ФУНКЦИЯ

Определение. Зависимость переменной y от переменной x называется **функцией**, если каждому значению x соответствует единственное значение y	**Определение. Числовой функцией** с областью определения D называется зависимость, при которой каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное число y, обычно обозначаемое $y = f(x)$
Функция обозначается или одной буквой f (или $f(x)$), или равенством $y = f(x)$	**Термины:** x — независимая переменная, или аргумент, y — зависимая переменная, или функция, $f(x_0)$ — значение функции f в точке x_0

Область определения и множество значений функции

Область определения функции (D) — множество тех значений, которые может принимать аргумент (см. также табл. 25).	**Множество значений функции** (E) — это множество тех значений, которые может принимать сама функция при всех значениях аргумента из области определения (**это все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения**)

Пример. $f(x) = \sqrt{x-1}$

Область определения (О.О.): $x - 1 \geq 0$,
т.е. $x \in [1; +\infty)$ $(\boldsymbol{D_f = [1; +\infty)})$

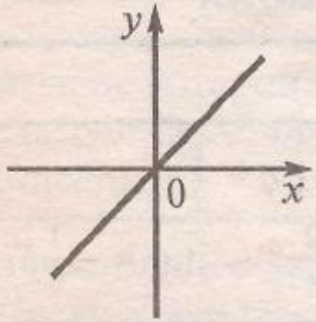
Множество значений: $[0; +\infty)$ $\boldsymbol{E_f = [0; +\infty)}$
(так как $f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0$ для всех $x \in D_f$
и принимает все значения от 0 до $+\infty$)

График функции

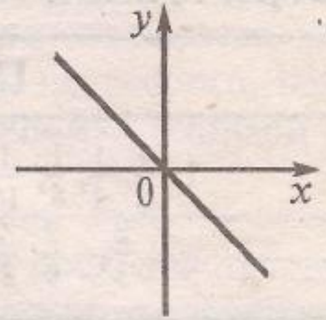
Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где первая координата x «пробегает» всю область определения функции f (а вторая координата — это соответствующее значение функции f в точке x)

Графики некоторых элементарных функций

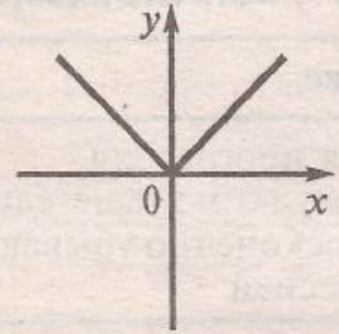
$y = x$



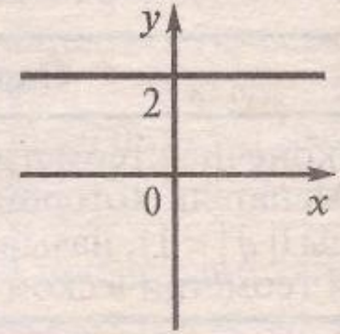
$y = -x$



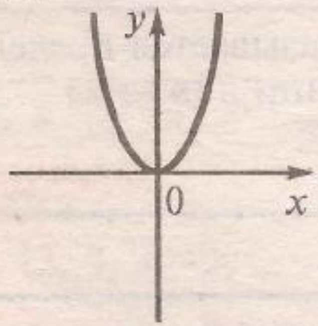
$y = |x|$



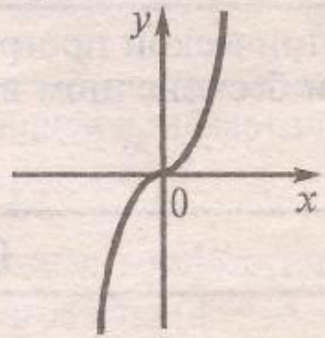
$y = 2$



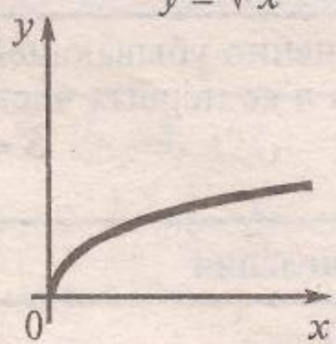
$y = x^2$



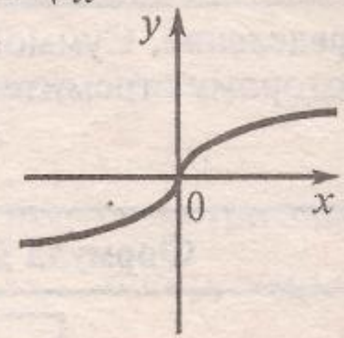
$y = x^3$



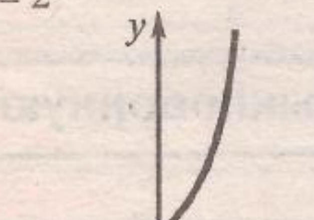
$y = \sqrt{x}$



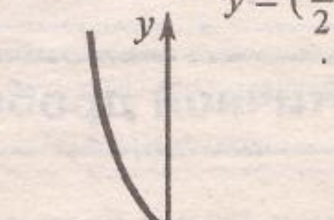
$y = \sqrt[3]{x}$



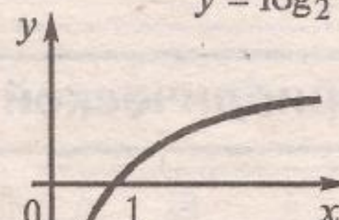
$y = 2^x$



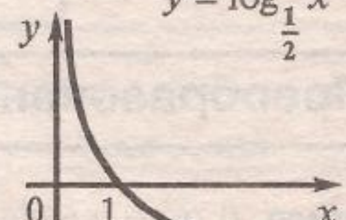
$y = (\frac{1}{2})^x$



$y = \log_2 x$



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$



КАК НАЙТИ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

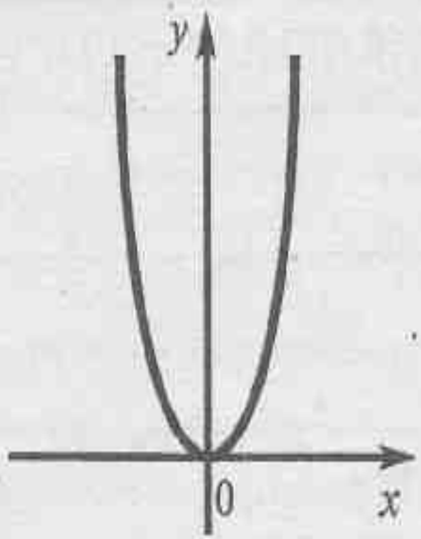
№	Вид функции	Ограничения ($f(x)$ и $g(x)$ — существуют!)	Формулировка
1	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменатель дроби не равен нулю
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$	Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение
4	$y = \log_{f(x)} a \quad (a > 0)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основании логарифма может стоять только положительное выражение, не равное единице
5	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ (k — целое)
6	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k,\ k \in Z$	Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное πk (k — целое)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$\lvert f(x) \rvert \leq 1$	Под знаками арксинуса и арккосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$		
	а) α — натуральное	x — любое	
	б) α — целое отрицательное или нуль	$x \neq 0$	
	в) α — положительное не целое число	$x \geq 0$	
	г) α — отрицательное не целое число	$x > 0$	

ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Четная функция	Нечетная функция
Определение. Функция f называется **четной**, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из ее области определения $$f(-x) = f(x)$$	**Определение.** Функция f называется **нечетной**, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из ее области определения $$f(-x) = -f(x)$$
Свойство	Свойство
График четной функции симметричен относительно оси $0y$	*График нечетной функции симметричен относительно начала координат*

<table>
<tr><th>Примеры четных функций</th><th>Примеры нечетных функций</th></tr>
<tr><td>

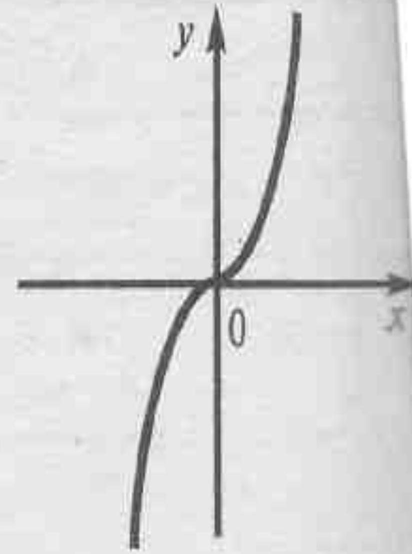
$y = x^2$



$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

</td><td>

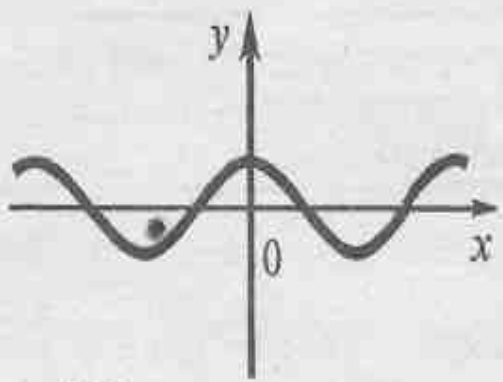
$y = x^3$



$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

</td></tr>
<tr><td>

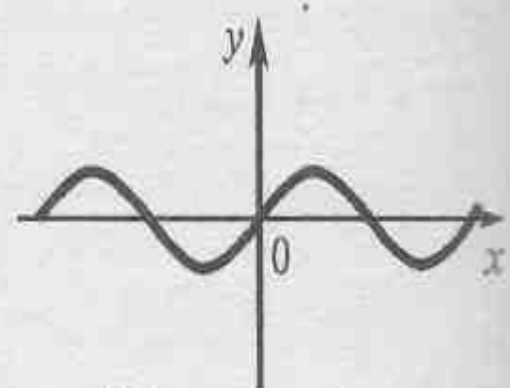
$y = \cos x$



$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

</td><td>

$y = \sin x$



$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

</td></tr>
</table>

ВОЗРАСТАЮЩИЕ И УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Возрастающая функция	**Убывающая функция**
Определение. Функция f называется **возрастающей** на некотором множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции $f(x)$ — **возрастает,** если для любых $x_1 \in P$, $x_2 \in P$ $\boxed{x_1 > x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$	**Определение.** Функция f называется **убывающей** на некотором множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции $f(x)$ — **убывает,** если для любых $x_1 \in P$, $x_2 \in P$ $\boxed{x_1 > x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$
Свойства	
1. Если функция f возрастает на некотором множестве P, то большему значению функции соответствует **большее** значение аргумента из этого множества $f(x)$ — возрастает (на P) $f(x_1) > f(x_2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 > x_2}$	1. Если функция f убывает на некотором множестве P, то большему значению функции соответствует **меньшее** значение аргумента из этого множества $f(x)$ — убывает (на P) $f(x_1) > f(x_2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 < x_2}$
2. ***Сумма нескольких возрастающих на данном множестве функций является возрастающей функцией на этом множестве***	2. ***Сумма нескольких убывающих на данном множестве функций является убывающей функцией на этом множестве***
3. Если функция f возрастает, то обратная к ней функция также возрастает	3. Если функция f убывает, то обратная к ней функция также убывает

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

Свойства

1. Если число T — период функции f, то число $k \cdot T$ ($k \in N$) также является периодом этой функции

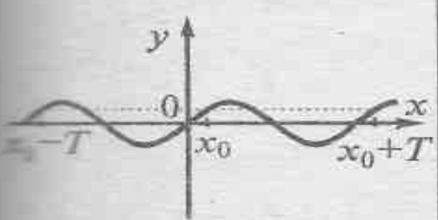
2. *Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = Af(kx + b)$ также периодическая и ее период равен $\frac{T}{|k|}$ (A, k, b — постоянные числа и $k \neq 0$)*

3. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то сложная функция (функция от функции) $y = \varphi(f(x))$ также периодическая с периодом T (хотя, возможно, этот период и не является наименьшим по абсолютной величине)

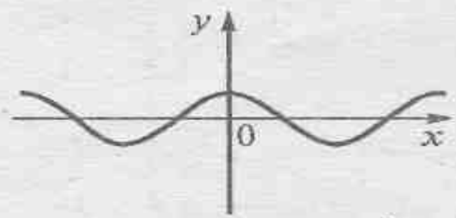
4. *Для построения графика периодической функции с периодом T достаточно построить график на отрезке длиной T, а далее — параллельно перенести этот график вдоль оси Ox на расстояние nT ($n \in N$) влево и вправо*

Примеры периодических функций

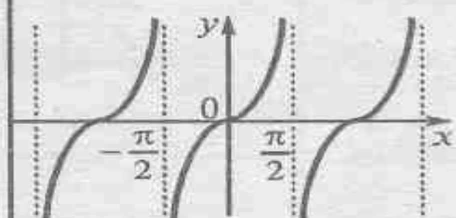
$y = \sin x$ $\boxed{T = 2\pi}$



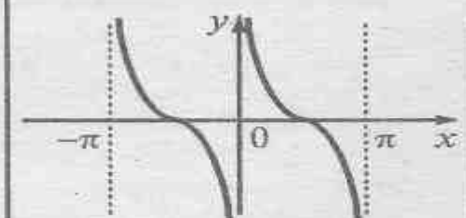
$y = \cos x$ $\boxed{T = 2\pi}$



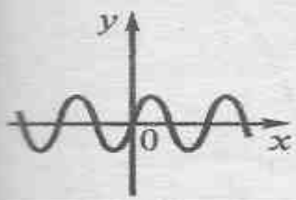
$y = \operatorname{tg} x$ $\boxed{T = \pi}$



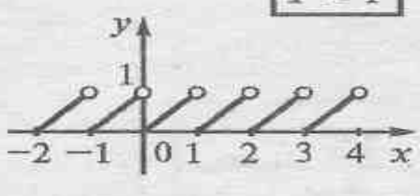
$y = \operatorname{ctg} x$ $\boxed{T = \pi}$



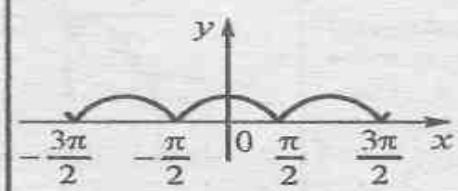
$y = \sin 3x$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{3}}$



$y = \{x\}$ — дробная часть x $\boxed{T = 1}$

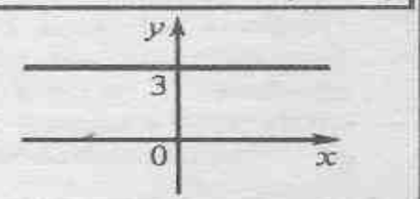


$y = |\cos x|$ $\boxed{T = \pi}$



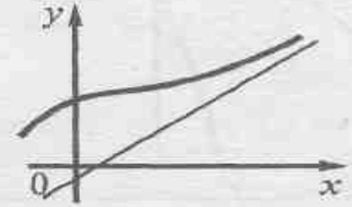
$y = 3$

$\boxed{T \text{ — любое число } (T \neq 0)}$



АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Определение. Асимптота кривой — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при удалении ее в бесконечность



Вертикальные асимптоты ($x = a$)

$x = a$ — вертикальная асимптота

при $x \to a$ $f(x) \to \infty$

Вертикальная асимптота $x = a$ может быть в точке a, если точка a ограничивает открытые промежутки области определения данной функции и возле точки a функция уходит в бесконечность

Примеры вертикальных асимптот

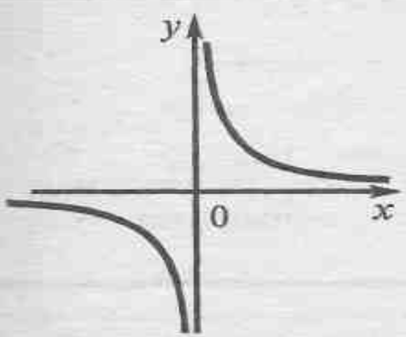
$y = \dfrac{1}{x}$

О.О. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

При $x \to 0$ (справа) $y \to +\infty$

При $x \to 0$ (слева) $y \to -\infty$

$x = 0$ — вертикальная асимптота

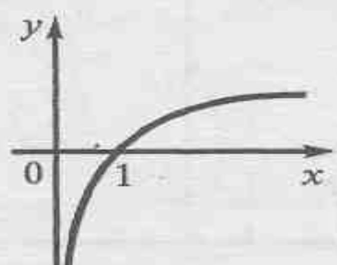


$y = \ln x$

О.О. $x \in (0; +\infty)$

При $x \to 0$ (справа) $y \to -\infty$

$x = 0$ — вертикальная асимптота



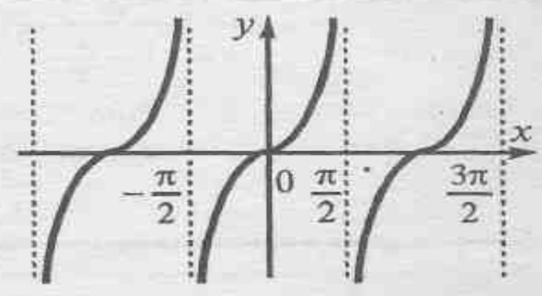
$y = \operatorname{tg} x$

О.О. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

При $x \to \dfrac{\pi}{2}$ (слева) $y \to +\infty$

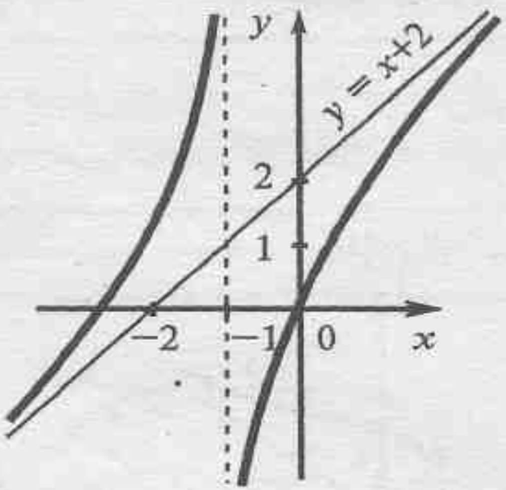
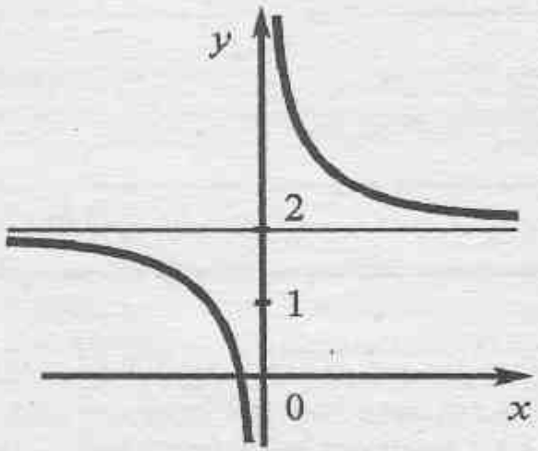
При $x \to \dfrac{\pi}{2}$ (справа) $y \to -\infty$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ — вертикальная асимптота ($x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$)



Наклонные и горизонтальные асимптоты ($y = kx + b$)

1. ***Если $f(x)$ — дробно-рациональная функция, в которой степень числителя на единицу больше степени знаменателя, то выделяем целую часть и используем определение асимптоты***

Пример 1	**Пример 2**
$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x+1} = x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$ При $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x+1} \to 0$, т.е. $f(x) \to x+2$, тогда $y = x+2$ — наклонная асимптота (кроме того, $x = -1$ — вертикальная асимптота — см. график)  	$f(x) = \dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$ При $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0$, т.е. $f(x) \to 2$, тогда $y = 2$ — горизонтальная асимптота (кроме того, $x = 0$ — вертикальная асимптота — см. график) 

2. ***В общем случае уравнения наклонных и горизонтальных асимптот $y = kx + b$ могут быть получены с использованием формул***

$$\boxed{k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)}$$

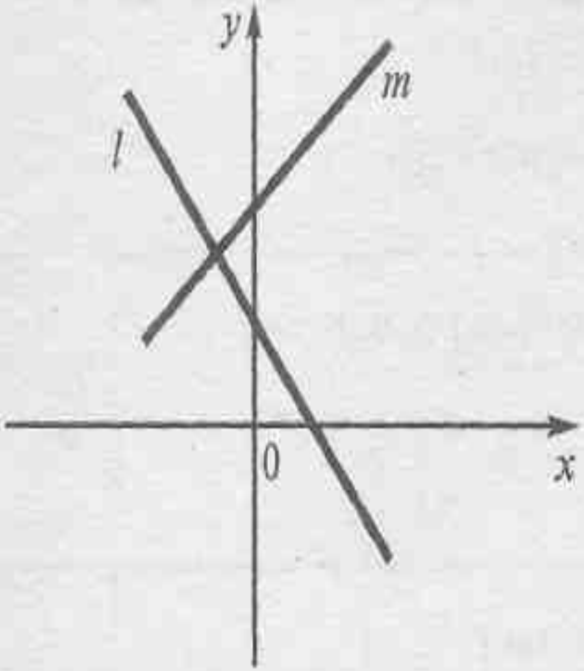
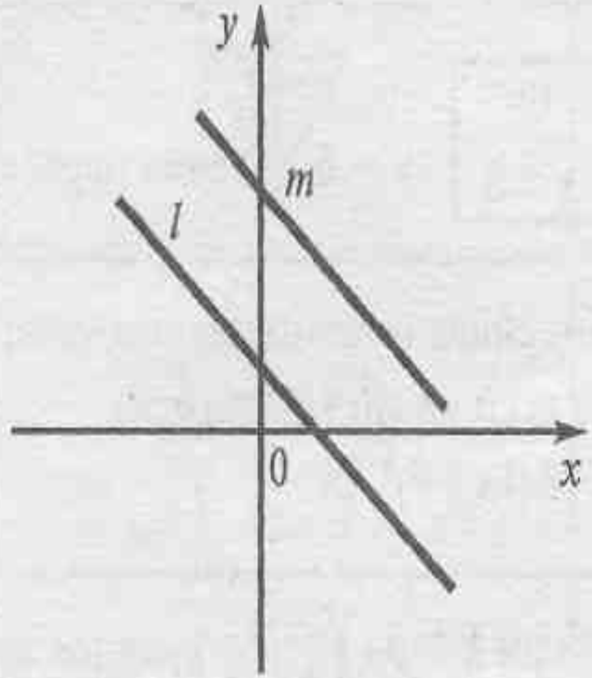
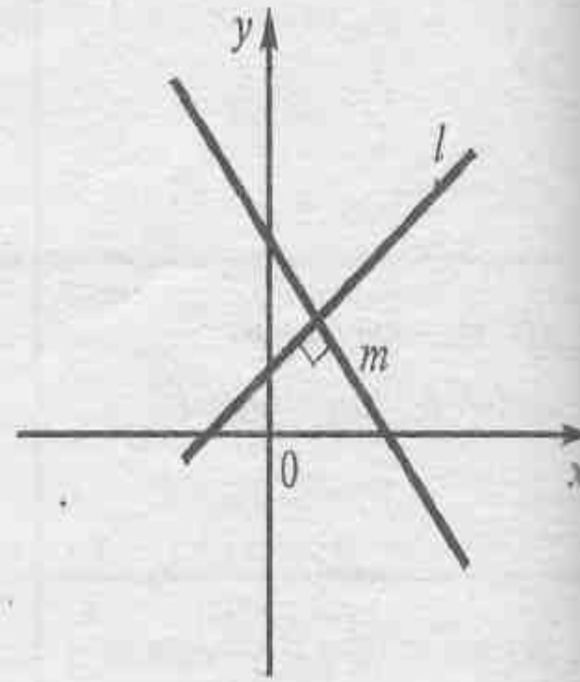
ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Линейной функцией называют функцию вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Свойства

1. *Область определения* (D_y)	$x \in \mathbf{R}$ $(D_y = R)$
2. *Множество значений* (E_y)	1) при $k \neq 0$ $E_y = (-\infty; +\infty)$ 2) при $k = 0$ $y = b$
3. *Четность, нечетность*	1) при $k \neq 0$ и $b \neq 0$ — функция ни четная, ни нечетная 2) при $k = 0$ — четная 3) при $b = 0$ и $k \neq 0$ — нечетная

Взаимное расположение графиков линейных функций

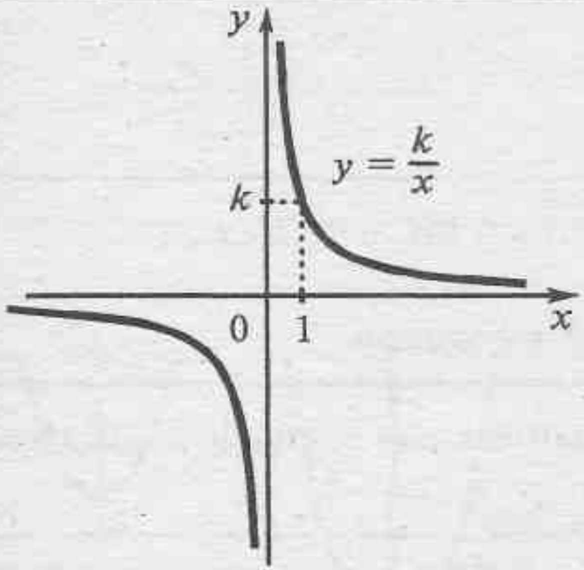
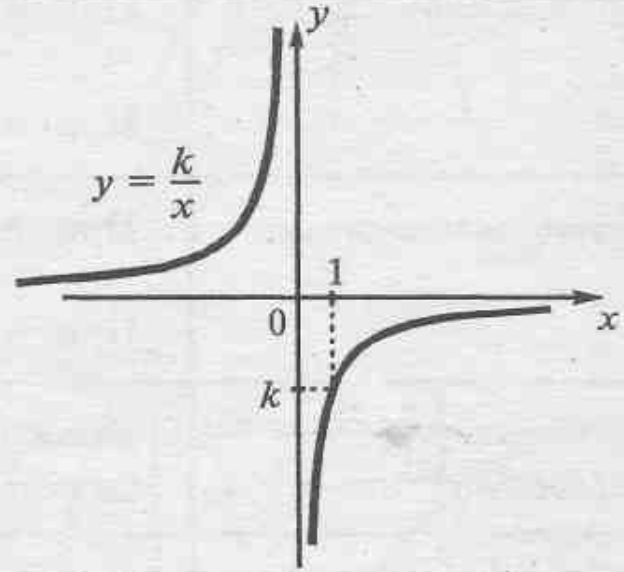
Условие пересечения прямых	Условие параллельности прямых	Условие перпендикулярности прямых
$y = k_1x + b_1$ — прямая l; $y = k_2x + b_2$ — прямая m		
		
Если $k_1 \neq k_2$, то прямые l и m пересекаются в одной точке	$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$	$l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) И ЕЕ ГРАФИК

Свойства	
1. *Область определения*	$x \neq 0$ ($D_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$)
2. *Множество значений*	$y \neq 0$ ($E_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$)
3. *Четность, нечетность*	Функция **нечетная** ($f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$), и ее график симметричен относительно начала координат
4. *Точки пересечения с осями координат*	Поскольку $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то точек пересечения с осями координат нет
5. *Непрерывность и дифференцируемость*	Функция $y = \frac{k}{x}$ непрерывна в каждой точке своей области определения и имеет производную $y' = -\frac{k}{x^2}$ ($y' \neq 0$ — критических точек нет)
6. *Возрастание и убывание*	1) при $k > 0$ ($y' < 0$) функция **убывает на каждом интервале** $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ 2) при $k < 0$ ($y' > 0$) функция **возрастает на каждом интервале** $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

7. *Асимптоты* (см. табл. 31)	1) при $x \to \infty$ $y = \frac{k}{x} \to 0$, т.е. $\boxed{y = 0 \text{ — горизонтальная асимптота}}$ 2) при $x \to 0$ справа $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} +\infty \text{ при } k > 0 \\ -\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$ при $x \to 0$ слева $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} -\infty \text{ при } k > 0 \\ +\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$, т.е. $\boxed{x = 0 \text{ — вертикальная асимптота}}$

8. ***График функции*** $y = \frac{k}{x}$ *— кривая, состоящая из двух ветвей (симметричная относительно начала координат), которая* ***называется гиперболой*** *(при $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV четвертях)*

$k > 0$	$k < 0$
	

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Квадратичной функцией называется функция вида

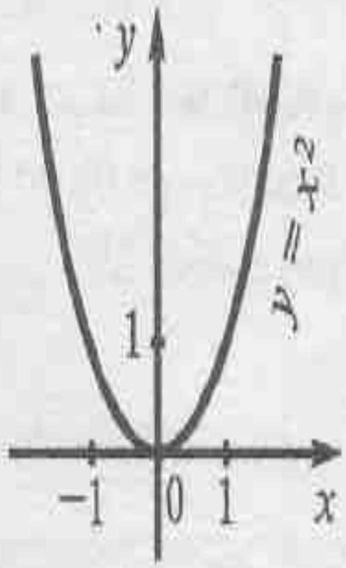
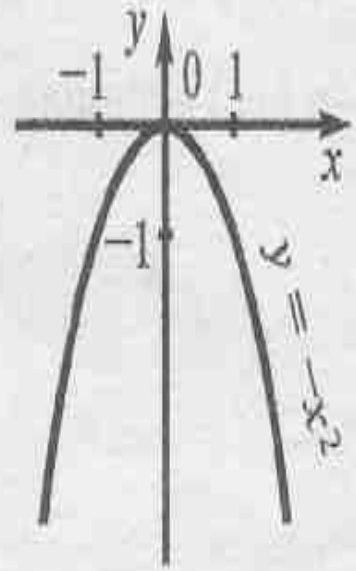
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0$$

Свойства

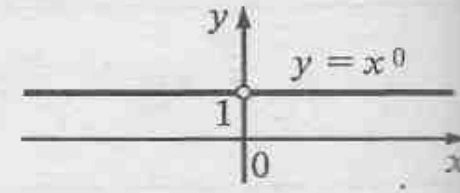
Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ всегда является **парабола**, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$	Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0) = -\frac{D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$. Ось симметрии параболы $x = x_0$

1. *Область определения* (D_y)	$x \in R \quad (D_y = R)$
2. *Множество значений* (E_y)	При $a > 0$ $E_y = [y_0; +\infty)$ При $a < 0$ $E_y = (-\infty; y_0]$
3. *Четность, нечетность*	При $b \neq 0$ функция ни четная, ни нечетная При $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ четная
4. *Непрерывность и дифференцируемость*	Квадратичная функция непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой $y' = 2ax + b$
5. *Возрастание и убывание, экстремумы*	При $a > 0$ убывает на $(-\infty; x_0]$ $(y' < 0)$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$ $(y' > 0)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка минимума, $y_0 = y(x_0)$ — минимум При $a < 0$ возрастает на $(-\infty; x_0]$ $(y' > 0)$ и убывает на $[x_0; +\infty)$ $(y' < 0)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка максимума, $y_0 = y(x_0)$ — максимум

Расположение некоторых графиков квадратичных функций

$a > 0$	$a < 0$
$y = x^2$	$y = -x^2$
	
Наименьшее значение – 0 (при $x = 0$), наибольшего нет	Наибольшее значение – 0 (при $x = 0$), наименьшего нет

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

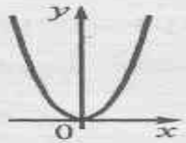
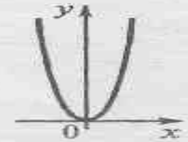
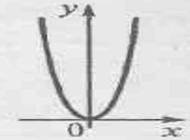
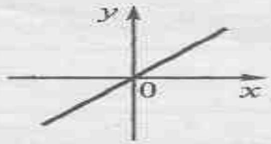
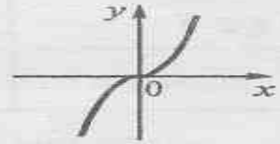
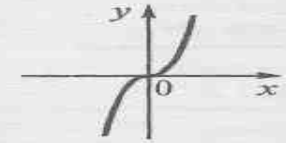
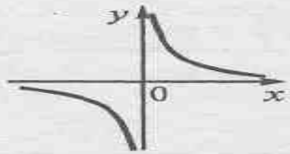
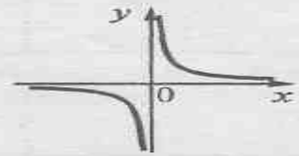
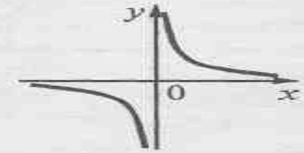
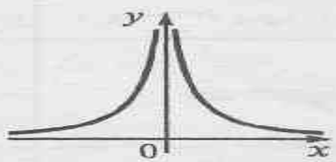
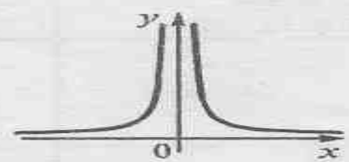
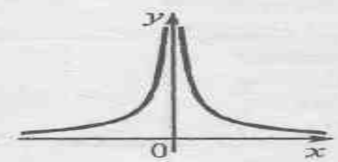
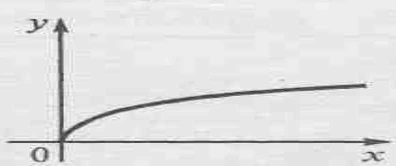
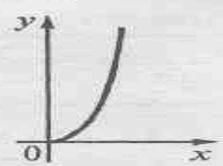
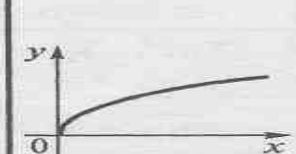
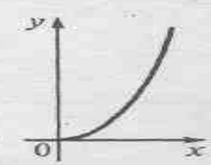
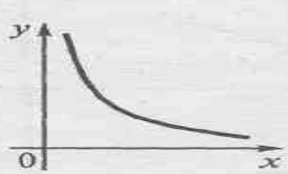
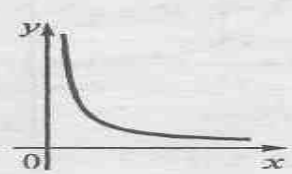
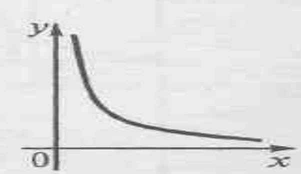
Определение	Особый случай ($\alpha = 0$)
Функция вида $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число, называется степенной функцией	Если $\alpha = 0$, то $y = x^{\alpha} = x^{0} = 1$ (при $x \neq 0$) 

Свойства функции $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)

$f(x) = x^{\alpha}$	α — натуральное		α — целое отрицательное		α — не целое	
	четное	нечетное	четное	нечетное	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
1. *Область определения — D_f*	R		$x \neq 0$		$x \geq 0$ $[0; +\infty)$	$x > 0$ $(0; +\infty)$
2. *Множество значений — E_f*	$[0; +\infty)$	R	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
3. *Четность, нечетность*	четная	нечетная	четная	нечетная	ни четная, ни нечетная	
4. *Периодичность*	не периодическая					
5. *Пересечение с осями координат*	$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$		нет		$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$	нет

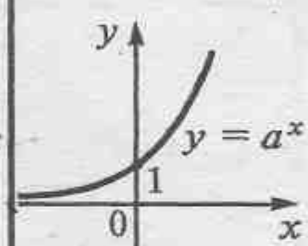
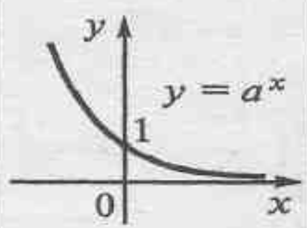
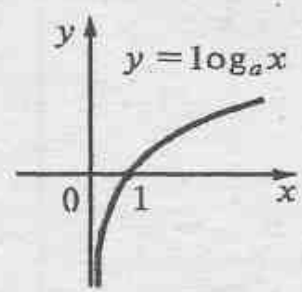
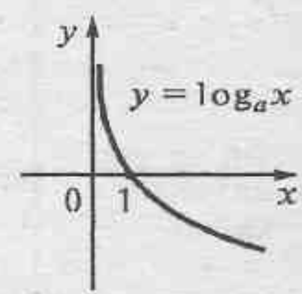
6. *Производная*	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$					
7. *Возрастание и убывание*	$(-\infty; 0)$ — убывает, $(0; +\infty)$ — возрастает	возрастает	$(-\infty; 0)$ — возрастает, $(0; +\infty)$ — убывает	$(-\infty; 0)$ — убывает, $(0; +\infty)$ — убывает	возрастает	убывает
8. *Экстремумы*	$\begin{cases} x_{\min} = 0, \\ y_{\min} = 0 \end{cases}$	нет			$\min\limits_{[0; +\infty)} f(x) = f(0) = 0$	нет
9. *Асимптоты*	нет		$x = 0$ и $y = 0$		нет	$x = 0$ и $y = 0$
10. *Выпуклость и точки перегиба*	$\cup$ *	при $\alpha \neq 1$ $(-\infty; 0)$ $\cap$ $(0; +\infty)$ $\cup$ 0 — точка перегиба	$(-\infty; 0)$ $\cup$ $(0; +\infty)$ $\cup$	$(-\infty; 0)$ $\cap$ $(0; +\infty)$ $\cup$	$0 < \alpha < 1$ $\cap$ $\alpha > 1$ $\cup$	$\cup$

Графики степенной функции ($y = x^{\alpha}$)

α — четное натуральное число	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	$y = x^{2n},\ n \in N$ 
α — нечетное натуральное число	$y = x^1$ 	$y = x^3$ 	$y = x^{2n+1},\ n \in N$ 
α — нечетное отрицательное число	$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}},\ n \in N$ 
α — четное отрицательное число	$y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}},\ n \in N$ 
α — не целое положительное число	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — не целое)  **$0 < \alpha < 1$**  **$\alpha > 1$**
α — не целое отрицательное число	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — не целое) 

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Показательная функция		Логарифмическая функция
Определение. Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$		**Определение. Логарифмической** функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$
Свойства		
1. *Область определения D_f*	$x \in R$ $\quad (D(a^x) = R)$	$x > 0$ $\quad (D(\log_a x) = (0; +\infty))$
2. *Множество значений E_f*	$y > 0$ $\quad (E(a^x) = (0; +\infty))$	$y \in R$ $\quad (E(\log_a x) = R)$
3. *Четность, нечетность*	Функция ни четная, ни нечетная	
4. *Пересечение с осями координат*	Пересечения с осью $\boxed{0x}$ нет ($a^x \neq 0$ при $a > 0$, $a \neq 1$) $\boxed{0y}$ $x = 0$, $y = a^0 = 1$	$\boxed{0x}$ $(y = 0)$ $\log_a x = 0$ при $x = a^0 = 1$ Пересечения с осью $\boxed{0y}$ нет ($x \neq 0$ по области определения)

5. *Непрерывность и производная*	Функция непрерывна и дифференцируема во всей области определения $(a^x)' = a^x \ln a$		$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	
6. *Промежутки знакопостоянства*	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
	Для всех $x \in \mathbb{R}$ $y = a^x > 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$		$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$ $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$ $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$
7. *Возрастание и убывание* (экстремумов нет)	возрастает	убывает	возрастает	убывает
8. *Асимптоты* (см. табл. 31)	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to 0$	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to 0$	При $x \to 0$ (справа) $y = \log_a x \to -\infty$,	$y = \log_a x \to +\infty$
	Т.е. прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота		Т.е. прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота	
	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to -\infty$
Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ — взаимно обратные функции, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. табл. 30)				
9. *Графики показательных и логарифмических функций*	 $a > 1$	 $0 < a < 1$	 $a > 1$	 $0 < a < 1$

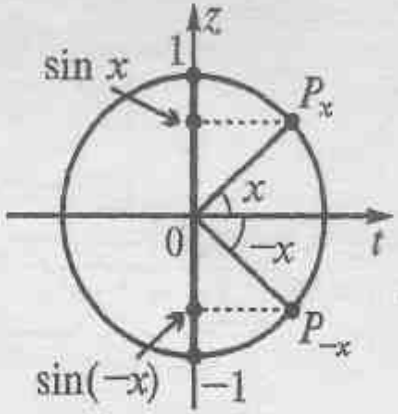
ФУНКЦИИ $y = \sin x$, $y = \cos x$ И ИХ ГРАФИКИ

$y = \sin x$
(определение см. в табл. 58)

1. ***Область определения***

x — любое число

$\boxed{D(\sin x) = R}$



2. ***Множество значений***

отрезок [-1; 1]

$\boxed{E(\sin x) = [-1;\ 1]}$

3. ***Функция нечетная***

$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$,

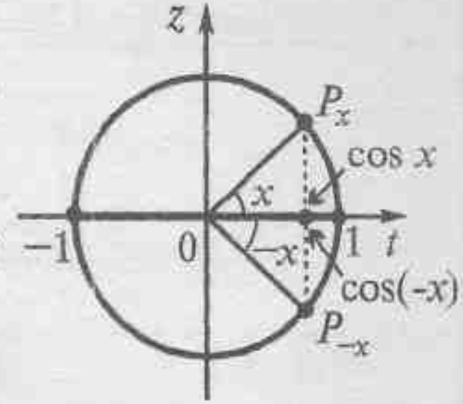
т.е. график симметричен относительно начала координат

$y = \cos x$
(определение см. в табл. 58)

1. ***Область определения***

x — любое число

$\boxed{D(\cos x) = R}$



2. ***Множество значений***

отрезок [-1; 1]

$\boxed{E(\cos x) = [-1;\ 1]}$

3. ***Функция четная***

$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$,

т.е. график симметричен относительно оси $0y$

---

4. ***Функция периодическая*** с наименьшим положительным периодом

$$\boxed{T = 2\pi}$$

$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x}$ $\qquad$ $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}$

Поэтому форма графика повторяется через 2π (его можно получить из любой части графика на интервале длиной 2π с помощью параллельного переноса этой части вдоль оси $0x$ на $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — см. ниже график)

5. *Точки пересечения с осями координат*

$\boxed{0y}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \sin 0 = 0 \end{cases}$ — график проходит через начало координат

$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ (\sin x = 0 \text{ при } x = \pi k), \\ x = \pi k, \ k \in Z \end{cases}$

$\boxed{0y}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \cos 0 = 1 \end{cases}$

$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ (\cos x = 0 \text{ при } x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k), \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z \end{cases}$

6. *Промежутки знакопостоянства*

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$

$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$

$\cos x > 0$ при $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$

$\cos x < 0$ при $x \in (\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$

7. *Функция непрерывна и имеет производную при любом значении аргумента*

$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

8. *Промежутки монотонности*

Функция **sin*x* возрастает** в каждом из промежутков $[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in Z$ и **убывает** в каждом из промежутков $[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in Z$

Функция **cos*x* возрастает** в каждом из промежутков $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in Z$ и **убывает** в каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$

9. *Экстремумы*

Функция принимает наибольшее значение, равное 1 $\mathbf{y_{max} = 1}$ — в точках

$y = \sin x$	$x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

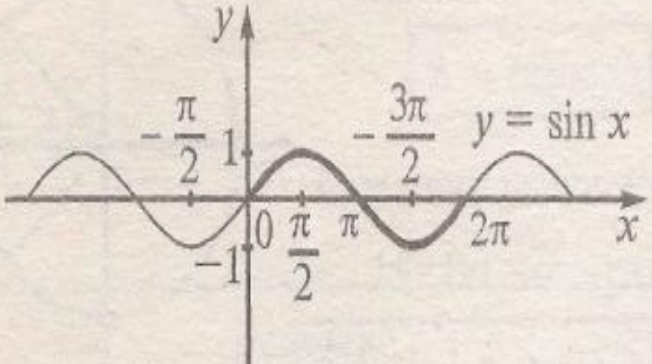
$y = \cos x$	$x_{max} = 2\pi k,\ k \in Z$

Функция принимает наименьшее значение, равное -1 $\mathbf{y_{min} = -1}$ в точках

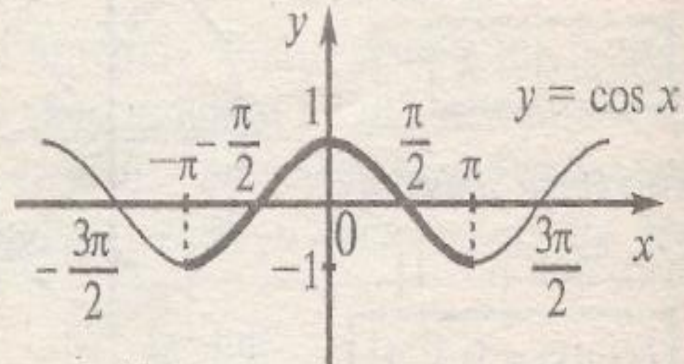
$y = \sin x$	$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$y = \cos x$	$x_{min} = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

10. *График*



Кривая — **синусоида**



Кривая — **косинусоида**

Поскольку $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (табл. 60), то график функции $y = \cos x$ получается из синусоиды $y = \sin x$ параллельным переносом вдоль оси $0x$ на $(-\frac{\pi}{2})$ (табл. 32)

ФУНКЦИИ $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ И ИХ ГРАФИКИ

$y = \mathrm{tg}x$ (определение см. в табл. 58)	$y = \mathrm{ctg}x$ (определение см. в табл. 58)

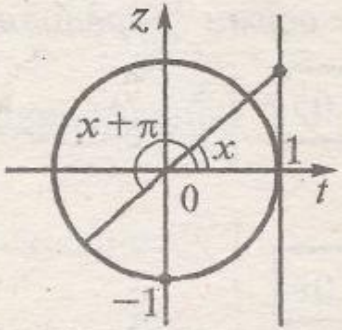
$y = \mathrm{tg}x$

1. ***Область определения***

$$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z}$$

2. ***Множество значений***
вся числовая прямая, т.е.

$$\boxed{E(\mathrm{tg}x) = R}$$



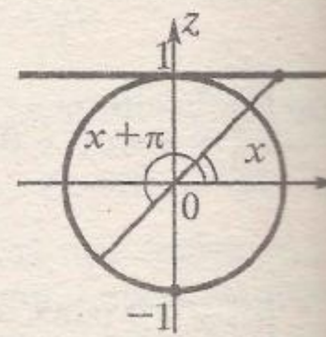
$y = \mathrm{ctg}x$

1. ***Область определения***

$$\boxed{x \neq \pi k, \quad k \in Z}$$

2. ***Множество значений***
вся числовая прямая, т.е.

$$\boxed{E(\mathrm{ctg}x) = R}$$



3. ***Функция нечетная***

$$\boxed{\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x} \qquad \boxed{\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x}$$

(т.е. график симметричен относительно начала координат)

4. ***Функция периодическая*** с наименьшим положительным периодом

$$\boxed{T = \pi}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x} \qquad \boxed{\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}x}$$

Поэтому форма графика повторяется через π (его можно получить из любой части графика на интервале длиной π с помощью параллельного переноса этой части вдоль оси $0x$ на πk, $k \in Z$, (см. ниже график)

5. ***Точки пересечения с осями координат***

$y = \mathrm{tg}x$

$\boxed{0y}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \mathrm{tg}0 = 0 \end{cases}$ — график проходит через начало координат

$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ \ (\mathrm{tg}x = 0 \text{ при } x = \pi k) \\ x = \pi k, \ \ k \in Z \end{cases}$

$y = \mathrm{ctg}x$

Пересечения с осью $\boxed{0y}$ нет
($x \neq 0$ по области определения)

$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ \ (\mathrm{ctg}x = 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k) \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z \end{cases}$

6. *Промежутки знакопостоянства*

$\mathrm{tg}x > 0$ при $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$	$\mathrm{ctg}x > 0$ при $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}x < 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$	$\mathrm{ctg}x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$

7. *Функция непрерывна в каждой точке своей области определения*

(и на любом интервале, входящем в область определения) и ***имеет производную*** при любом значении аргумента из области определения функции

$$\boxed{(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\boxed{(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

8. *Промежутки монотонности*

Функция **tgx возрастает** в каждом из промежутков $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$	Функция **ctgx убывает** в каждом из промежутков $(\pi k; \pi + \pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$

При этом функция принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому наибольшего и наименьшего значения функция не имеет

9. *Асимптоты* (см. табл. 31)

1) при $x \to -\frac{\pi}{2}$ справа

$y = \operatorname{tg}x \to -\infty$;

2) при $x \to \frac{\pi}{2}$ слева

$y = \operatorname{tg}x \to +\infty$, т.е.

$x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ — **вертикальные асимптоты**,

а в силу периодичности

и $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$

1) при $x \to 0$ справа

$y = \operatorname{ctg}x \to +\infty$;

2) при $x \to \pi$ слева

$y = \operatorname{ctg}x \to -\infty$, т.е.

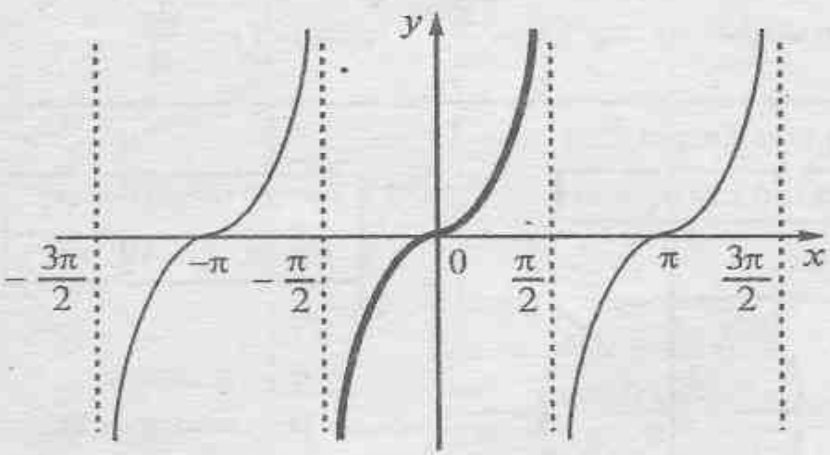
$x = 0$ и $x = \pi$ — **вертикальные асимптоты**,

а в силу периодичности

и $x = \pi k$, $k \in Z$

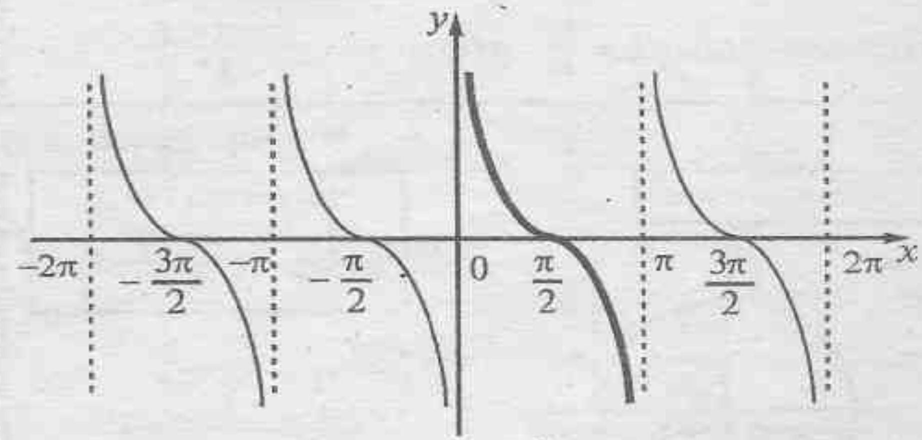
10. *График*

$y = \operatorname{tg}x$



Кривая — **тангенсоида**

$y = \operatorname{ctg}x$



Кривая — **котангенсоида**

Поскольку $\operatorname{ctg}x = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ (табл. 62), то график функции $y = \operatorname{ctg}x$ — тангенсоида ($y = \operatorname{tg}x$), симметрично отображенная относительно оси $0x$ и параллельно перенесенная вдоль оси $0y$ на $\frac{\pi}{2}$ (табл. 32)

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

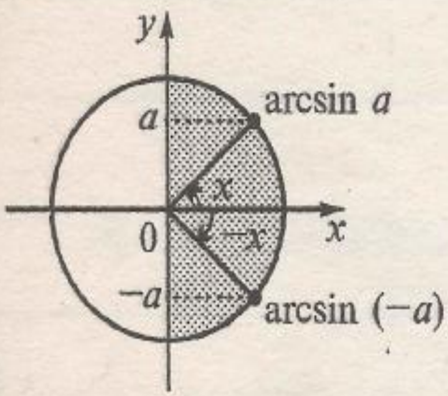
Определение выражений arcsin a, arccos a, arctg$a$, arcctg$a$

arcsin a $(|a| \le 1)$	**arccos a** $(|a| \le 1)$
Арксинусом числа a называется угол (число) из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a	Арккосинусом числа a называется угол (число) из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a
$\boxed{\arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \sin\varphi = a \end{matrix}}$	$\boxed{\arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi \in [0; \pi] \\ \cos\varphi = a \end{matrix}}$
Примеры. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$	**Примеры.** $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(-1) = \pi$

Из определения получаем формулы

$$\boxed{\sin(\arcsin a) = a}$$

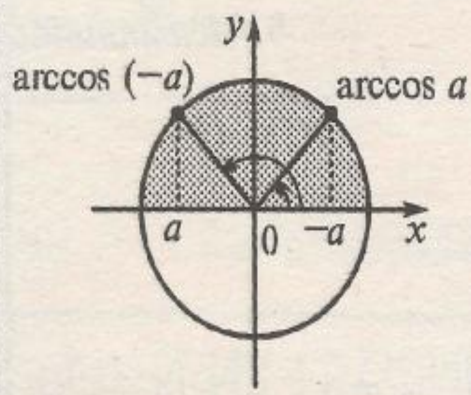
$$\boxed{\arcsin(\sin\varphi) = \varphi, \text{ если } \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}]}$$



$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$$

$$\boxed{\cos(\arccos a) = a}$$

$$\boxed{\arccos(\cos\varphi) = \varphi, \text{ если } \varphi \in [0; \pi]}$$



$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$$

arctg *a*

Арктангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\varphi = a\end{array}}$$

Примеры. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

arcctg *a*

Арккотангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a

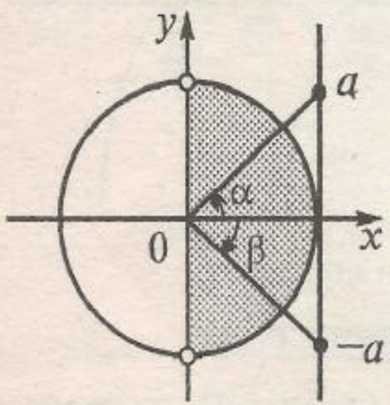
$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\varphi \in (0; \pi) \\ \operatorname{ctg}\varphi = a\end{array}}$$

Примеры. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

Из определения получаем формулы

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha, \\ \text{если } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\end{array}}$$



$\alpha = \operatorname{arctg} a$,

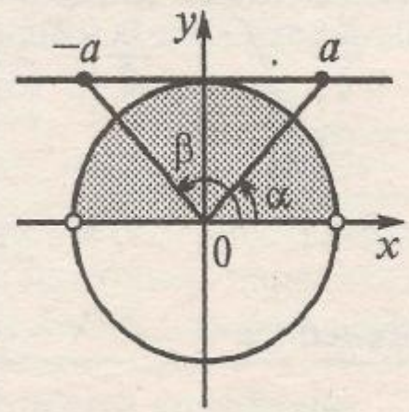
$\beta = \operatorname{arctg}(-a)$,

$\beta = -\alpha$, т.е.

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha, \\ \text{если } \alpha \in [0; \pi]\end{array}}$$



$\alpha = \operatorname{arcctg} a$,

$\beta = \operatorname{arcctg}(-a)$,

$\beta = \pi - \alpha$, т.е.

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$$

Простейшие соотношения между обратными тригонометрическими функциями

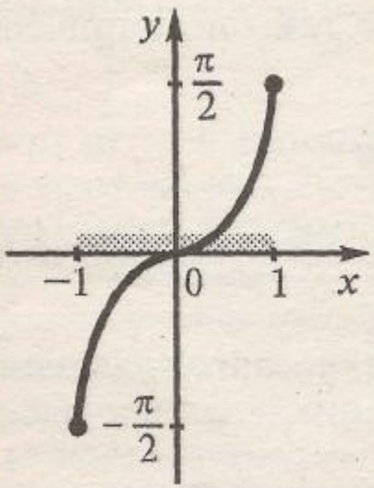
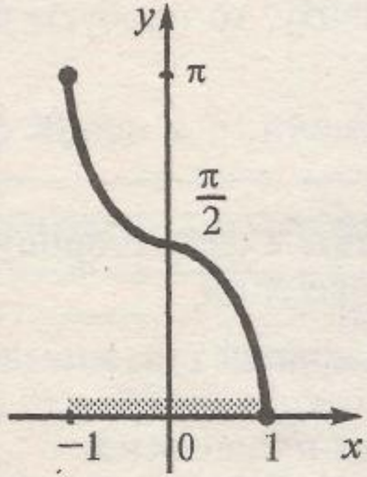
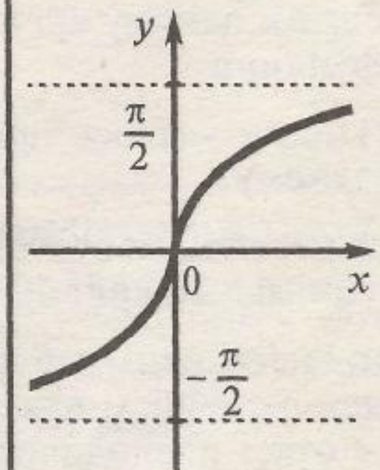
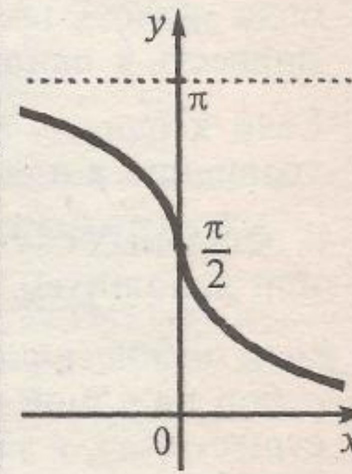
$$\boxed{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}}$$

Графики обратных тригонометрических функций

Если функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то она имеет обратную функцию на этом интервале, причем график обратной функции симметричен графику прямой функции относительно прямой $y = x$ (см. табл. 30)

Прямая функция	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Интервал монотонности (из области определения)	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (возрастает)	$[0; \pi]$ (убывает)	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (возрастает)	$(0; \pi)$ (убывает)
Множество значений прямой функции	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Обозначение обратной функции	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$

Область определения обратной функции	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Множество значений обратной функции	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0;\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\ \pi)$
График обратной функции				
Некоторые особенности обратной функции	Возрастает и нечетная	Убывает (ни четная, ни нечетная)	Возрастает и нечетная	Убывает (ни четная, ни нечетная)