.

* Матрица Безье



$$G_{hx} = M_{hb} \cdot G_{bx},$$

где $G_{hx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix}, M_{hb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, G_{bx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{3x} \\ P_{4x} \end{bmatrix}$

Параметрическое представление кривой Безье

$$x = B_x(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hx} = T \cdot M_h \cdot M_{hb} \cdot G_{hx};$$

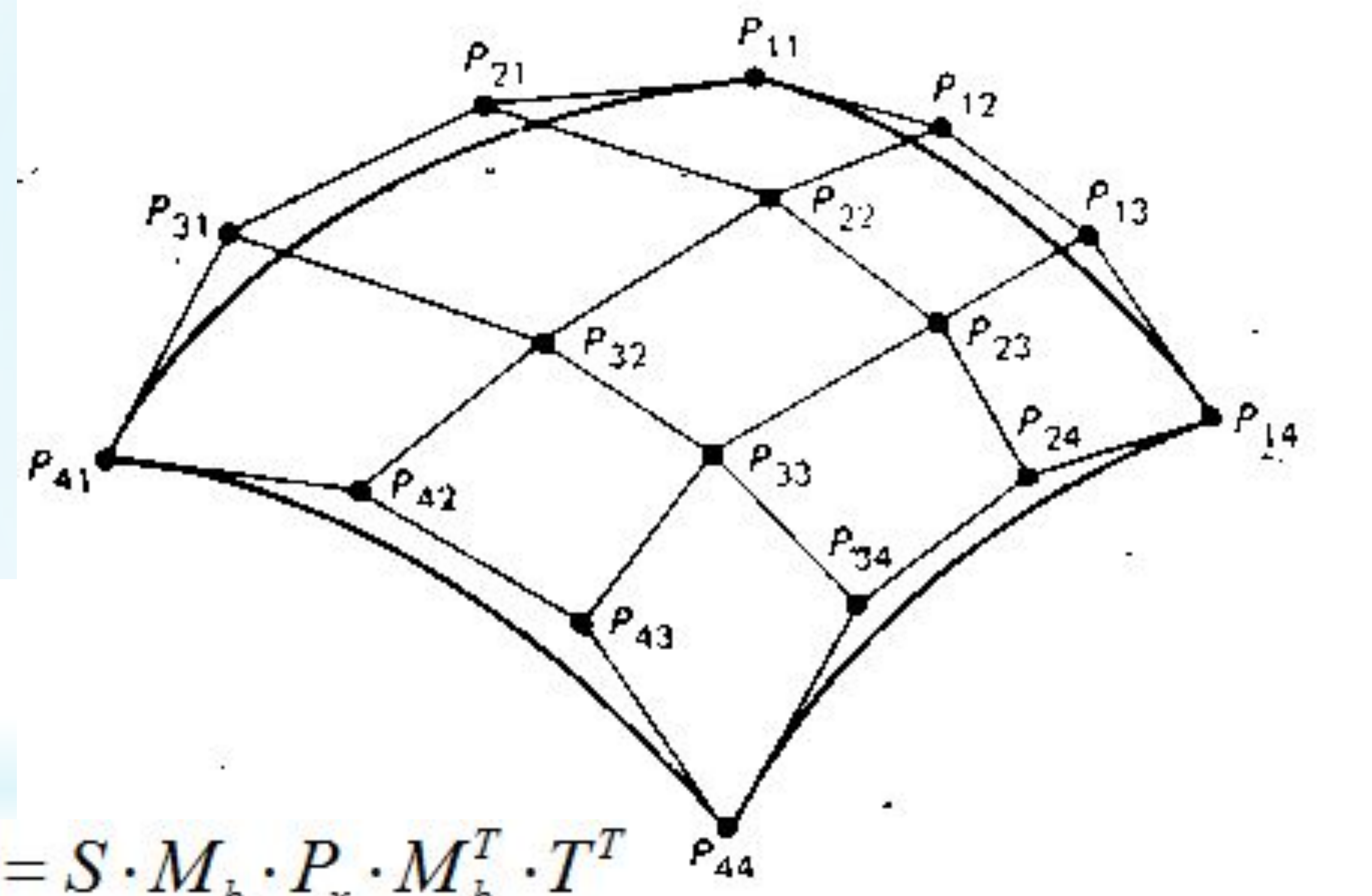
$$M_b = M_h \cdot M_{hb} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$x = B_x(t) = T \cdot M_b \cdot G_{hx};$$

$$y = B_y(t) = T \cdot M_b \cdot G_{hy};\ t \in [0;1] - \text{параметр.}$$

$$z = B_z(t) = T \cdot M_b \cdot G_{hz};$$

Форма Безье



$$x(s,t) = S \cdot M_b \cdot P_x \cdot M_b^T \cdot T^T$$

$$y(s,t) = S \cdot M_b \cdot P_y \cdot M_b^T \cdot T^T$$

$$z(s,t) = S \cdot M_b \cdot P_z \cdot M_b^T \cdot T^T$$

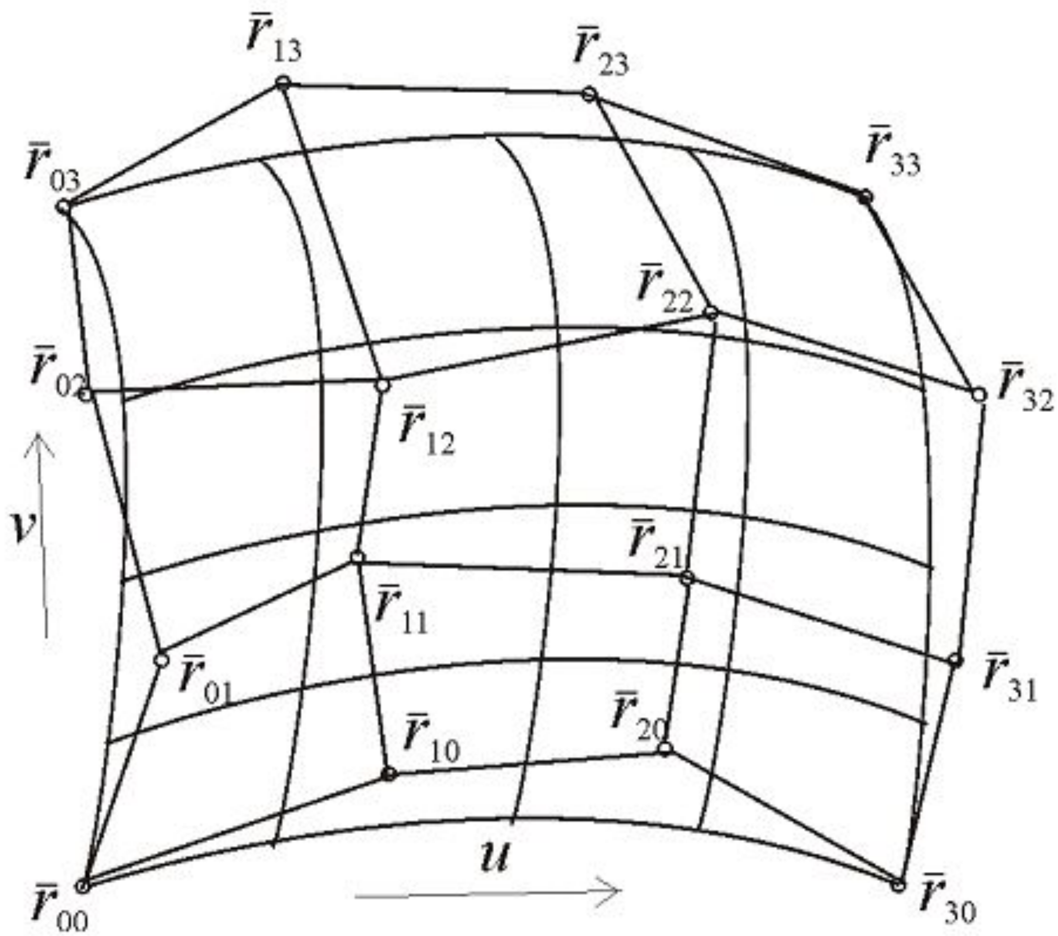
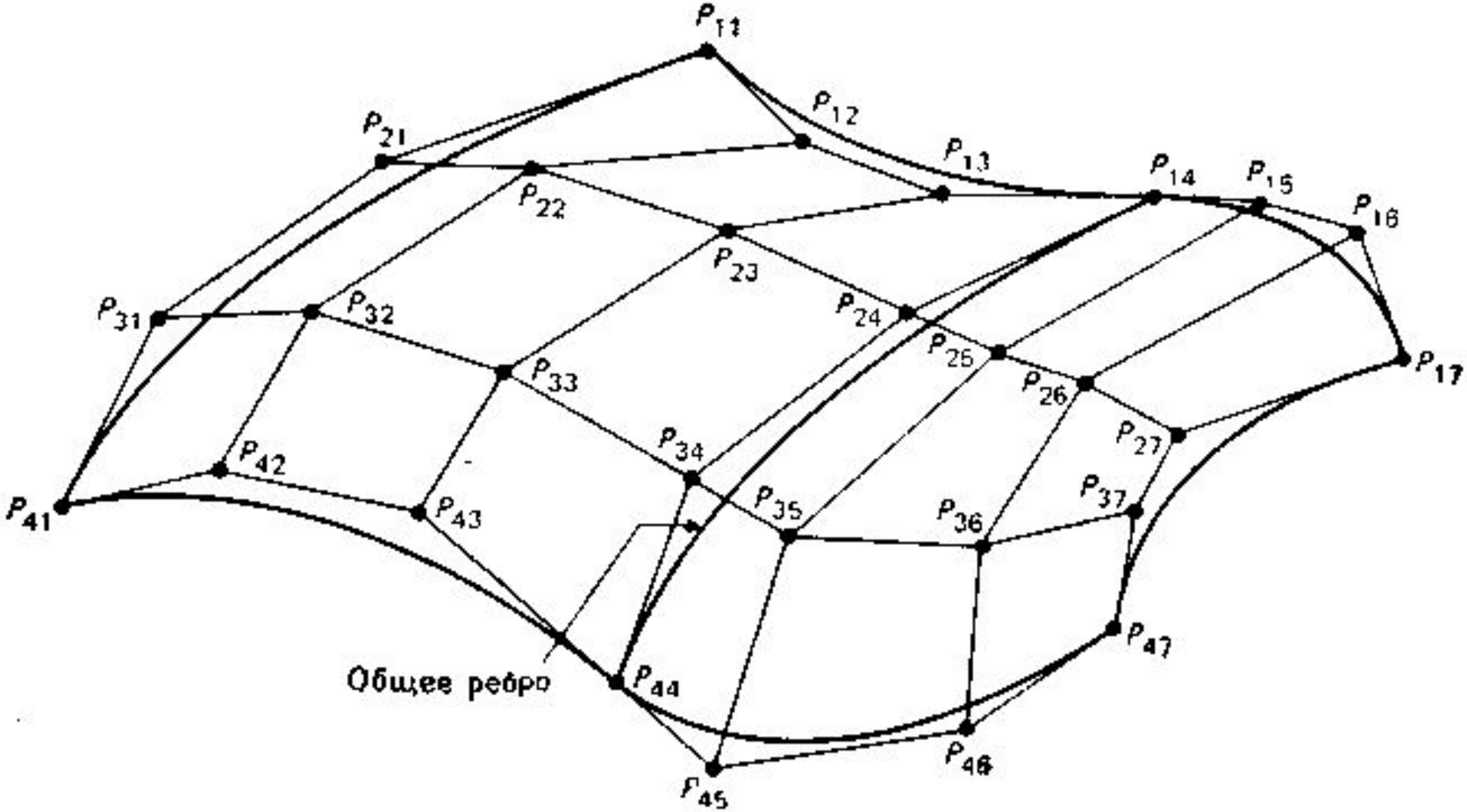
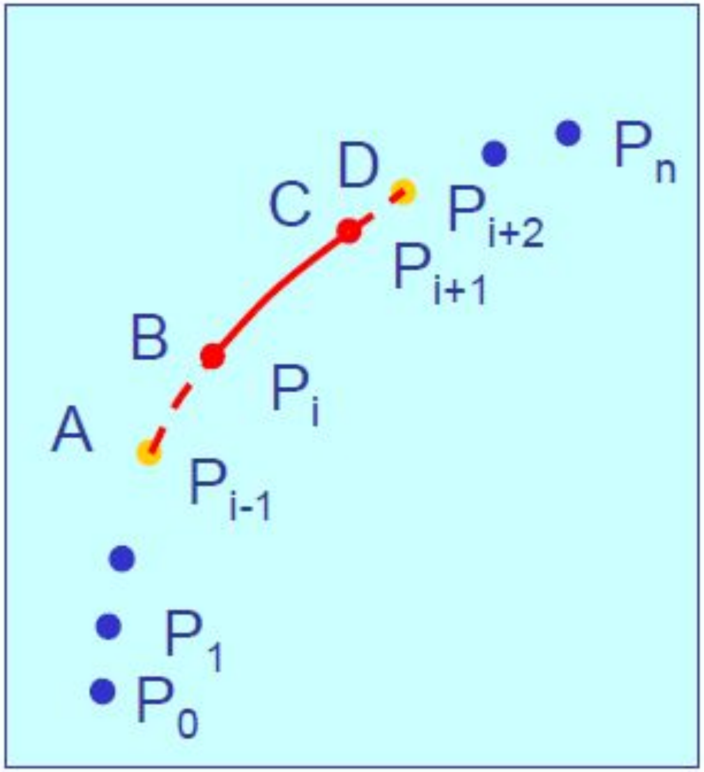


Рис.6.6. Порция поверхности Безье.

$$\bar{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} r_{ij} \cdot \frac{3!\cdot 3!}{(3-i)!\cdot i!\cdot (3-j)!\cdot j!} \cdot u^i \cdot (1-u)^{3-i} \cdot v^j \cdot (1-v)^{3-j}.$$

*Склеивание по форме Безье





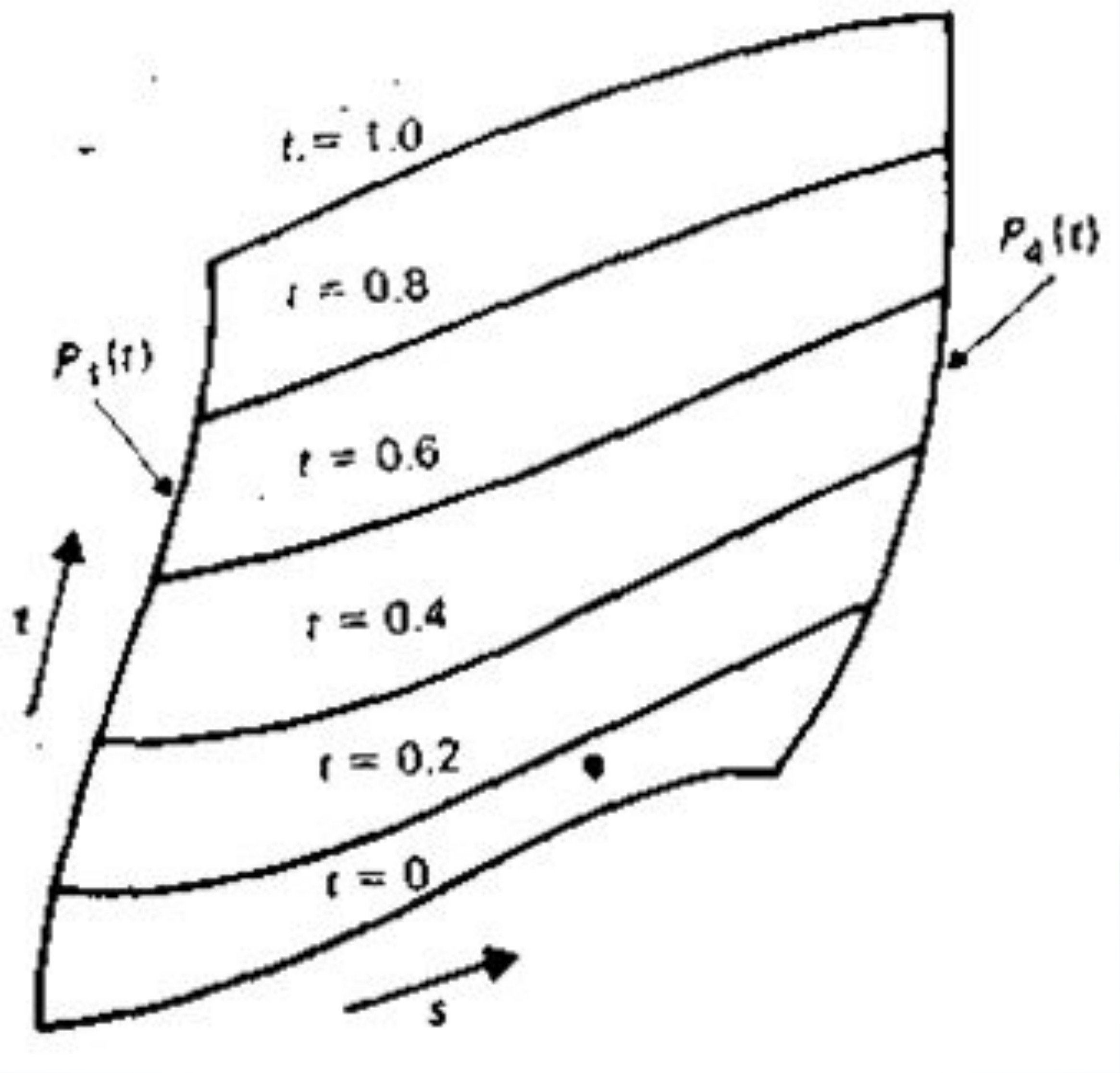
* B-сплайн

Если задана последовательность из $n+1$ реперных точек $P_0 \dots P_n$, то поведение кривой B-сплайна между некоторой парой из них P_i и P_{i+1} описывается параметрическим представлением функций $x(t), y(t), z(t)$ в виде полиномов третьей степени.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= T \cdot M_s \cdot G_{sx};\\
y(t) &= T \cdot M_s \cdot G_{sy};,\\
z(t) &= T \cdot M_s \cdot G_{sz};
\end{aligned}
\quad
M_s = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

$$
G_{sx} = \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix}, \quad 2 \le i \le n-2.
$$

Бикубические поверхности



Бикубические поверхности

$$x(t,s) = a_{11}s^3t^3 + a_{12}s^3t^2 + a_{13}s^3t^1 + a_{14}s^3 + a_{21}s^2t^3 + a_{22}s^2t^2 + a_{23}s^2t^1 + a_{24}s^2 +$$
$$a_{31}s^1t^3 + a_{32}s^1t^2 + a_{33}s^1t^1 + a_{34}s^1 + a_{41}t^3 + a_{42}t^2 + a_{43}t^1 + a_{44}$$

$$x(t,s) = S \cdot C_x \cdot T^T,$$

где $S = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$,

а $T^T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$, C_x – коэффициенты бикубического многочлена.

* Форма B-сплайна

$$x(s,t) = S \cdot M_s \cdot P_x \cdot M_s^T \cdot T^T$$

$$y(s,t) = S \cdot M_s \cdot P_y \cdot M_s^T \cdot T^T$$

$$z(s,t) = S \cdot M_s \cdot P_z \cdot M_s^T \cdot T^T$$