

Практическое занятие:

Внецентренное приложение нагрузки.

Ядро сечения.

Задача 5.2

Условие задачи: Короткий стержень сжимается силой F , проходящей через заданную точку и направленной параллельно продольной оси стержня.

Исходные данные: точка приложения силы F – точка B ; расчётное сопротивление на растяжение материала $R_t = 0,25$ МПа; расчётное сопротивление на сжатие материала $R_c = 2,5$ МПа.

Требуется:

1. Построить нейтральную ось.
2. Из условия прочности определить величину допускаемой силы $[F]$.
3. При силе равной $[F]$, вычислить нормальные напряжения в точках сечения, наиболее удалённых от нейтральной оси в зонах растяжения и сжатия. Построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении стержня.
4. Построить ядро сечения.

Решение:

1. Построить нейтральную ось.

Разбиваем сечение на простые фигуры:

1 **фиг.** Равнобедренный треугольник: $b=40$ см; $h=30$ см.

$$A_1 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}40 \times 30 = 600 \text{ см}^2$$

$$I_{Z_1} = \frac{bh^3}{36} = \frac{40 \times 30^3}{36} = 30000 \text{ см}^4$$

$$I_{Y_1} = \frac{b^3h}{48} = \frac{40^3 \times 30}{48} = 40000 \text{ см}^4$$

2 **фиг.** Прямоугольник: $b=40$ см; $h=60$ см.

$$I_{Z_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720000 \text{ см}^4$$

$$I_{Y_2} = \frac{b^3h}{12} = \frac{40^3 \times 60}{12} = 320000 \text{ см}^4$$

3 **фиг.** Равнобедренный треугольник: $b=40$ см; $h=15$ см.

$$I_{Z_3} = \frac{bh^3}{36} = \frac{40 \times 15^3}{36} = 3750 \text{ см}^4$$

$$I_{Y_3} = \frac{b^3h}{48} = \frac{40^3 \times 15}{48} = 20000 \text{ см}^4$$

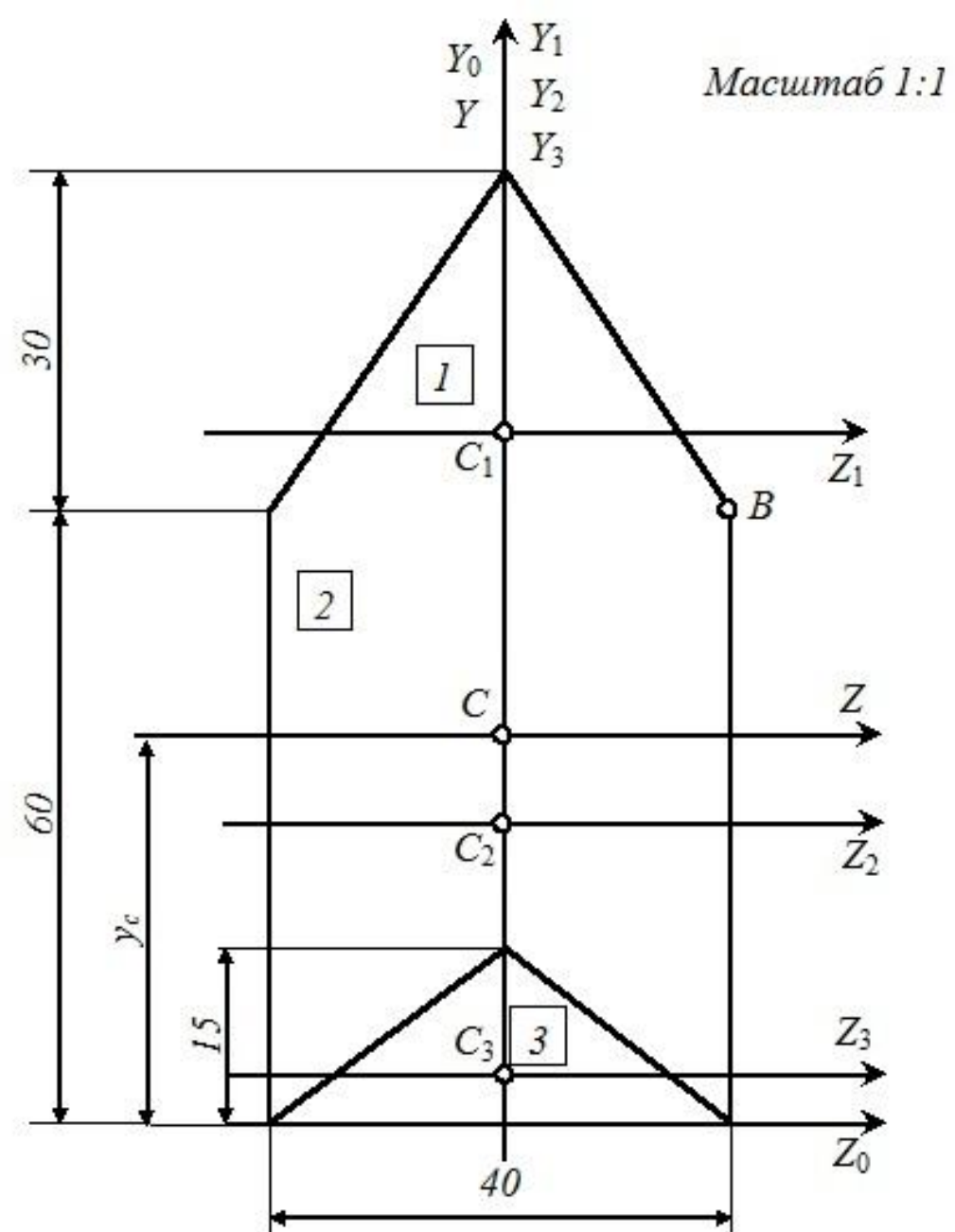


Рисунок 1

Относительно вспомогательных осей Y_0 и Z_0 определяем координаты всего центра тяжести:

$$y_c = \frac{\sum S_{Z_0}^{(i)}}{\sum A} = \frac{S_{Z_0}^{(1)} + S_{Z_0}^{(2)} - S_{Z_0}^{(3)}}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{y_1 \times A_1 + y_2 \times A_2 - y_3 \times A_3}{A_1 + A_2 - A_3}, \text{ здесь}$$

y_1 — это расстояние между осями Z_0 и Z_1 . $y_1=70$ см.

y_2 — это расстояние между осями Z_0 и Z_2 . $y_2=30$ см.

y_3 — это расстояние между осями Z_0 и Z_3 . $y_3=5$ см.

$$y_c = \frac{70 \times 600 + 30 \times 2400 - 5 \times 300}{600 + 2400 - 300} = 41,67 \text{ см}$$

$$z_c = \frac{\sum S_{Y_0}^{(i)}}{\sum A} = \frac{S_{Y_0}^{(1)} + S_{Y_0}^{(2)} - S_{Y_0}^{(3)}}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{z_1 \times A_1 + z_2 \times A_2 - z_3 \times A_3}{A_1 + A_2 - A_3}, \text{ здесь}$$

z_1 — это расстояние между осями Y_0 и Y_1 . $z_1=0$ см.

z_2 — это расстояние между осями Y_0 и Y_2 . $z_2=0$ см.

z_3 — это расстояние между осями Y_0 и Y_3 . $z_3=0$ см.

$$z_c = \frac{0 \times 600 + 0 \times 2400 - 0 \times 300}{600 + 2400 - 300} = 0$$

Относительно вспомогательных осей Y_0 и Z_0 откладываем центр тяжести всего сечения точку $C(y_c; z_c)$.

Через точку $C(41,67; 0)$ проводим центральные оси Y и Z .

Так как ось Y является осью симметрии всего сечения, поэтому оси Y и Z являются главными центральными осями всего сечения.

Определяем главные центральные моменты инерции всего сечения:

$$I_Z = \Sigma I_Z^{(i)} = I_Z^{(1)} + I_Z^{(2)} - I_Z^{(3)} = (I_{Z1} + a_1^2 \times A_1) + (I_{Z2} + a_2^2 \times A_2) - (I_{Z3} + a_3^2 \times A_3), \text{ здесь}$$

$$a_1 - \text{это расстояние между осями } Z \text{ и } Z_1. \quad a_1 = y_1 - y_c = 70 - 41,67 = 28,33 \text{ см.}$$

$$a_2 - \text{это расстояние между осями } Z \text{ и } Z_2. \quad a_2 = y_2 - y_c = 30 - 41,67 = -11,67 \text{ см.}$$

$$a_3 - \text{это расстояние между осями } Z \text{ и } Z_3. \quad a_3 = y_3 - y_c = 5 - 41,67 = -36,67 \text{ см.}$$

$$I_Z = (30000 + 28,33^2 \times 600) + (720000 + (-11,67)^2 \times 2400) - (3750 + (-36,67)^2 \times 300) = 113,135 \times 10^4 \text{ см}^4$$

$$I_Y = \Sigma I_Y^{(i)} = I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} - I_Y^{(3)} = (I_{Y1} + b_1^2 \times A_1) + (I_{Y2} + b_2^2 \times A_2) - (I_{Y3} + b_3^2 \times A_3), \text{ здесь}$$

$$b_1 - \text{это расстояние между осями } Y \text{ и } Y_1. \quad b_1 = z_1 - z_c = 0 - 0 = 0 \text{ см.}$$

$$b_2 - \text{это расстояние между осями } Y \text{ и } Y_2. \quad b_2 = z_2 - z_c = 0 - 0 = 0 \text{ см.}$$

$$b_3 - \text{это расстояние между осями } Y \text{ и } Y_3. \quad b_3 = z_3 - z_c = 0 - 0 = 0 \text{ см.}$$

$$I_Y = (40000 + 0^2 \times 600) + (320000 + 0^2 \times 2400) - (20000 + 0^2 \times 300) = 34 \times 10^4$$

Определяем квадраты главных центральных радиусов инерции всего сечения:

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{\Sigma A} = \frac{I_Y}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{34 \times 10^4}{600 + 2400 - 300} = 126 \text{ см}^2$$

$$i_Z^2 = \frac{I_Z}{\Sigma A} = \frac{I_Z}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{113,135 \times 10^4}{600 + 2400 - 300} = 419 \text{ см}^2$$

Определяем отрезки, отсекаемые нулевой линией на координатных осях:

$$a_Y = -\frac{i_Z^2}{y_F} \quad a_Z = -\frac{i_Y^2}{z_F}, \text{ здесь}$$

y_F и z_F — координаты точки приложения внешней силы F . Внешняя сила приложена в точке B , которая имеет координаты относительно осей Z и Y $y_F = y_B = 18,33 \text{ см}$ $z_F = z_B = 20 \text{ см}$

$$a_Y = -\frac{419}{18,3} = -22,9 \text{ см} \quad a_Z = -\frac{126}{20} = -6,3 \text{ см}$$

На расчётной схеме на координатных осях Y и Z откладываем отрезки a_Y и a_Z . И через две точки проводим нулевую линию.

2. Из условия прочности определить величину допускаемой силы $[F]$.

Определяем положение опасных точек. Опасные точки — это точки наиболее удалённые от нейтральной линии и в этих точках нормальные напряжения принимают экстремальное значение.

Точка B , располагается в сжатой зоне

$$y_B = y_{on}^{c\mathcal{M}} = 18,33 \text{ cm} \qquad z_B = z_{on}^{c\mathcal{M}} = 20 \text{ cm}$$

Точка **D**, располагается в растянутой зоне

$$y_D = y_{on}^{pacm} = -41,67 \text{ cm} \quad z_D = z_{on}^{pacm} = -20 \text{ cm}$$

Условия прочности:

$$\sigma_{\max}^{pacm} = \left| \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \times y_{on}^{pacm}}{i_Z^2} + \frac{z_F \times z_{on}^{pacm}}{i_Y^2} \right) \right| \leq R_t$$

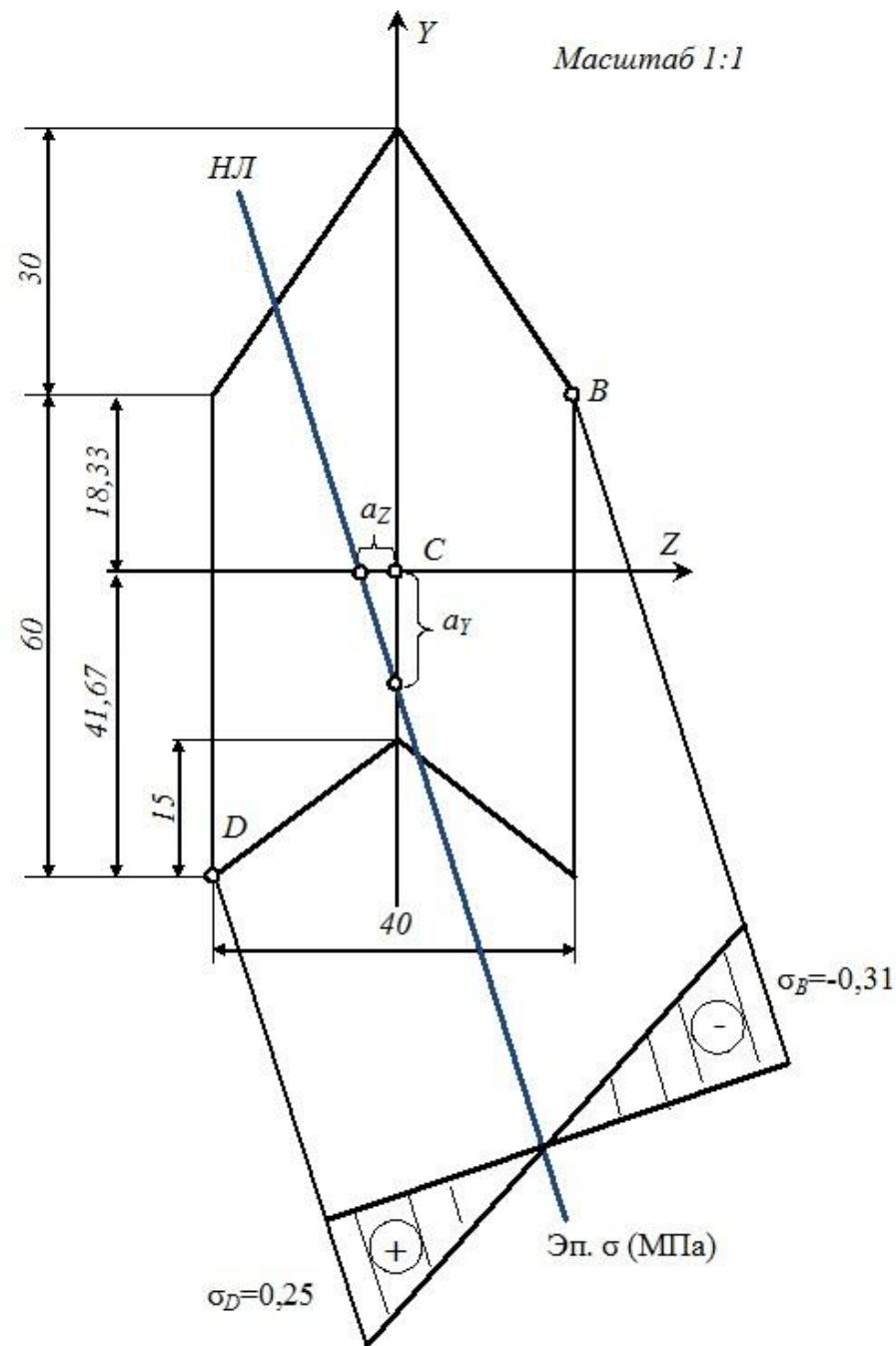
$$\sigma_{\max}^{\mathcal{CH}} = \left| \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \times y_{on}^{\mathcal{CH}}}{i_Z^2} + \frac{z_F \times z_{on}^{\mathcal{CH}}}{i_Y^2} \right) \right| \leq R_c, \text{ здесь}$$

$y_{on}^{раст}$ и $z_{on}^{раст}$ – координаты опасной точки в растянутой зоне

$y_{on}^{сж}$ и $z_{on}^{сж}$ – координаты опасной точки в сжатой зоне

A – суммарная площадь поперечного сечения

Из условий прочности определяем значения допускаемой нагрузки:



$$[F]_{расм} \leq \frac{A \times R_t}{\left| 1 + \frac{y_F \times y_{on}^{расм}}{i_Z^2} + \frac{z_F \times z_{on}^{расм}}{i_Y^2} \right|} = \frac{2700 \times 10^{-4} \times 0,25 \times 10^3}{\left| 1 + \frac{18,33 \times (-41,67)}{419} + \frac{20 \times (-20)}{126} \right|} = 16,92 \text{ кН}$$

$$[F]_{сжс} \leq \frac{A \times R_c}{\left| 1 + \frac{y_F \times y_{on}^{сжс}}{i_Z^2} + \frac{z_F \times z_{on}^{сжс}}{i_Y^2} \right|} = \frac{2700 \times 10^{-4} \times 2,5 \times 10^3}{\left| 1 + \frac{18,33 \times 18,33}{419} + \frac{20 \times 20}{126} \right|} = 135,54 \text{ кН}$$

Из двух найденных значений сил выбираем минимальное. Принимаем $[F]=16,92 \text{ кН}$.

3. При силе равной $[F]$, вычислить нормальные напряжения в точках сечения, наиболее удалённых от нейтральной оси в зонах растяжения и сжатия. Построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении стержня.

Определяем напряжения в опасных точках:

$$\sigma_D = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \times y_A}{i_Z^2} + \frac{z_F \times z_A}{i_Y^2} \right) = \frac{-16,92 \times 10^3}{2700 \times 10^{-4}} \left(1 + \frac{18,33 \times (-41,67)}{419} + \frac{20 \times (-20)}{126} \right) = 0,25 \text{ МПа}$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \times y_B}{i_Z^2} + \frac{z_F \times z_B}{i_Y^2} \right) = \frac{-16,92 \times 10^3}{2700 \times 10^{-4}} \left(1 + \frac{18,33 \times 18,33}{419} + \frac{20 \times 20}{126} \right) = -0,31 \text{ МПа}$$

Знак силы F подставляется по смыслу, так как сила сжимающая, то её значение отрицательное.

На расчётной схеме через опасные точки проводим касательные параллельные нулевой линии и строим эпюру нормальных напряжений.

4. Построить ядро сечения

Для построения ядра сечения, необходимо по всему контуру поперечного сечения провести касательные, которыми являются нулевые линии. При проведении касательных внутренние углы надо обходить.

Для определения координат ядровых точек воспользуемся соотношениями:

$$y_{Fя}^{(i)} = -\frac{i_z^2}{a_y^{(i)}} \quad z_{Fя}^{(i)} = -\frac{i_y^2}{a_z^{(i)}} \quad , \text{здесь}$$

$a_y^{(i)}$ и $a_z^{(i)}$ – отрезки, которые нулевая линия отсекает на координатных осях

$i_y^2 = 126 \text{ см}^2$ $i_z^2 = 419 \text{ см}^2$ – квадраты радиусов инерции поперечного сечения

Нулевая линия 1-1

$$a_y^{(1)} = 48,33 \text{ см} \quad a_z^{(1)} = -32,22 \text{ см}$$

$$y_{Fя}^{(1)} = -\frac{419}{48,33} = -8,67 \text{ см} \quad z_{Fя}^{(1)} = -\frac{126}{-32,22} = 3,91 \text{ см}$$

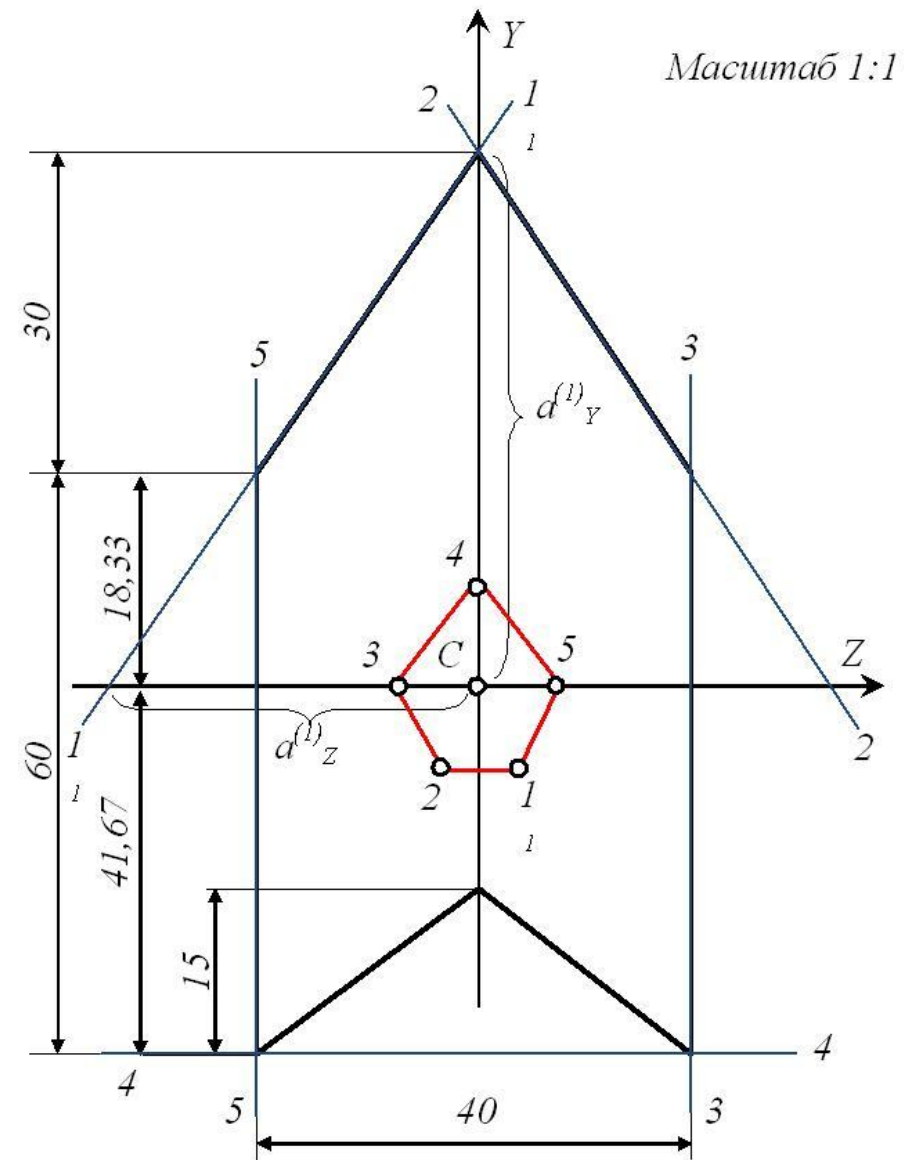


Рисунок 3

Нулевая линия 2-2

$$a_y^{(2)} = 48,33 \text{ см} \quad a_z^{(2)} = 32,22 \text{ см} \quad y_{Fя}^{(2)} = -\frac{419}{48,33} = -8,67 \text{ см} \quad z_{Fя}^{(2)} = -\frac{126}{32,22} = -3,91 \text{ см}$$

Нулевая линия 3-3

$$a_y^{(3)} = \infty \quad a_z^{(3)} = 20 \text{ см} \quad y_{Fя}^{(3)} = -\frac{419}{\infty} = 0 \text{ см} \quad z_{Fя}^{(3)} = -\frac{126}{20} = -6,3 \text{ см}$$

Нулевая линия 4-4

$$a_y^{(4)} = -41,67 \text{ см} \quad a_z^{(4)} = \infty \quad y_{Fя}^{(4)} = -\frac{419}{-41,67} = 10,06 \text{ см} \quad z_{Fя}^{(4)} = -\frac{126}{\infty} = 0 \text{ см}$$

Нулевая линия 5-5

$$a_y^{(5)} = \infty \quad a_z^{(5)} = -20 \text{ см} \quad y_{Fя}^{(5)} = -\frac{419}{\infty} = 0 \text{ см} \quad z_{Fя}^{(5)} = -\frac{126}{-20} = 6,3 \text{ см}$$

Координаты ядровых точек откладываем в масштабе относительно центральных осей Y и Z . Ядровые точки соединяем прямыми линиями и получаем ядро сечения.