Лекция 5

Тема: *"Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений и некоторых иррациональностей"*

Интегрирование рациональных дробей.

Определение. ***Рациональной дробью*** называется функция, равная отношению двух многочленов степени n и m соответственно:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Определение. Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя ($n < m$), и ***неправильной*** – в противном случае ($n \geq m$).

Теорема. Любую неправильную дробь можно записать в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1}$.

Поделим числитель на знаменатель с остатком «уголком» (алгоритм Евклида):

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} x^3+2x^2-x+4 \\ \underline{x^3+x^2+x} \end{array} & \begin{array}{|l} \hline x^2+x+1 \\ x+1 \end{array} \\
-\begin{array}{r} x^2-2x+4 \\ \underline{x^2+x+1} \\ -3x+3 \end{array} &
\end{array}
$$

Следовательно, $\dfrac{x^3+2x^2-x+4}{x^2+x+1}=x+1+\dfrac{-3x+3}{x^2+x+1}$

Определение. Правильная рациональная дробь называется ***простейшей (простой)***, если ее знаменатель имеет вид $(x-a)^n$, либо $(x^2+px+q)^n$, где $p^2-4q<0$.

Дроби:

I. $\dfrac{A}{x-a}$, **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $(n=2,3,\ldots)$, **III.** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(D=p^2-4q<0)$ и

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(D=p^2-4q<0,\ n=2,3,\ldots)$

называются ***простейшими дробями первого, второго, третьего и четвертого типов***.

В высшей алгебре доказывается следующая теорема:

Теорема. Правильную рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где знаменатель имеет разложение на множители вида:

$$Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l} + \ldots$$

где $A_i,\ B_i, M_i,\ N_i\ (i=1,2,3,\ldots)$ – действительные числа.

Замечание. Линейным множителям в разложении знаменателя соответствуют дроби I и II типов, а квадратичным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Рассмотрим два способа нахождения коэффициентов разложения на простейшие дроби.

Метод неопределенных коэффициентов.

Этот метод основан на следующем утверждении: если два многочлена тождественно равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной в обеих частях тождества.

Пример. Разложить на простейшие дроби: $\dfrac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}$.

Решение: $$\frac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}=\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}.$$

Приводим правую часть этого тождества к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

Приравниваем числители:

$$x^2+2x-6=A(x^2+x-6)+B(x^2-2x)+C(x^2+3x)$$

или

$$x^2+2x-6=(A+B+C)x^2+(A-2B+3C)x-6A.$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x:

$$\begin{cases} x^2: & A+B+C=1, \\ x^1: & A-2B+3C=2, \\ x^0: & -6A=-6. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $A=1,\ B=-\dfrac{1}{5},\ C=\dfrac{1}{5}$.

Следовательно, $$\frac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{5(x+3)}+\frac{1}{5(x-2)}.$$

Метод произвольных значений.

Этот метод основан на утверждении: если два многочлена тождественно равны, то они равны при любом значении независимой переменной.
Поэтому вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях неизвестной можно подставлять туда вместо x несколько произвольных чисел.

Этот метод наиболее эффективен, когда многочлен, стоящий в знаменателе, имеет различные действительные корни и в качестве произвольных значений берутся числа, равные действительным корням знаменателя.

Рассмотрим предыдущий пример:

$$\frac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}=\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

Тогда $x^2+2x-6=A(x-2)(x+3)+Bx(x-2)+Cx(x+3)$.

Подставим в это тождество последовательно три значения x :

$$\begin{cases} x=0: \quad -6A=-6\Rightarrow A=1, \\ x=2: \quad 10C=2\Rightarrow C=\dfrac{1}{5}, \\ x=-3: \quad 15B=-3\Rightarrow B=-\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Получим те же значения коэффициентов.

Интегралы от простейших дробей первого, второго, третьего и четвертого типов были рассмотрены в предыдущей лекции:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{4}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$

IV. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$

где первый интеграл:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C,$$

а для вычисления второго интеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ применяется следующая

рекуррентная формула:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

Рассмотрим теперь интеграл вида:

$$\int R(x)dx \text{ , где } R(x) \text{ – рациональная дробь.}$$

Так как любая дробь может быть представлена в виде целой части (многочлена) и суммы простейших дробей, то интеграл $\int R(x)dx$ всегда может быть сведен к интегралам от многочлена и суммы простейших дробей.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx$.

Решение: Под интегралом стоит неправильная рациональная дробь. Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}=x-2+\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx=\int\left(x-2+\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}dx.$$

Учитывая, что $x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$ разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow$$

$$x^2+2x+2=A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2.$$

Коэффициенты A, B и C найдем, пользуясь и методом произвольных значений, и методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} x=2\Rightarrow 10=5B\Rightarrow B=2, \\ x=-3\Rightarrow 5=25C\Rightarrow C=\dfrac{1}{5}, \\ x^2: \quad 1=A+C\Rightarrow A=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

Рассмотрим интегралы вида: $\int R(\sin x; \cos x)dx$, где $R(\sin x; \cos x)$ – рациональная функция.

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Из тригонометрии известно, что все тригонометрические функции аргумента x рационально выражаются через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому с помощью формул:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

интеграл $\int R(\sin x; \cos x)dx$ сводится к интегралу

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция t (как берется такой интеграл показано выше).

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)^2}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C=-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C.$$

Замечание. При нахождении, например, интеграла $\int\frac{dx}{\cos^p x}$, целесообразнее сначала заменить $\cos^p x$ на $\sin^p(\frac{\pi}{2}+x)$, а затем применить универсальную подстановку.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$.

Решение:

$$\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx=\left|\begin{matrix}tg\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{5+\frac{12t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(4+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt.$$

Разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{7+t^2}\Rightarrow 5t^2+12t+5=A(7+t^2)+t(Bt+C)\Rightarrow\ A=\frac{5}{7},B=\frac{30}{7},C=12.$$

Поэтому

$$\int\left(\frac{5}{7t}+\frac{\frac{30}{7}t+12}{7+t^2}\right)dt=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\ln\left|7+t^2\right|+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{5}{7}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+3\ln\left|7+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right|\right)+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Применение универсальной тригонометрической подстановки часто приводит к сложным выкладкам, поэтому на практике она применяется к интегралам, для которых не существует более простых подстановок, например, к интегралам вида:

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

При нахождении интегралов, содержащих тригонометрические функции в другой форме, применяются другие приемы.

Нахождение интегралов вида $\int\sin^n x\cos^m x dx$.

1. Хотя бы один из показателей степени – целое положительное нечетное число $2k+1$ ($k\geq 0,\ k\in Z$), другой показатель – равен любому числу (даже не целому).

Если $m=2k+1$, то делается подстановка $\sin x=t$, если $n=2k+1$, то – $\cos x=t$.

Если m и n – нечетные числа, делается любая из указанных подстановок.

Если же при нахождении интегралов пользуются не подстановкой, а подведением под знак дифференциала, то надо руководствоваться правилом: та функция, показатель степени которой $2k+1$, вносится под знак дифференциала.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^7 x\, dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x \cos^7 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^6 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cos^6 x\, d\sin x =$$

$$\int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^3\, d\sin x = \left|\sin x = t\right| = \int t^2 (1-t^2)^3\, dt = \int t^2 dt - 3\int t^4\, dt + 3\int t^6\, dt - \int t^8 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{3\sin^5 x}{5} + \frac{3\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

2. Оба показателя степени – положительные четные числа (один из них может равняться нулю).

В этом случае пользуются тригонометрическими формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

После их применения интегралы сводятся к случаю 1) или вновь к 2).

Пример. Найти интеграл $\int \cos^4 x\, dx$.

Решение:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2})\,dx=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

3. Оба показателя отрицательные числа одинаковой четности.

В этом случае, применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$ ($\operatorname{ctg} x=t$).

Требование того, чтобы m и n были целыми числами не является обязательным, но главное, чтобы $m+n$ было четным числом.

Пример. Найти интеграл

$$\int\sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}}\,dx.$$

Решение: В этом примере показатель синуса $m=-\frac{8}{3}$, а показатель степени косинуса $n=\frac{2}{3}$, а потому $\frac{|m+n|}{2}=\left|-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\right|\Big/2=1\in N$.

Применим подстановку $\operatorname{ctg}x=t$, тогда $-\frac{dx}{\sin^2 x}=dt$ и $\sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}}x$.

Поэтому $\int\sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}}\,dx=-\int t^{\frac{2}{3}}\,dt=-\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+C=-\frac{3}{5}\operatorname{ctg}x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+C.$

4. Укажем еще случаи, позволяющие избежать применения универсальной тригонометрической подстановки.

Если $R(\sin x;\cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, полезна подстановка $\cos x = t$.

Если $R(\sin x;\cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, полезна подстановка $\sin x = t$.

Если $R(\sin x;\cos x)$ не меняется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$.

Решение: Так как синус и косинус находятся в четных степенях, то подынтегральная функция не изменится при изменениях знака у этих функций.

Делаем подстановку:

$$\operatorname{tg}x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg}t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Если $\operatorname{tg}x = t \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

Поэтому
$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{a^2}{1+t^2} + \frac{b^2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} = \frac{1}{b}\int \frac{bdt}{a^2 + (bt)^2} =$$
$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a} + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin x}$.

Решение: При замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция меняет знак, поэтому применяем подстановку

$$\cos x = t \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin x} = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{t^2(1-t)(1+t)}.$$

Разложим дробь

$$\frac{1}{t^2(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t} \Rightarrow At(1-t^2) + B(1-t^2) + Ct^2(1+t) + Dt^2(1-t) = 1 \Rightarrow$$

$$A = 0, B = 1, C = D = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin x} = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{t^2(1-t)(1+t)} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{2(t-1)} - \int \frac{dt}{2(1+t)} = \frac{1}{t} + \ln\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|} + C = \frac{1}{\cos x} + \ln\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|} + C.$$

Нахождение интегралов вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$ и $\int \mathrm{ctg}^n x dx$.

Можно рекомендовать два способа:

1. С использованием формул: $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$,

понижающих показатель степени n на две единицы.

2. С помощью подстановки: $\mathrm{tg}\, x = t$ ($\mathrm{ctg}\, x = t$), откуда $x = \mathrm{arctg}\, t$ и $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Пример. Найти интеграл $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx$.

Решение:

$$\int \mathrm{tg}^4 x dx = \left| \mathrm{tg} x = t, x = \mathrm{arctg} t, dx = \frac{dt}{t^2+1} \right| = \int \frac{t^4 dt}{t^2+1} = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg} x + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x) + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg} x + x + C.$$

Нахождение интегралов вида $\int R(\mathrm{tg}\, x) dx$.

В этом случае с помощью подстановки $\mathrm{tg}\, x = t$, получаем интеграл от рациональной функции аргумента t.

Интегрирование иррациональностей.

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx$.

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx$, где $R(x;\sqrt[n]{ax+b})$ – рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$, n – целое положительное число не меньшее двух, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций с помощью замены переменной:

$$ax+b=t^n,\ \text{тогда}\ \ x=\frac{t^n-b}{a},\ dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt,\quad \sqrt[n]{ax+b}=t.$$

Следовательно, $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a};t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}dt$.

Интеграл в правой части последнего равенства может быть найден приемами, изложенными ранее.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}dx$.

Решение:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}dx=\left|x-2=t^6,dx=6t^5dt\right|=\int\frac{t^2}{t^4-t^3}6t^5dt=$$

$$=6\int\frac{t^4}{t-1}dt=6\int(t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt==6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln\left|t-1\right|\right)+C$$

$$=6\left(\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{4}+\frac{\sqrt{x-2}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x-2}}{2}+\sqrt[6]{x-2}+\ln\left|\sqrt[6]{x-2}-1\right|\right)+C.$$

Замечание. Если в рассмотренном примере поменять местами числитель и знаменатель, то для вычисления полученного интеграла кроме аналогичного, можно рекомендовать более простой способ.

Достаточно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\int\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx=\int((x-2)^{1/3}-(x-2)^{1/6})d(x-2)=\frac{3}{4}(x-2)^{4/3}-\frac{6}{7}(x-2)^{7/6}+C.$$

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$.

Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции подстановкой:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n.$$

Пример. Найти интеграл $\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx$.

Решение: Подстановка $\frac{5-3x}{4+7x}=t^2$ приводит к интегрированию рациональной функции.

Из указанной подстановки определим x и dx:

$$5-3x=t^2(4+7x)\Rightarrow x=\frac{5-4t^2}{7t^2+3}\Rightarrow dx=\frac{-8t(7t^2+3)-14t(5-4t^2)}{(7t^2+3)^2}dt=\frac{-94t}{(7t^2+3)^2}dt\,.$$

Поэтому

$$\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx=\int t\frac{-94t}{(7t^2+3)^2}dt=-94\int\frac{t^2}{(7t^2+3)^2}dt=-94\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\int\frac{t^2+\frac{3}{7}-\frac{3}{7}}{\left(t^2+\frac{3}{7}\right)^2}dt=$$

$$=-94\cdot\frac{1}{49}\left(\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{7}}-\frac{3}{7}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{7}\right)^2}\right)$$

Первый интеграл табличный, второй – от дроби 4-го типа:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{7}}+\frac{t}{2(t^2+\frac{3}{7})}\right).$$

Окончательно получим:

$$\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C\,.$$

Если в подынтегральное выражение входят корни из одного и того же выражения разных степеней, т.е. для интегралов вида $\int R(x;\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}};\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}};\ldots;\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ применяется подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^p,$$

где p – наименьшее общее кратное показателей корней m, n, …, k.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение: Так как выражение $x+1$ входит в корни 2 и 3 степени, а наименьшим общим кратным этих чисел является число 6, то положим: $x+1=t^6 \Rightarrow x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$.

Тогда интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3}{t-1}dt=6\int(t^2-t-1-\frac{1}{t-1})dt=6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t-\ln|t-1|)+C=$$

$$=6(\frac{\sqrt{x+1}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}-\sqrt[6]{x+1}-\ln|\sqrt[6]{x+1}-1|)+C.$$

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

После подстановки $\frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'=t$ такие интегралы сводятся к интегралам, содержащим корни:

$$\sqrt{a^2-t^2},\ \sqrt{t^2-a^2},\ \sqrt{a^2+t^2}.$$

Если интеграл не является табличным, то интегралы, содержащие корни такого вида, рационализируются подстановками:

$$\sqrt{a^2-t^2} \Rightarrow t=a\sin z \text{ или } t=a\cos z,$$

$$\sqrt{t^2-a^2} \Rightarrow t=\frac{a}{\sin z} \text{ или } t=\frac{a}{\cos z},$$

$$\sqrt{a^2+t^2} \Rightarrow t=a\,tgz \text{ или } t=a\,ctgz.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\left(\sqrt{5+2x+x^2}\right)^3}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{5+2x+x^2}\right)^3}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}(5+2x+x^2)'=t,\ dx=dt\\ x+2=t,\ x=t-2\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\left(\sqrt{t^2+4}\right)^3}=\left|\begin{array}{l}t=2tgz,\ dt=\dfrac{dz}{\cos^2 z}\\ \sqrt{t^2+4}=\dfrac{2}{\cos z}\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\cos z dz=$$

$$=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\sin arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{4}\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{\frac{t^2}{4}+1}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

Интегралы вида $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Здесь целесообразна подстановка $x=\frac{1}{t},\, dx=-\frac{dt}{t^2}$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}=\left|x=\frac{1}{t},\, dx=-\frac{dt}{t^2}\right|=\int\frac{-dt/t^2}{\sqrt{3t^2+1}/t^2}=-\int\frac{dt}{\sqrt{3t^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}t)}{\sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}t+\sqrt{3t^2+1}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\right|+C.$$

Интегралы от дифференциальных биномов.

Так называются интегралы вида: $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p – любые рациональные числа.

Доказано, что только в трех случаях этот интеграл может быть выражен через элементарные функции.

1. Если p – целое число, тогда двучлен $a+bx^n$ возводится в степень p и, после умножения на x^m, почленно интегрируется.

2. Если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, тогда применяется подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

3. Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число, тогда применяется подстановка $ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx$.

Решение:
$$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx=\int x^{-7/5}(1+x^{1/3})^{1/5}\,dx=\left|\begin{array}{l} m=-\dfrac{7}{5}, n=\dfrac{1}{3}, p=\dfrac{1}{5}, \dfrac{m+1}{n}+p=-1 \Rightarrow \\ x^{-1/3}+1=t^5,\ x=(t^5-1)^{-3},\ dx=-3(t^5-1)^{-4}5t^4dt \end{array}\right|=$$

$$=\int (t^5-1)^{21/5}(1+(t^5-1)^{-1})^{1/5}\frac{(-15)t^4}{(t^5-1)^4}\,dt=-\frac{15}{6}t^6+C=-\frac{5}{2}(x^{-1/3}+1)^{6/5}+C=-\frac{5}{2}\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6/5}+C.$$

Спасибо за внимание