МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Лекция 1

МЫСЛИТЕЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

- логика
- интуиция
  - интуиция-суждение
  - интуиция-догадка

«Таким образом, логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства» (А. Пуакаре)

Λογος (греч.)– слово, смысл

Математическая логика:

- предмет – логика
- метод – математика

Язык:

- предметный (язык – объект)
- язык исследователя

- (древнегреч.) Аристотель (384-322 до н.э.): теория дедукции – логического вывода
- Евклид (330–275 до н.э.)
- (нем.) Лейбниц (1646–1716): «идеи заменить вычислениями»
- (англ.) Дж. Буль (1815-1864), (шотл.) А. де Морган (1806-1871), (амер.) Ч. Пирс (1839– 1914), (рус.) П.С. Порецкий (1846–1907)
- (рус.) Н.И. Лобачевский (1792–1856), (венг.) Я.Бояи (1802 - 1860)
- парадоксы теории множеств (конец 19 в.) (англ.) Рассел (1872-1970). Парадокс:

  по закону брадобрей должен брить только тех, кто не бреет себя сам. Кто бреет брадобрея?

НАПРАВЛЕНИЯ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

- логицизм

  ((нем.) Фреге(1848-1925), Пирс, (ит.) Пеано (1858-1932), Рассел, (англ.) Уайтхед (1861-1947))

  невозможность вывести из логич. аксиом существование бесконечного множества, создание богатого логич. аппарата

- формализм ((нем.) Д.Гильберт (1862-1943), (австр.) Гёдель (1906-1978))

  неполнота формализованной арифметики

- интуиционизм ((голланд.) Брауэр (1881-1966))

  отказ от рассмотрения бесконечных множеств как завершенных совокупностей, от закона исключенного третьего, признание только конструктивных доказательств

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД: 3 СТАДИИ РАЗВИТИЯ

стадии	вид аксиоматической теории	описываемый объект	используемая логика
I	**содержательная (неформальная)**	конкретная структура	не определена
II	**полуформальная**	класс структур	не определена
III	**формальная**	класс структур	определяется системой логических аксиом и правил вывода

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

ВЫСКАЗЫВАНИЕ

Высказывание – исходное понятие (не определяется через другие)

Форма существования высказывания – предложение предметного языка, чаще повествовательное.

Высказывание – смысл, содержание предложения.

Истинное высказывание соответствует действительности.

Всякое высказывание либо истинно, либо ложно и не может быть тем и другим одновременно.

ПРОСТЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Примеры:

- Земля – планета солнечной системы
- 5×7=35
- простые (атомарными, элементарными) истинные высказывания

- 3×7=22
- Рим – столица Франции
- ложные

- Всякий важный двигатель работает без бензина
- Земля вращается быстро
- Который час?
- Решить квадратное уравнение $x^2 + 3x - 2 = 0$
- не высказывания

- $x + 7 = 9$
- высказывательная форма (при указании конкретного значения x имеем высказывание)

СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ ВХОЖДЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ

- переменная называется связанной, если подстановка в нее имен конкретных объектов недопустима

$$\int_0^x x^2\,dx$$

- именная (высказывательная) форма называется *k*-местной, если она содержит ровно *k* различных параметров
- 0-местная форма – имена и высказывания

Пример 1. Через $F(x, y)$ обозначим именную форму

$$y + x \cdot y \cdot \lim_{y \to 5} \int_x^y \sin x^2 y \, dx.$$

Тогда $F(-7, 3)$ есть выражение

$$3 + (-7) \cdot 3 \cdot \lim_{y \to 5} \int_{-7}^{y} \sin x^2 y \, dx.$$

Вообще, $F(a, b)$ имеет вид

$$b + a \cdot b \cdot \lim_{y \to 5} \int_a^y \sin x^2 y \, dx.$$

Пример 2. Через $A(i,k,m)$ обозначим высказывательную форму

$$\sum_{i=k}^{m} \frac{1}{i^2} < \lim_{k\to i} \log_2 k.$$

Тогда, например, $A(5,2,8)$ есть высказывание

$$\sum_{i=2}^{8} \frac{1}{i^2} < \lim_{k\to 5} \log_2 k.$$

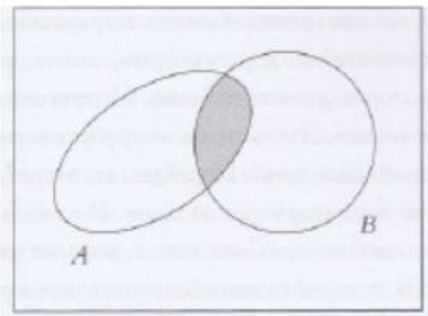


Рис. 1. Пересечение двух множеств, соответствующее конъюнкции $P \wedge Q$.

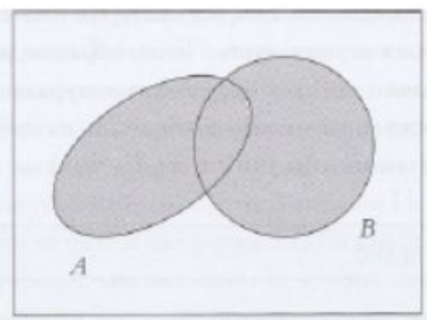


Рис. 2. Объединение двух множеств, соответствующее дизъюнкции $P \vee Q$.

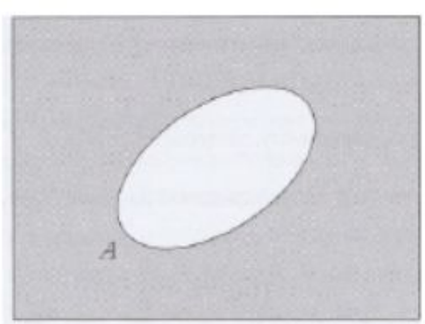


Рис. 3. Дополнение множества, соответствующее отрицанию $\neg P$.

Диаграммы Венна, на которых представлены операции пересечения (рис. 1), объединения (рис. 2) и дополнения (рис. 3) множеств.

связка	обозначение	название
A и B	$A \& B$ $\quad A \wedge B$ A `and` B	конъюнкция
A или B	$A \vee B$ $\quad A$ `or` B	дизъюнкция
не A A неверно	$\neg A$ $\quad \sim A$ $\quad \overline{A}$ `not` A	отрицание
из A следует B если A, то B A влечёт B B — следствие A	$A \to B$ $\quad A \Rightarrow B$ $A \supset B$ `if` A `then` B	импликация следование

A – посылка, антецедент импликации,
B – заключение, консеквент

$\leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\equiv$ эквиваленция

ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ СВЯЗОК

0, Л, *F*, $\perp$
1, И, *T*, $\top$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
Л	**Л**	**Л**	**Л**	**И**
Л	**И**	**Л**	**И**	**И**
И	**Л**	**Л**	**И**	**Л**
И	**И**	**И**	**И**	**И**

A	$\neg A$
Л	**И**
И	**Л**

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

- инверсия, отрицание (НЕ, NOT)
- конъюнкция (И, AND)
- дизъюнкция (нестрогая, неисключающая) (ИЛИ, OR)
- импликация (IMP)
- эквиваленция (EXV)
- дизъюнкция (строгая, исключающая) (XOR)
- штрих Шеффера (И-НЕ)

$$A|B = \overline{A \wedge B}$$

- стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ)

$$A \downarrow B = \overline{A \vee B}$$

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
АЛФАВИТ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Переменная, допустимыми значениями которой являются произвольные высказывания, называется *пропозициональной переменной*. В качестве пропозициональных переменных мы будем использовать большие латинские буквы $P, Q, R, \ldots$ (возможно с индексами; например, P_3, Q_7, R_{11}).

Пропозициональные переменные назовем *элементарными формулами*, или *атомами*.

Алфавит алгебры высказываний:

- пропозициональные переменные,
- логические константы,
- логические операторы (связки),
- скобки

Конечные последовательности букв алфавита называются *словами*.

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Формулами логики высказываний, или *пропозициональными формулами*, назовем выражения, которые строятся из пропозициональных переменных с помощью скобок и пропозициональных связок по следующим правилам:

1) любая пропозициональная переменная является пропозициональной формулой;

2) если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — пропозициональные формулы, то $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})$ — пропозициональные формулы.

Например, выражения

$$(P \supset Q), \quad (P \supset (Q \supset R)), \quad (P \supset (Q \supset (P \,\&\, Q)))$$

являются пропозициональными формулами.

A, *B* – метазнаки (произв. формулы)

Формулы в определении:

- 1) – элементарные (атомы),
- 2) – сложные (*молекулы*)

ФОРМАЛИЗАЦИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Метаязык – это язык, служащий для объяснения другого языка.

Формула сама по себе не имеет никакого содержания, не является ни истинной, ни ложной.

Формализация – переход от высказывания естественного языка к формуле логики в-ний.

Интерпретация – переход от формулы логики в-ний к высказыванию естественного языка.

Таблица истинности – таблица значений формулы – указывает логическое значение формулы при любой ее интерпретации.

Если в формуле n атомов, то возможных наборов их значений – 2^n

КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- *выполнимые*

  (= 1 хотя бы для одной конкретизации)
- *тавтологии* (*общезначимые*, тождественно истинные)

  (= 1 для любой конкретизации)
- *опровержимые*

  (= 0 хотя бы для одной конкретизации)
- *противоречия* (тождественно ложные)

  (= 0 для любой конкретизации)

ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Два высказывания *равносильны*, если они одновременно истинны или одновременно ложны.

Две формулы *равносильны*, если их эквиваленция является тавтологией:

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv 1.$$

Формулы равносильны тогда и только тогда, когда их таблицы истинности совпадают.

Отношение равносильности формул является отношением эквивалентности. Поэтому множество всех формул разбивается на классы эквивалентности – классы равносильных формул.

ПРОВЕРКА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ

Теорема 1. (Подстановка вместо атомов.) *Пусть* E*—формула, в которую входят только атомы* $P_1, \ldots, P_n$, *а* E^**—формула, полученная из* E *одновременной подстановкой формул* $A_1, \ldots, A_n$ *вместо* $P_1, \ldots, P_n$ *соответственно. Если* $\models E$, *то* $\models E^*$.

KLEENE ВВЕДЕНИЕ В МЕТАМАТЕМАТИКУ
ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

Теорема 2. *При любом выборе формул* A, B, C

1a. $\models A \supset (B \supset A)$.

1b. $\models (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$.

3. $\models A \supset (B \supset A \& B)$.

4a. $\models A \& B \supset A$.

4b. $\models A \& B \supset B$.

5a. $\models A \supset A \vee B$.

5b. $\models B \supset A \vee B$.

6. $\models (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

7. $\models (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

8°. $\models \neg\neg A \supset A$.

9a. $\models (A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \sim B))$.

10a. $\models (A \sim B) \supset (A \supset B)$.

10b. $\models (A \sim B) \supset (B \supset A)$.

(Введение и удаление логических символов.)

KLEENE ВВЕДЕНИЕ В МЕТАМАТЕМАТИКУ
ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

*1. $\models A \supset A.$

*2. $\models (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)).$

*3. $\models A \supset (B \supset C) \sim (B \supset (A \supset C)).$

*4a. $\models A \supset (B \supset C) \sim A \& B \supset C.$

(Принцип тождества, цепное заключение, перестановка посылок, импортация, экспортация.)

*10a. $\models \neg A \supset (A \supset B).$

*12a°. $\models A \supset B \sim \neg B \supset \neg A.$

(Отрицание антецедента, контрапозиция.)

*19. $\models A \sim A.$

*20. $\models (A \sim B) \sim (B \sim A).$

*21. $\models (A \sim B) \& (B \sim C) \supset (A \sim C).$

(Рефлексивность, симметричность и транзитивность эквивалентности.)

KLEENE ВВЕДЕНИЕ В МЕТАМАТЕМАТИКУ

ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

*31. $\models (A \& B) \& C \sim A \& (B \& C)$.

*32. $\models (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$.

*33. $\models A \& B \sim B \& A$.

*34. $\models A \vee B \sim B \vee A$.

*35. $\models A \& (B \vee C) \sim (A \& B) \vee (A \& C)$.

*36. $\models A \vee (B \& C) \sim (A \vee B) \& (A \vee C)$.

*37. $\models A \& A \sim A$.

*38. $\models A \vee B \sim A$.

*39. $\models A \& (A \vee B) \sim A$.

*40. $\models A \vee (A \& B) \sim A$.

(Законы ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности, идемпотентности и элиминации.)

*49°. $\models \neg\neg A \sim A$.

*50. $\models \neg (A \& \neg A)$.

*51°. $\models A \vee \neg A$.

(Закон двойного отрицания, отрицание противоречия, закон исключенного третьего.)

KLEENE ВВЕДЕНИЕ В МЕТАМАТЕМАТИКУ

ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

*55a. $\models \neg(A \vee B) \sim \neg A \,\&\, \neg B$.

*55b°. $\models \neg(A \,\&\, B) \sim \neg A \vee \neg B$.

*55c°. $\models \neg(A \supset B) \sim A \,\&\, \neg B$.

(Законы Де Моргана [1847] [1]), отрицание импликации.)

*56°. $\models A \vee B \sim \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$.

*57°. $\models A \,\&\, B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$.

*58°. $\models A \supset B \sim \neg(A \,\&\, \neg B)$.

*59°. $\models A \supset B \sim \neg A \vee B$.

*60°. $\models A \,\&\, B \sim \neg(A \supset \neg B)$.

*61°. $\models A \vee B \sim \neg A \supset B$.

*63a. $\models (A \sim B) \sim (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$.

(Выражение одних связок через другие.)

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Если формула φ содержит n переменных, то она задает некоторую функцию $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.
где $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Способы задания:

- формулой
- истинностной таблицей

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Переход к равносильной формуле, содержащей только связки:

- отрицание
- конъюнкция
- дизъюнкция

Конъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

$X_1 \wedge X_1$, $X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3$, $\quad X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge X_1$

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Дизъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

$$\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3, \; X_2 \vee X_2, \qquad \neg X_2 \vee X_1 \vee \neg X_4 \vee X_1 \vee X_4$$

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов :

где $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_p$ одн-ны

(не об $K_i, \; i = 1, 2, ..., p,$ е)

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Конъюнктивной нормальной формой

называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов :

где $D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_q,$ ны

(не о $D_j,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ q,$ е)

Для формулы существует неограниченно много как конъюнктивных, так и дизъюнктивных нормальных форм

СКНФ и СДНФ – единственны.

СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Одночлен от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется **совершенным**, если в него от каждой пары $X_i, \neg X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ входит один и только один представитель.

СКНФ и СДНФ содержат только совершенные одночлены

$$(\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4).$$

$$(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$$

СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Теорема (о представлении формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными формулами). *Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) совершенную дизъюнктивную нормальную форму.*

Теорема (о представлении формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными формами). *Каждая формула алгебры высказываний от n переменных, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) совершенную конъюнктивную нормальную форму.*

СПОСОБЫ ПРИВЕДЕНИЯ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ К СН-ФОРМЕ

СДН-форма:

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv \bigvee_{F(\alpha_1 \ldots,\ \alpha_n) = 1} (X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}), \text{ где } X^{\alpha} = \begin{cases} X, \text{ если } \alpha = 1, \\ \neg X, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

СКН-форма:

$$F(X_1, \ldots, X_n) \equiv \bigwedge_{F(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n) = 0} ({}^{\beta_1}X_1 \vee \ldots \vee {}^{\beta_n}X_n), \text{ где } {}^{\beta}X = \begin{cases} X, \text{ если } \beta = 0 \\ \neg X, \text{ если } \beta = 1. \end{cases}$$

СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Теорема (о представлении формул алгебры высказываний совершенными импликативными нормальными формулами). *Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки импликативных членов) СИНФ.*

СПОСОБЫ ПРИВЕДЕНИЯ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ К СН-ФОРМЕ

СИН-форма:

$$F(X_1, \ldots, X_n) \cong \underset{F(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) = 1}{\Longrightarrow} X_1^{\alpha_1} \Rightarrow (X_2^{\alpha_2} \Rightarrow (\ldots(X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Rightarrow \neg X_n^{\alpha_n})\ldots)))$$

$$\text{где } X^\alpha = \begin{cases} X, \text{ если } \alpha = 1, \\ \neg X, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

одного аргумента.

$f_0(x) = 0$ — функция, тождественно равная 0 (тождественный нуль);

$f_1(x) = x$ — тождественная функция;

$f_2(x) = x'$ — функция, называемая отрицанием;

$f_3(x) = 1$ — функция, тождественно равная 1 (тождественная единица).

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ N АРГУМЕНТОВ

Теорема (о числе булевых функций от n аргументов). *Число различных булевых функций от n аргументов равно* 2^{2^n}.

Лемма (о разложении функции по переменной). *Для произвольной булевой функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *справедливы следующие формулы, называемые формулами разложения этой функции по переменной* x_1:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (x_1' \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n));$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)) \cdot (x_1' \vee f(1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Определение Система булевых функций называется *полной*, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы.

Теорема *Следующие системы булевых функций являются полными*: 1) $\{\vee, \cdot, '\}$; 2) $\{+, \cdot, '\}$; 3) $\{\vee, '\}$; 4) $\{\cdot, '\}$; 5) $\{\to, '\}$; 6) $\{\mid\}$; 7) $\{\downarrow\}$.

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть даны формулы $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m, \mathcal{B}$. Формула $\mathcal{B}$ является *логическим следствием* формул $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m$, если, придавая значения переменным $X_1, ..., X_n$, от которых зависят все рассматриваемые формулы, всякий раз, когда истинны одновременно все формулы $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m$, истинна и формула $\mathcal{B}$.

Для логического следствия используется запись

$$\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m \models \mathcal{B}.$$

Для проверки наличия логического следования достаточно построить истинностную таблицу.

Пример Проверить, что

$$X, Y, (Z\&X \Rightarrow \neg Y) \models \neg Z.$$

Имеем истинностную таблицу:

X	Y	Z	$Z\&X \Rightarrow \neg Y$	$\neg Z$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

Из второй строки видно, что ( ) есть логическое следствие.

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

Теорема **(о дедукции. Эрбран (1930)).** *Если* $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$, *то* $\models (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$.

Доказательство.

Используем таблицу истинности для связки $\Rightarrow$. Из условия $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ вытекает, что если $\mathcal{A} = \top$, то $\mathcal{B} = \top$. Но тогда $\models (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, ибо случай, когда $\mathcal{A} = \top$, $\mathcal{B} = \bot$, исключен.

Теорема доказана.

Следствие $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m \models \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\models (\mathcal{A}_1 \& \ldots \& \mathcal{A}_m \Rightarrow \mathcal{B})$.

ПРАВИЛА ЛОГИЧЕСКИХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ (ПРИМЕРЫ СТРУКТУР ПРАВИЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ)

Силлогизм – это правило, позволяющее из (истинных) высказываний получать новые (истинные) высказывания.

Правило вывода: (*modus ponens*): $\dfrac{F, F \to G}{G}$.

(введения конъюнкции): $\dfrac{F, G}{F \wedge G}$.

(удаления конъюнкции): $\dfrac{F \wedge G}{F}$, $\dfrac{F \wedge G}{G}$.

(введения дизъюнкции): $\dfrac{F}{F \wedge G}$, $\dfrac{G}{F \wedge G}$.

(контрапозиции): $\dfrac{F \to G}{\neg G \to \neg F}$.

ПРАВИЛА ЛОГИЧЕСКИХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ (ПРИМЕРЫ СТРУКТУР ПРАВИЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ)

(цепного заключения): $\dfrac{F \to G, G \to H}{F \to H}$

(перестановки посылок): $\dfrac{F \to (G \to H)}{G \to (F \to H)}$

(объединения и разъединения посылок):

$$\frac{F \to (G \to H)}{(F \wedge G) \to H}, \qquad \frac{(F \wedge G) \to H}{F \to (G \to H)}.$$

(расширенной контрапозиции):

$$\frac{(F \wedge G) \to H}{(F \wedge \neg H) \to \neg G}.$$

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Логическая структура $X \to Y$

X - условие,

достаточное условие для Y

(для того, чтобы бYыло истинным, достаточно,

чтобы истинным было высказывание ии) X

Y - заключение,

необходимое условие для X

(если X истинно, то Y небходимостью должно

быть также истинным)

Логическая структура $X \leftrightarrow Y$

X - критерий для Y

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть теорема имеет форму $X \to Y$;

Тогда утверждение

$Y \to X$, называют обратным,

$\neg X \to \neg Y$ - противоположным

$\neg Y \to \neg X$ - обратным

противоположному (явл. теоремой)

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема $(A_2' \vee A_2'' \vee A_2''') \to (B_2' \vee B_2'' \vee B_2''') : (\alpha = 90^\circ \vee$

$\vee\, \beta = 90^\circ \vee \gamma = 90^\circ) \to ((a^2 = b^2 + c^2) \vee (b^2 = a^2 + c^2) \vee (c^2 = a^2 + b^2)).$

Тогда противоположное утверждение

$$(\alpha \neq 90^\circ \wedge \beta \neq 90^\circ \wedge \gamma \neq 90^\circ) \to ((a^2 \neq b^2 +$$

$$+\, c^2) \wedge (b^2 \neq a^2 + c^2) \wedge (c^2 \neq a^2 + b^2)).$$

СПОСОБЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

- косвенного доказательства,
- доказательства разбором случаев,
- от противного (приведения к абсурду),
- цепочкой импликаций,
- цепочкой эквиваленций.

Энтимема – довод, в котором одна или несколько посылок или само заключение явно не формулируются.

ДЕДУКТИВНЫЕ И ИНДУКТИВНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

Умозаключение – переход от посылок к заключению (следствию)

(логическая операция, состоящая в получении нового высказывания из одного или нескольких ранее известных)

Рассуждение – последовательность умозаключений, причем посылками последующих умозаключений служат следствия предыдущих умозаключений данной последовательности.

Дедуктивное умозаключение, прежде всего, основано на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия,

индуктивное – на анализе их содержания.

ДЕДУКТИВНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

«Если четырехугольник является квадратом, то его диагонали равны»;
«Четырехугольник *ABCD* — квадрат».

«Диагонали четырехугольника *ABCD* равны».

«Если число делится на 6, то оно четное»;
«Число 18 делится на 6».

«Число 18 четное».

«Если треугольник равносторонний, то он прямоугольный»;
«Если треугольник прямоугольный, то его внутренние углы равны».

«Если треугольник равносторонний, то его внутренние углы равны».

В случае когда среди посылок умозаключения имеются ложные, говорят о наличии в умозаключении *фактической ошибки*; если же неправильным является само дедуктивное умозаключение, то говорят о *логической ошибке*.

ИНДУКТИВНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

«Дуб — лиственное дерево»;
«Береза — лиственное дерево»;
«Липа — лиственное дерево».

«Все деревья — лиственные.

«Обь замерзает зимой»;
«Енисей замерзает зимой»;
«Лена замерзает зимой».

«Все сибирские реки замерзают зимой».

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТА

Субъект – это то, о чем что-то утверждается в высказывании; *предикат* – это то, что утверждается о субъекте.

Например, в высказывании «7 – простое число», «7» – субъект, «простое число» – предикат. Это высказывание утверждает, что «7» обладает свойством «быть простым числом».

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим *высказывательную форму* «x – простое число». При одних значениях x (например, $x = 13$, $x = 17$) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, $x = 10$, $x = 18$) эта форма дает ложные высказывания.

ПОНЯТИЕ ОДНОМЕСТНОГО ПРЕДИКАТА (ВЫРАЖАЕТ СВОЙСТВО)

Определение. *Одноместным предикатом* $P(x)$ называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества $\{1,0\}$.

Множество M, на котором определен предикат $P(x)$, называется *областью определения предиката*.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется *множеством истинности* предиката $P(x)$, то есть множество истинности предиката $P(x)$ – это множество $I_P = \{x: x \in M, P(x) = 1\}$.

ПРИМЕРЫ ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Так, предикат $P(x)$ – «x – простое число» определен на множестве $\mathbf{N}$, а множество I_P для него есть множество всех простых чисел. Предикат $Q(x)$ – « $\sin x = 0$ » определен на множестве $\mathbf{R}$, а его множество истинности $I_Q = \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Предикат $F(x)$ – «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

ПОНЯТИЕ МНОГОМЕСТНОГО ПРЕДИКАТА (ВЫРАЖАЕТ ОТНОШЕНИЕ)

Определение. *Двухместным предикатом* $P(x,y)$ называется функция двух переменных x и y, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества $\{1,0\}$.

В числе примеров двухместных предикатов можно назвать предикаты: $Q(x,y)$ – «$x = y$» предикат равенства, определенный на множестве $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $F(x,y)$ – «$x \,//\, y$» прямая x параллельна прямой y, определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

Аналогично определяется n-местный предикат.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕДИКАТОВ

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется:

а) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$;

б) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) *выполнимым* (*опровержимым*), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

КВАНТОРЫ

1. Квантор всеобщности. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\forall x\, P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества M и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет «Для всякого x $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называют *квантором всеобщности*.

Переменную x в предикате $P(x)$ называют *свободной* (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании $\forall x\, P(x)$ переменную x называют *связанной* квантором $\forall$.

КВАНТОРЫ

2. Квантор существования. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\exists x\, P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называют *квантором существования*. В высказывании $\exists x\, P(x)$ переменная x связана квантором $\exists$.

КВАНТОРЫ: ПРИМЕРЫ

Пусть на множестве N натуральных чисел задан предикат $P(x)$: «Число x кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: $\forall x \in \mathbf{N}\ P(x)$ – «Все натуральные числа кратны 5»; $\exists x \in \mathbf{N}\ P(x)$ – «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ПРЕДИКАТОВ

Два n-местных предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных над одними и теми же множествами $M_1, M_2, ..., M_n$, называются *равносильными*, если набор предметов (элементов) $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают

СЛЕДОВАНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Определение 18.5. Предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный над множествами $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется *следствием* предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$\sqrt{x \cdot y} = 15$ и $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$,
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$,
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$,
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$,
5. $\forall x A(x) \& \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \& B(x)]$,
6. $C \& \forall x B(x) \equiv \forall x [C \& B(x)]$,
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$,

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$,

9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$,

10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$,

11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$,

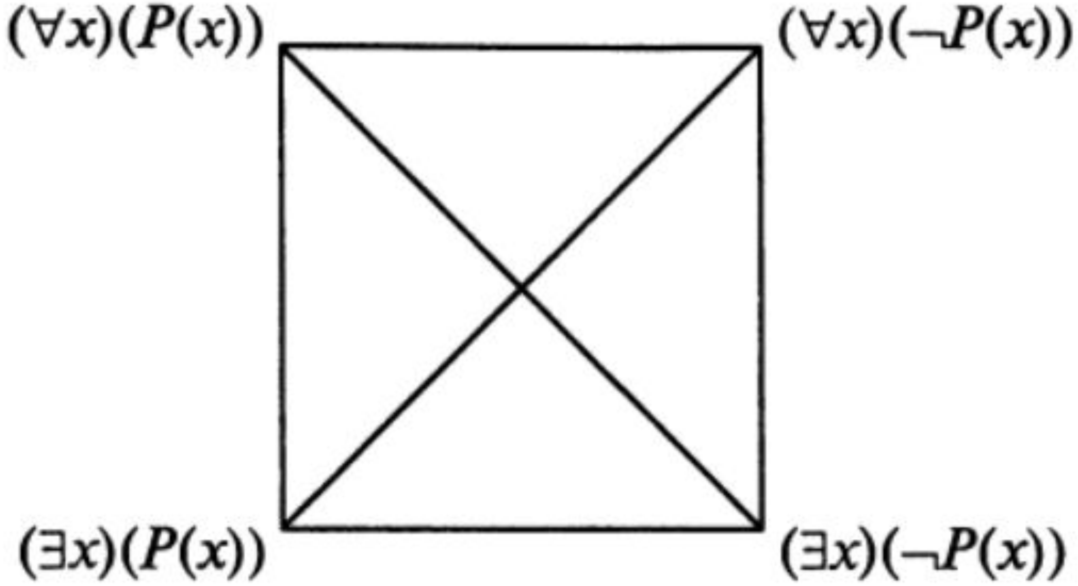
12. $\exists x[C \& B(x)] \equiv C \& \exists x B(x)$,

13. $\exists x A(x) \& \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \& B(y)]$,

14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$,

15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$.

ЛОГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ



ЛОГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ

Универсальные высказывания $(\forall x)(P(x))$ и $(\forall x)(\neg P(x))$, стоящие в двух верхних вершинах квадрата, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно истинными (хотя конечно же могут быть одновременно ложными). Говорят, что эти высказывания являются *противными* или *контрарными*. Экзистенциальные высказывания $(\exists x)(P(x))$ и $(\exists x)(\neg P(x))$, стоящие в двух нижних вершинах квадрата, наоборот, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно ложными (хотя конечно же могут быть одновременно истинными). Говорят, что эти высказывания *субпротивны* (или *субконтрарны*). Высказывания, стоящие в вершинах каждой диагонали квадрата, противоречат одно другому, т. е. одно является отрицанием другого. Наконец, под каждым из универсальных высказываний, стоящих у верхних вершин, стоит высказывание у нижней вершины, следующее из него, т. е. такое, что импликация этих высказываний (для любого предиката $P(x)$) является истинным высказыванием.

ПРИМЕРЫ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫЕ

кванторы $\forall x$ и $\exists x$ $\qquad \int \ldots dx \qquad \sum_{n=0}^{\infty}$

«наименьшее y, такое, что»

удобно вместо индексов пользоваться чертой сверху и снизу для указания, какой квантор связывает какие вхождения переменных:

$$\forall x\,(P(x)\,\&\,\exists x Q(x, z) \supset \exists y R(x, y)) \vee Q(z, x).$$

ПРИВЕДЕННАЯ ФОРМА

Определение *Приведенной формой* для формулы логики предикатов называется такая равносильная ей формула, в которой из операций алгебры высказываний имеются только операции ¬, ∧, ∨, причем знаки отрицания относятся лишь к предикатным переменным и к высказываниям.

Теорема *Для каждой формулы логики предикатов существует приведенная форма.*

ПРЕДВАРЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Определение *Предваренной нормальной формой* для формулы логики предикатов называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы стоят в ее начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т. е. это формула вида $(K_1x_1)\dots(K_mx_m)\ (F(x_1,\ \dots,\ x_n))$, где K_i есть один из кванторов $\forall$ или $\exists$ $(i = 1,\ \dots,\ m)$, $m \le n$, причем формула F не содержит кванторов и является приведенной формулой. (Заметим, что кванторы в формуле могут отсутствовать вовсе.)

Теорема *Для каждой формулы логики предикатов существует предваренная нормальная форма.*

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ И ВЫПОЛНИМОСТИ

Постановка проблемы и ее неразрешимость в общем виде. В алгебре высказываний было установлено, что существует четкий алгоритм, позволяющий для каждой формулы алгебры высказываний ответить на вопрос, будет ли данная формула выполнима, тождественно истинна или тождественно ложна. Для этого нужно составить таблицу истинности формулы и посмотреть на распределение нулей и единиц в ее последнем столбце. Аналогичная проблема возникает и для формул логики предикатов: существует ли единый алгоритм, позволяющий для каждой формулы логики предикатов определить, будет ли она выполнимой или общезначимой? Ответ отрицательный: *общего такого алгоритма не существует*. Это было доказано в 1936 г. американским математиком А. Чёрчем. Тем не менее для некоторых частных видов формул данная проблема допускает решение.

ИСЧИСЛЕНИЯ

ИСЧИСЛЕНИЕ (ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ)

Формальная теория $\mathcal{T}$ состоит из следующих компонент:

1. Множества знаков, образующих *алфавит* языка теории.
2. Множества слов, составленных из знаков алфавита, называемых *формулами*.
3. Подмножества формул всего множества формул, называемых *аксиомами*.
4. Множества *правил вывода*, с помощью которых из формул получают формулы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Формальное доказательство формулы $\mathcal{A}$ в теории $\mathcal{T}$ – это конечная последовательность формул

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \qquad (1)$$

где каждая формула $\mathcal{A}_i$ является либо аксиомой, либо получена из предыдущих с помощью одного из правил вывода, а $\mathcal{A}_n$ – это формула $\mathcal{A}$.

Последняя формула в доказательстве (1) называется *теоремой*. Используется символическая запись для теорем [3]:

$$\vdash \mathcal{A}.$$

Формальная теория называется *полной*, если для всякого высказывания[4] $\mathcal{A}$ имеем:

$$\vdash \mathcal{A} \text{ или } \vdash \neg\mathcal{A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ПОЛНОТА ТЕОРИИ

[3] Знак ⊢ читается как «доказуемо A» или «A теорема». Знак ⊢ введен в 1879 г. немецким логиком Фреге.

[4] Высказывание в логике предикатов – это закрытая формула, т.е. формула, все переменные которой связаны кванторами.

По замыслу создателя исчисления предикатов Фреге, любая правильно построенная формула, точнее высказывание, должна быть теоремой, т.е. должна быть доказываемым утверждением. Иначе говоря, исчисление высказываний и исчисление предикатов должны быть полными теориями. Ожидания Фреге оправдались

Но, как оказалось, более сильные теории, включающие арифметику, неполны. Это было доказано Гёделем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ

Формальная теория называется *непротиворечивой*, если в ней не является доказуемой формула

$$\mathcal{A}\&\neg\mathcal{A},$$

где $\mathcal{A}$ произвольное высказывание теории.

Смысл условия непротиворечивости в том, что оно может быть доказано средствами и в рамках самой формальной теории. Увы, таким способом, как выяснилось, невозможно установить даже непротиворечивость (формальной) арифметики.

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Исчисление высказываний – это следующая формальная теория:

1. **Алфавит.**

- Знаки пропозициональных переменных

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

- Логические связки

$$\vee,\ \&,\ \neg,\ \Rightarrow .$$

- Вспомогательные знаки

$$(\ ,\ \ ).$$

2. **Формулы.**

- Пропозициональная переменная есть (атомарная) формула.
- Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ формулы, то $(\mathcal{A}\&\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ формулы.
- Если $\mathcal{A}$ формула, то $\neg\mathcal{A}$ формула.

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

3. Аксиомы (схемы Клини).

I

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$$

$$(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$$

II

$$(\mathcal{A} \& \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$$

$$(\mathcal{A} \& \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \& \mathcal{B}))$$

III

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$B \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}))$$

IV

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \neg \mathcal{B}) \Rightarrow \neg \mathcal{A})$$

$$\neg\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

3. Правила вывода.

$$\frac{\mathcal{A},\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}\ (\textit{modus ponens}).$$

4. **Определение доказательства.**

Пусть Г – множество формул. Формула $\mathcal{A}$ *выводима* из множества *гипотез* Г, если существует конечная последовательность формул

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \qquad (\ 2)$$

где каждая формула $\mathcal{A}_i$ является либо аксиомой, либо гипотезой, либо получена из предыдущих с помощью правила вывода и $\mathcal{A}_n$ – это формула $\mathcal{A}$.

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Последовательность (2) – это *вывод* или *доказательство* формулы $\mathcal{A}$ из множества гипотез Г. Используется обозначение для вывода:

$$\Gamma \vdash \mathcal{A}.$$

Если $\Gamma = \emptyset$, то вывод называется доказательством формулы $\mathcal{A}$, а сама формула $\mathcal{A}$ в (.2) называется *теоремой*. Используется символическая запись для теорем:

$$\vdash \mathcal{A}.$$

Имеет место

Теорема . **(теорема дедукции).** *Если*

$$\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}, \text{ *то* } \Gamma \vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}).$$

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Теорема *Для исчисления высказываний справедливо утверждение:*

$\models \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathcal{A}$.

Теорема *Исчисление высказываний – полная теория.*

Теорема *Исчисление высказываний – непротиворечивая теория.*

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Дополнения в алфавит.

- Знаки индивидуальных переменных

$$x_1, x_2 ..., x_n, ...$$

- Знаки индивидуальных констант

$$c_1, c_2 ..., c_n, ...$$

- Знаки предикатов

$$P_1^{(n_1)}\underbrace{(\cdot, ..., \cdot)}_{n_1 \text{ мест}},\ P_2^{(n_2)}\underbrace{(\cdot, ..., \cdot)}_{n_2 \text{ мест}}, ...$$

- Знаки операций

$$f_1^{(n_1)}\underbrace{(\cdot, ..., \cdot)}_{n_1 \text{ мест}},\ f_2^{(n_2)}\underbrace{(\cdot, ..., \cdot)}_{n_2 \text{ мест}}, ...$$

- Логические знаки (кванторы) $\forall$, $\exists$.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

2. Термы.

1) переменные $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ – это термы;

1) константы $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ – это термы;

2) если $f_m^{(n)} \underbrace{(\cdot, \ldots, \cdot)}_{n \text{ мест}}$ – n-местный знак операции и $t_1, \ldots, t_n$ термы,

то $f_m^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ терм.

3. Формулы.

1) если $P_m^{(n)} \underbrace{(\cdot, \ldots, \cdot)}_{n \text{ мест}}$ – n-местный знак предиката и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $P_m^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ – (атомарная) формула;

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

2) если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ формулы, то $(\mathcal{A}\&\mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ формулы;

3) если $\mathcal{A}$ формула, то $\neg\mathcal{A}$ формула;

4) если $\mathcal{A}(x)$ формула, содержащая переменную x, то

$$\forall x \mathcal{A}(x), \quad \exists x \mathcal{A}(x) \qquad (\ .3)$$

формулы.

4. **Дополнительные аксиомы.**

$$\forall x \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(t),$$
$$\mathcal{A}(t) \Rightarrow \exists x \mathcal{A}(x),$$

где $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ – терм и в формуле $\mathcal{A}$ нет кванторов $\forall x_i$, $\exists x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

4. **Дополнительные правила вывода.**

$$\frac{\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}(x)}{\mathcal{B} \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)}$$

$$\frac{\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}}{\exists x \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}}.$$

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

4. **Дополнительные правила вывода.**

$$\frac{\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}(x)}{\mathcal{B} \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)}$$

$$\frac{\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}}{\exists x \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}}.$$

Теорема **(Гёдель, 1930).** *Для исчисления предикатов справедливо утверждение:*

$\models \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathcal{A}$.

Теорема *Исчисление предикатов – полная теория.*

Теорема *Исчисление предикатов – непротиворечивая теория.*

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

Теорема *Во всякой теории первого порядка, включающей формальную арифметику,*

1) *существует такая (истинная) формула А, что ни А, ни ¬А не являются доказуемыми;*

2) *утверждение о непротиворечивости этой теории – это формула данной теории, которая не является доказуемой.*

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

Теорема Гёделя говорит о том, что в любой достаточно богатой теории существуют высказывания, которые воспринимаются как истинные, разумные, но тем не менее они не могут быть обоснованы, доказаны теми средствами, которые теория предоставляет исследователю[7]. По существу, теорема утверждает, что в любом мире есть вещи, познание которых требует выхода в более обширный, высший мир. Над каждой теорией нужно надстраивать более изощренную метатеорию, над метатеорией – метаметатеорию и т.д.

[7] А.Н.Колмогоров: «Математикам хорошо известно, что в пределах каждой формальной системы, достаточно богатой математически, можно сформулировать вопросы, которые кажутся содержательными, осмысленными и должны предполагать наличие определенного ответа, хотя в пределах данной системы такого ответа найти нельзя»

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

Кроме того, теорема Гёделя говорит о несостоятельности идеи полной формализации процесса логического вывода. Иначе говоря, не все может быть формализовано, как бы этого ни хотелось математикам.

Логика второго порядка в математической логике – формальная система, расширяющая логику первого порядка возможностью квантификации (общности и существования) не только над переменными, но и над предикатами. Логика второго порядка несводима к логике первого порядка. В свою очередь, она расширяется логикой высших порядков и теорией типов.

ЛОГИКА В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

Свойство считают **существенным для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать**.

Объем понятия – это множество всех объектов, обозначаемых одним термином (словом или группой слов).

Содержание понятия – это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

Пример:

Объем понятия «прямоугольник» – это множество различных прямоугольников,

содержание – свойства прямоугольников:

«иметь четыре прямых угла»,

«иметь равные противоположные стороны»,

«иметь равные диагонали» и т.д.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот.

Например,

объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник»,

в содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник»

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

Видовое отличие – это свойства (одно или несколько), которые позволяют выделить определяемые объекты из объема родового понятия.

Определяемое понятие	⇔ опр.	Родовое понятие	+	Видовое отличие
		Определяющее понятие		

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

Если понятие а определено через род и видовое отличие, то о его объеме – множестве А – можно сказать, что в нем содержатся такие объекты, которые принадлежат множеству С (объему родового понятия с) и обладают свойством Р:

$$A = \{x: x \in C \text{ и } P(x)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

Одно и то же понятие определить через род и видовое отличие, соблюдая сформулированные выше правила, **можно по-разному**.

Пример: квадрат – это

- прямоугольник, у которого соседние стороны равны;
- прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;
- ромб, у которого есть прямой угол;
- параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

Первичные понятия косвенно определяются через систему аксиом математической теории

Пример:

В элементарной геометрии первичными могут быть:

- множество геометр. элементов (точек, прямых, плоскостей)
- отношения «принадлежит» («инцидентно»), «между», «равно» («конгруэнтно»)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ: СТРОЕНИЕ

$$\forall x \in M\,(R(x) \overset{def}{\leftrightarrow} Q(x))$$

В определении только $Q(x)$ является высказывательной формой

Само определение – это соглашение, оно не является ни высказыванием, ни высказывательной формой (нет смысла говорить, истинно определение или ложно)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ: СТРОЕНИЕ

Внешний квантор общности в определении и теореме часто опускают

$$\forall x \in M\,(R(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\forall x \in \mathbf{Z}\,(x - \textit{четно} \overset{def}{\leftrightarrow} x \vdots 2)$$

Квантор существования опускать нельзя.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

$A(x) \Rightarrow B(x)$,

можно прочитать по разному:

- Из $A(x)$ следует $B(x)$.
- Всякое $A(x)$ есть $B(x)$.
- *ЕСЛИ A(X), ТО B(X)*.
- $B(x)$ есть следствие $A(x)$.
- $A(x)$ есть достаточное условие для $B(x)$.
- $B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

- «число x кратно 4» => «число x кратно 2»

- Всякое число, которое кратно 4, кратно и 2.
- Если число кратно 4, то оно кратно и 2.
- Кратность числа 2 есть следствие кратности его 4.
- Кратность числа 4 есть достаточное условие для его кратности 2 (Для того чтобы число было кратно 2, достаточно, чтобы оно было кратно 4).
- Кратность числа 2 есть необходимое условие для его кратности 4 (Для того чтобы число было кратно 4, необходимо, чтобы оно было кратно 2).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Данное $\forall x \in M(R(x) \Rightarrow Q(x))$

Обратное данному $\forall x \in M(Q(x) \Rightarrow R(x))$

Противоположное данному

$$\forall x \in M(\neg R(x) \Rightarrow \neg Q(x))$$

Контрапозитивное данному (обратное противоположному) $\forall x \in M(\neg Q(x) \Rightarrow \neg R(x))$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Примеры:

Дана теорема: «если число делится на 3 и 4, то оно делится на 12».

Обратное: «если число делится на 12, то оно делится на 3 и 4»

Противоположное: «если число не делится на 3 или не делится на 4, то оно не делится на 12».

Контрапозитивное: «если число не делится на 12, то оно не делится на 3 или не делится на 4».

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Дана теорема: «во всяком прямоугольнике диагонали равны».

Обратное: «если диагонали четырехугольника равны, то он является прямоугольником» контрпример: равнобокая трапеция

Противоположное: «если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны» контрпример: равнобокая трапеция

Контрапозитивное: «если диагонали четырехугольника не равны, то он не является прямоугольником».

ДЕДУКТИВНЫЕ И ИНДУКТИВНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

Умозаключение – переход от посылок к заключению (следствию)

(логическая операция, состоящая в получении нового высказывания из одного или нескольких ранее известных)

Рассуждение – последовательность умозаключений, причем посылками последующих умозаключений служат следствия предыдущих умозаключений данной последовательности.

Дедуктивное умозаключение, прежде всего, основано на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия,

индуктивное – на анализе их содержания.

ДЕДУКТИВНЫЕ И ИНДУКТИВНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \Rightarrow B.$$

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

ПРИМЕРЫ СХЕМ ПРАВИЛЬНЫХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

Правило заключения:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$$

Пример:

Если запись числа *x* оканчивается цифрой 5, то число *x* делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5.

ПРИМЕРЫ СХЕМ ПРАВИЛЬНЫХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

Правило отрицания:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$$

Пример:

Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5.

ПРИМЕРЫ СХЕМ ПРАВИЛЬНЫХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

Правило силлогизма:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$$

Пример:

Если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть даны формулы $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m, \mathcal{B}$. Формула $\mathcal{B}$ является *логическим следствием* формул $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m$, если, придавая значения переменным $X_1, ..., X_n$, от которых зависят все рассматриваемые формулы, всякий раз, когда истинны одновременно все формулы $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m$, истинна и формула $\mathcal{B}$.

Для логического следствия используется запись

$$\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_m \models \mathcal{B}.$$

Для проверки наличия логического следования достаточно построить истинностную таблицу.

Пример Проверить, что

$$X, Y, (Z \& X \Rightarrow \neg Y) \models \neg Z.$$

Имеем истинностную таблицу:

X	Y	Z	$Z \& X \Rightarrow \neg Y$	$\neg Z$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

Из второй строки видно, что ( ) есть логическое следствие.

ДЕДУКТИВНЫЕ И ИНДУКТИВНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B.$$

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

ПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Схема рассуждений $\dfrac{A_1,\ldots A_n}{A}$ азывается **правильной**, если всякое рассуждение по этой схеме, все посылки которого истинны, имеет истинное заключение.

Схема рассуждений $\dfrac{A_1,\ldots A_n}{A}$ азывается **неправильной**, если существует расс $\quad$ этой схеме, все посылки которого истинны, а заключение ложно.

ПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ. ПРИМЕР

Схема рассуждений
$$\frac{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \neg P(c)}{\neg Q(c)}$$

правильная?

ПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ. ПРИМЕР

Схема рассуждений
$$\frac{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \neg P(c)}{\neg Q(c)}$$

правильная?

В рассуждении
$$\frac{\forall x(x \vdots 4 \Rightarrow x \vdots 2), \neg(6 \vdots 4)}{\neg(6 \vdots 2)}$$

посылки истинны, а заключение ложно.

Значит, схема неправильная.

ПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Чтобы доказать, что рассуждение является неправильным, достаточно привести пример рассуждения, имеющего ту же схему, посылки которого истинны, а заключение ложно.

Чтобы доказать, что схема рассуждений является правильной, достаточно показать, что она является частным случаем какого-нибудь правила доказательства.

БЕСКВАНТОРНЫЕ ПРАВИЛА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

$$\frac{A \wedge B}{A} \text{ и } \frac{A \wedge B}{B}$$ - правила удаления конъюнкции

$$\frac{A, B}{A \wedge B}$$ - правила введения конъюнкции

$$\frac{A}{A \vee B} \text{ и } \frac{B}{A \vee B}$$ - правила введения дизъюнкции

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B}$$ - правило доказательства

исключением случаев

БЕСКВАНТОРНЫЕ ПРАВИЛА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

- правило удаления импликации (modus ponens)

$$\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

- правило силлогизма

$$\frac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \neg A}$$

- правило контрапозиции

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}, \quad \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)}, \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}, \quad \frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)}$$

- правила де Моргана

КВАНТОРНЫЕ ПРАВИЛА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

$$\frac{\forall x A(x)}{A(c)}$$ - правило конкретизации

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$ - правило доказательства

утверждений существования

$$\frac{\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)), \neg B(t)}{\neg A(t)}$$ - правило обобщенной

контрапозиции

КВАНТОРНЫЕ ПРАВИЛА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

$$\frac{A(t), \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))}{B(t)}$$

- правило частного заключения

$$\frac{\neg\exists x A(x)}{\forall x \neg A(x)}, \quad \frac{\forall x \neg A(x)}{\neg\exists x A(x)}, \quad \frac{\exists x \neg A(x)}{\neg\forall x A(x)}, \quad \frac{\neg\forall x A(x)}{\exists x \neg A(x)}$$

- кванторные правила де Моргана

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

В учебниках (школьных, вузовских) доказательства даются как **содержательные**, поскольку излагаемые в них теории содержательные, либо полуформальные.

При **содержательном доказательстве** не фиксируется внимание на используемой логике, правилах рассуждений, а применяется логика интуитивная. Для всякого содержательного дедуктивного доказательства, в принципе, возможно построение соответствующего ему **формального доказательства** со строгим обоснованием всех логических переходов.

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Всякое математическое доказательство построено в соответствии с **правилами доказательства**, т.е. с правильными схемами рассуждений.

Если в рассуждении встречаются слова «допустим» или «пусть», это свидетельствует о том, что в рассуждении используются **допущения**, а само рассуждение является непрямым.

Рассуждение называют **непрямым**, или **косвенным**, если вывод в нем сделан не напрямую из предшествующих предложений, а на основе вспомогательных рассуждений, исходящих из допущений.

Способы косвенного доказательства называют **методами доказательства.**

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. ОБОЗНАЧЕНИЯ

$$\cfrac{\dfrac{[A]}{\overline{B}}}{A \to B}$$

Предложение в квадратных скобках обозначает допущение. Двойная черта означает, что во вспомогательном рассуждении может быть несколько шагов.

При доказательстве условных утверждений вместо слов «Допустим A. Докажем B» обычно говорят «Дано A. Требуется доказать B».

МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИВЕДЕНИЕМ К НЕЛЕПОСТИ (REDUCTION AD ABSURDUM)

Пусть *A* – произвольное предложение. Если требуется доказать предложение не-*A* (то есть опровергнуть предложение *A*), то *A* принимают в качестве допущения и выводят из него противоречие, т.е. предложения *B* и не-*B* для некоторого предложения *B*.

$$\frac{\dfrac{[A]}{\overline{\overline{B}}}\;,\;\dfrac{\underline{[A]}}{\neg B}}{\neg A}$$

МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОТ ПРОТИВНОГО

Пусть *A* – произвольное предложение. При доказательстве этим методом из допущения не-*A* выводят противоречие, после чего заключают, что обосновано само *A*.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A]}{\overline{B}}, \quad \dfrac{[\neg A]}{\overline{\neg B}}}{A}$$

СПОСОБЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МАТЕМ. ТЕОРЕМ

косвенного доказательства

- доказательства разбором случаев,
- от противного (приведения к абсурду),

цепочкой импликаций,

цепочкой эквиваленций.

Способ доказательства цепочкой импликаций основан на тавтологии транзитивности импликации,

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

выражающейся в правиле силлогизма.

Способ доказательства цепочкой эквиваленций – на тавтологии транзитивности эквиваленции

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$$

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В таких задачах, как правило, имеется ряд высказываний, относительно которых известно, что столько-то из них истинны, а столько-то ложны, но не известно, какие именно истинны, а какие ложны.

Например, пусть имеется три высказывания U, V, W, из которых два истинны, а одно ложно. Учитывая эти условия, нужно составить из этих высказываний некое сложное высказывание, которое будет заведомо истинно (или ложно). Затем, используя законы логики, преобразовать его к виду, из которого определится ответ на вопрос задачи.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В нашем примере так как два высказывания истинны, то все дизъюнкции пар высказываний будут истинными:

$$U \vee V\ ,\ V \vee W\ ,\ U \vee W$$

Значит, будет истинной

$$(U \vee V) \wedge (V \vee W) \wedge (U \vee W)$$

Равносильное преобразование этого выражения будет зависеть от структуры высказываний *U*, *V*, *W*.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ЗАДАЧА ПРО ТУРИСТА.

Турист направлялся к озеру и дошел до перекрестка, откуда одна дорога вела к озеру, а другая – нет. Какая из дорог шла к озеру, он не знал. На перекрестке сидели двое парней. Один из них всегда говорил правду, а второй – всегда лгал. На каждый вопрос они отвечали «да» или «нет». Все это было известно туристу, но он не знал, кто из них говорит правду. Тогда турист спросил каждого из парней об одном и том же и по их ответам безошибочно решил, какая дорога ведет к озеру. Какой это был вопрос?

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ЗАДАЧА ПРО ТУРИСТА.

- *Решение*. Очевидно, что вопрос должен быть составным высказыванием, в котором одно простое высказывание имеет известное туристу значение. Эта подсказка помогает прийти к следующему: верно, что $2 \cdot 2 = 5$ и что дорога, идущая налево, ведет к озеру?
- Обозначим первое высказывание (т. е. $2 \cdot 2 = 5$) из этой конъюнкции через υ, а второе – через ω, причем $\upsilon = 0$. Для высказывания ω имеются две возможности: 1) $\omega = 0$; 2) $\omega = 1$. Рассмотрим каждую из них.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ЗАДАЧА ПРО ТУРИСТА.

- 1) Парень, говорящий правду, скажет, что $(\upsilon \wedge \omega) = 0$, а лгун – $(\upsilon \wedge \omega) = 0$,

  так как у него $\upsilon = 1$, $\omega = 1$ *и* $\upsilon \wedge \omega = 1$.

- 2) Говорящий правду ответит, что $(\upsilon \wedge \omega) = 0$,

  а лгун – $(\upsilon \wedge \omega) = 1$, так как на самом деле $\upsilon = 0$, $\omega = 1$, $(\upsilon \wedge \omega) = 0$, а лгун должен все значения изменить на противоположные.

Из рассмотрения этих случаев вытекает, что если ответы различные, то дорога выбрана правильно.