

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

# МОНТЕ- КАРЛО



ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДЯЩИХ СВОЙСТВ  
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*И.В. Загинайло, Я.А. Максименюк, А.Н. Писаренко  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

Доклад на международном научно-техническом семинаре  
«Моделирование и оптимизация композиционных строительных материалов»

Одесса, 2016

# ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

- ❑ Наше исследование лежит в русле актуальной задачи создания новых строительных композиционных материалов с заданными теплоизолирующими свойствами для ограждающих конструкций зданий и сооружений.
- ❑ Предсказание теплоизолирующих свойств новых композитов на основе теории обобщенной проводимости сопряжено с трудностями, обусловленными структурной неоднородностью материалов.
- ❑ Альтернативным подходом к предсказанию теплоизолирующих свойств композитов является математическое моделирование с использованием методов Монте-Карло.
- ❑ Моделирование по методу Монте-Карло мы решили дополнить анализом влияния размещения включений на величины и пути прохождения локальных тепловых потоков в случайно-неоднородных композиционных материалах.

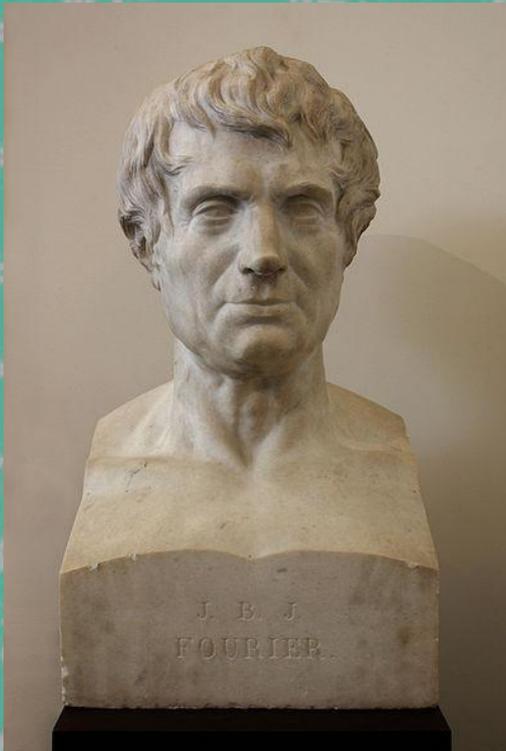
# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

- ❑ Неоднородность материала означает координатную зависимость теплопроводности  $\lambda(x, y)$ . При этом в двухфазном материале  $\lambda(x, y)$  может принимать только два значения: теплопроводности матрицы  $\lambda_M$  или теплопроводности включений  $\lambda_B$ .

- ❑ Дифференциальное уравнение теплопроводности, записанное в соответствие с гипотезой Фурье, в случае координатной зависимости  $\lambda$  и отсутствия источников принимает вид

$$\nabla[\lambda(x, y) \cdot \nabla T(x, y)] = 0$$

- ❑ Данное уравнение дополняется граничными условиями первого рода: фиксированными температурами на внешних границах.



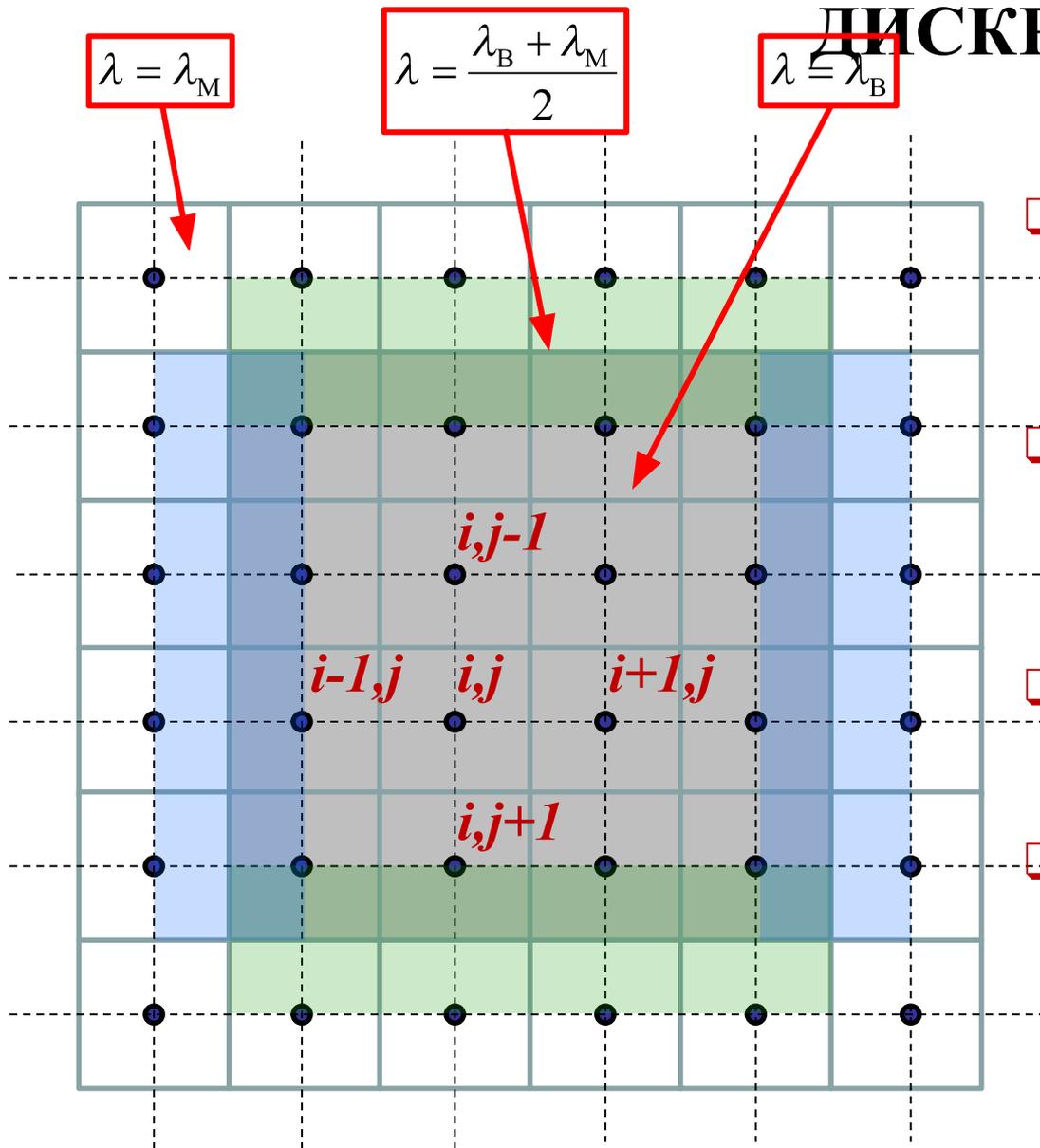
# ИНСТРУМЕНТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

- ❑ Собственная программа для решения 2D и 3D уравнений теплопроводности методом релаксации (конечные разности) на прямоугольной сетке размером до **20 млн.** узлов. При граничных условиях первого рода форма области может быть задана произвольной. Также в произвольном числе узлов могут быть заданы источники или стоки тепла.
- ❑ Программа протестирована на задачах, для которых известны аналитические решения. Отклонения численных решений от аналитических составляют менее  **$10^{-5}$** .
- ❑ Подробное описание алгоритма и результатов тестирования можно найти в статье: *Загинайло И.В., Максименюк Я.А., Писаренко А.Н. Применение метода эквивалентности при расчете двумерных стационарных температурных полей с источниками в композиционных материалах. Вестник ОГАСА, Выпуск 62, 2015, с.69-75.*

# МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

- ❑ Мы ограничились двумерной моделью.
- ❑ Моделировался материал, состоящий из вяжущей матрицы и случайно расположенных теплоизолирующих включений квадратной формы и одинакового размера.
- ❑ Теплопроводность вяжущей матрицы выбрана равной теплопроводности песочной-цементной смеси  $\lambda_M = 0,93$  Вт/(м·К).
- ❑ Теплопроводность включений выбрана равной теплопроводности пенопласта  $\lambda_B = 0,045$  Вт/(м·К).
- ❑ Распределение включений по площади матрицы задавалось равновероятным.
- ❑ Задавалась минимально допустимая толщина слоя вяжущей матрицы  $d_{min}$  вокруг каждого включения.

# ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ



- ❑ Вся область разбивалась на элементарные квадраты единичного размера  $h$
- ❑ Узлы сетки размещались в центрах элементарных квадратов; шаг сетки =  $h$
- ❑ Принятая нумерация узлов показана на рисунке
- ❑ В выделенных областях эффективная теплопроводность считалась как среднее значение  $\lambda_M$  и  $\lambda_B$

# КОНФИГУРАЦИЯ РАСЧЕТА

Граничное условие  
«сверху»:

$$T = T_B - \frac{T_B - T_H}{161} \cdot (i - 1)$$

Граничные слои  
области ( $i=1$ ;  $i=162$ ;  
 $j=1$ ;  $j=322$ ) не содержат  
теплоизолирующих  
включений

Граничное условие  
«слева»:  $T = T_B$

322 «строки»

162 «столбца»  $i$

$j$

Направление  
градиента  
температуры

Ширина столбца и  
высота строки равна  
шагу сетки  $h$

Внутренняя область  
160 строк, по которой  
находится эффективная  
теплопроводность  
материала

Граничное условие  
«справа»:  $T = T_H$

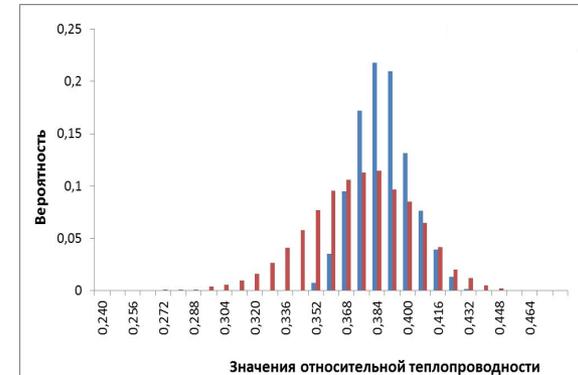
Граничное условие  
«снизу»:

$$T = T_B - \frac{T_B - T_H}{161} \cdot (i - 1)$$

# ХОД РАСЧЕТА

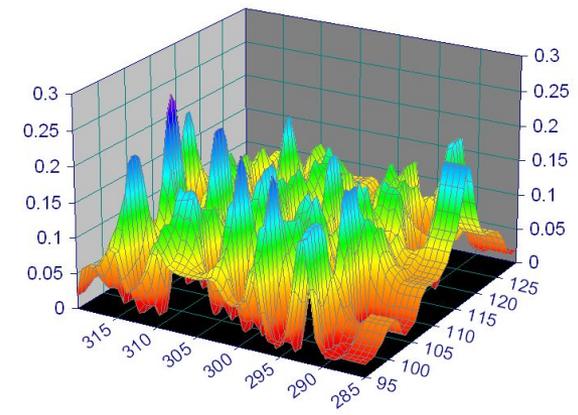
❑ Моделировались варианты композиционного материала с различными размерами включений  $a$  ( $a \ll A$ , характерного размера всей области), разной концентрацией включений  $\eta$  и разным  $d_{\min}$ .

❑ Для каждого варианта (комбинации  $a$ ,  $\eta$  и  $d_{\min}$ ) выполнялось от 4000 до 8000 испытаний: генераций случайного размещения включений и решений уравнения теплопроводности. В результате строилось распределение эффективной теплопроводности материала.



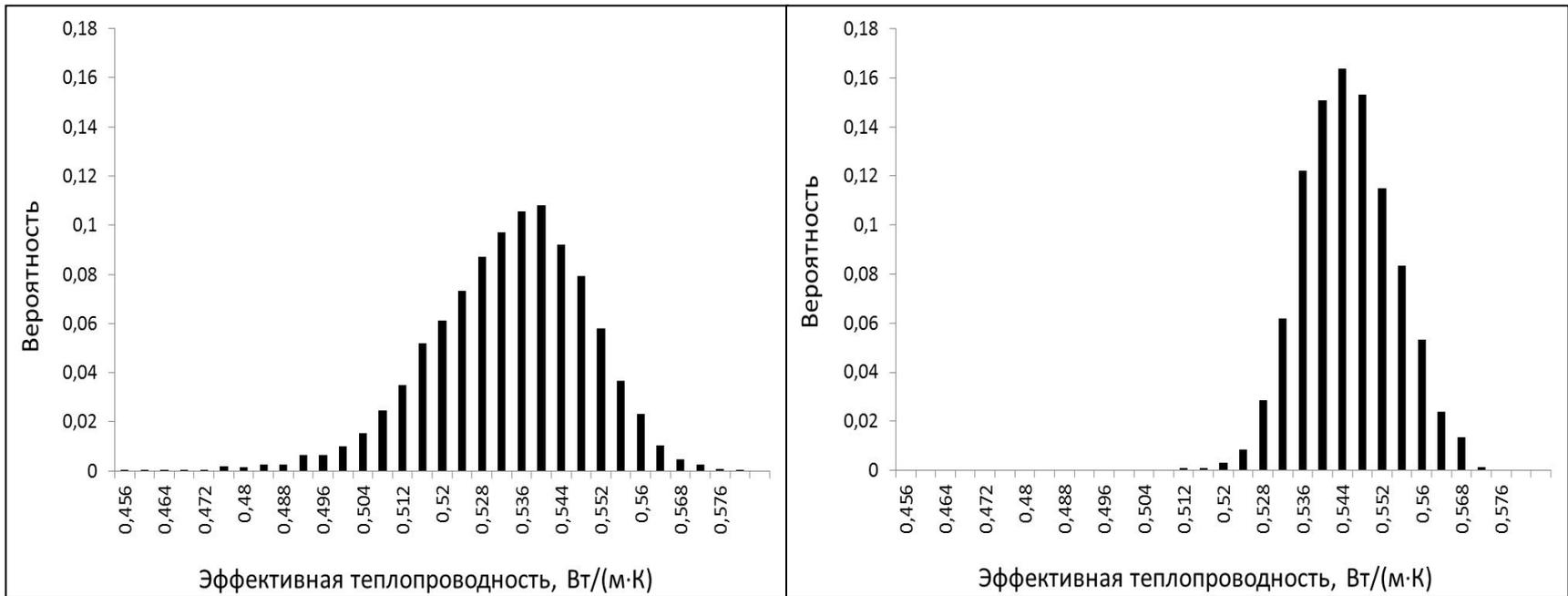
❑ Для каждого испытания сохранялась карта размещений включений.

❑ Для каждого сохраненного испытания по решению исследователя могут быть построены карта температурного поля и карта локальных тепловых потоков между узлами расчетной сетки.



# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Параметры материала: размеры включений  $a = 4h$ , концентрация включений  $\eta = 0,28$ ;  $d_{\min}$  - разное ; по результатам 4000 испытаний.

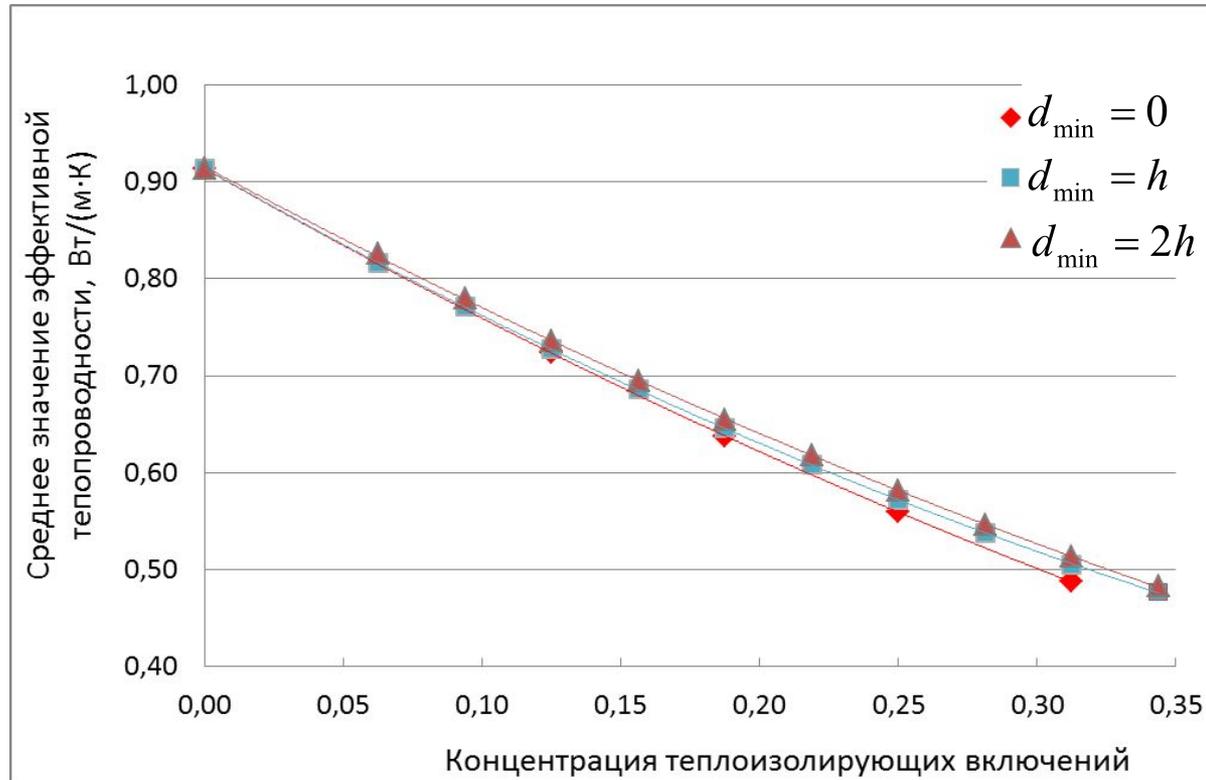


$$d_{\min} = 0.$$

$$d_{\min} = 3h.$$

# КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Параметры материала: размеры включений  $a = 4h$ .



$$\lambda_{eff} = \lambda_M \left( 1 - \frac{\alpha \eta}{1 + \beta \sqrt{\eta^3}} \right)$$

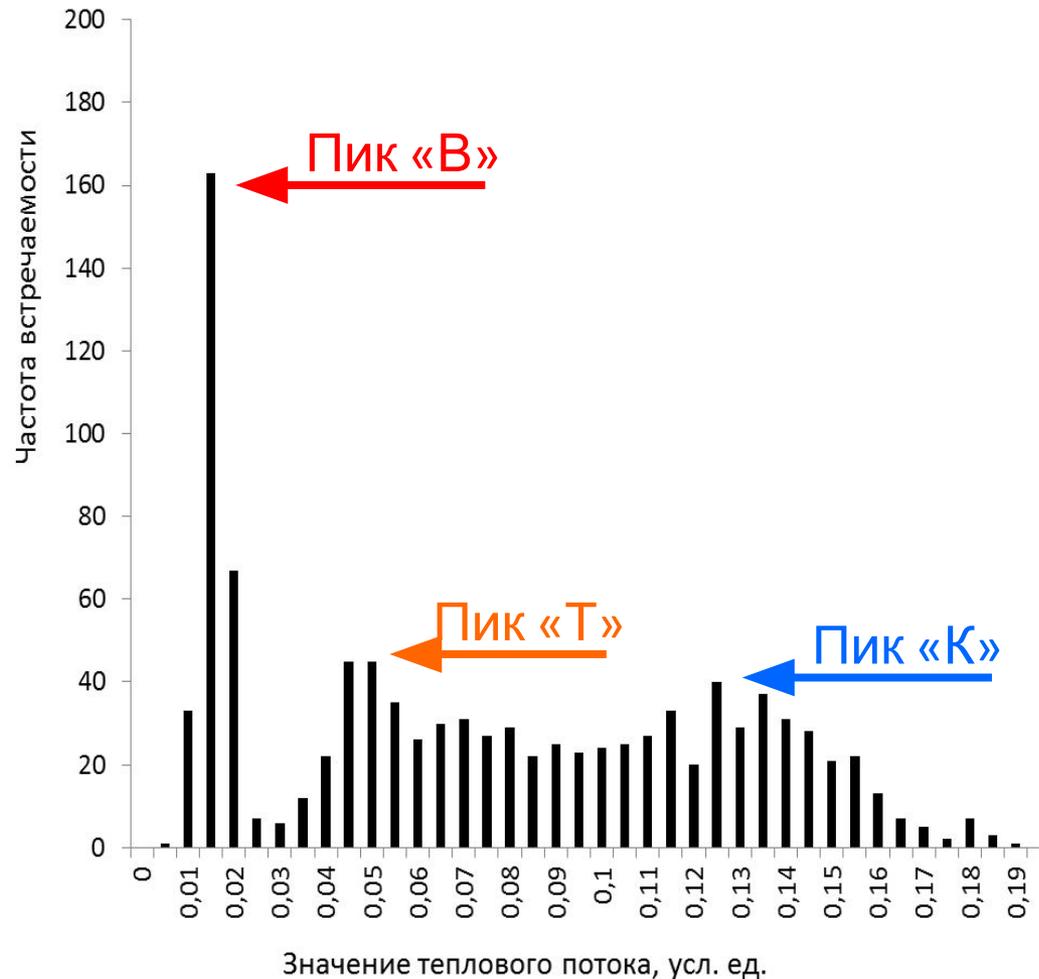
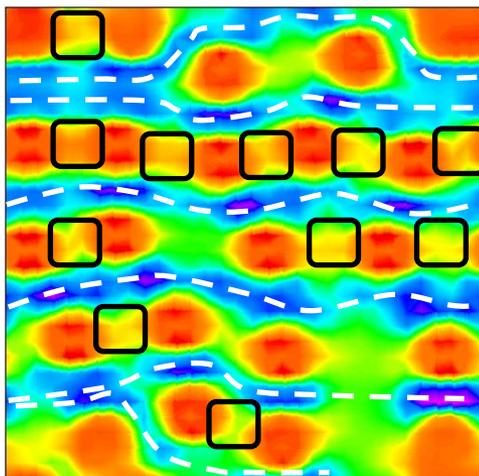
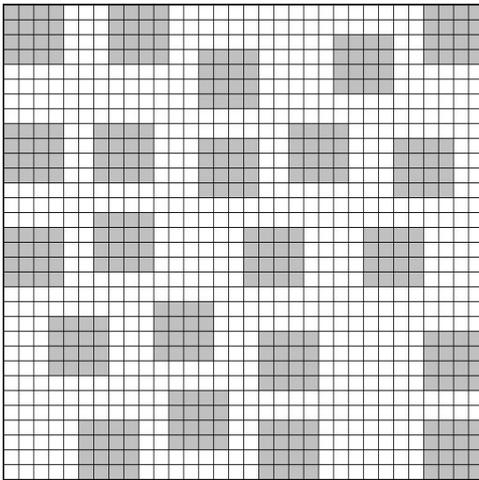
$d_{\min}$	$\alpha$	$\beta$
0	1,71	0,837
$h$	1,69	1,01
$2h$	1,61	0,843

# ДРУГИЕ ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

- ❑ Среднее значение эффективной теплопроводности  $\lambda_{eff}$  зависит от  $d_{min}$  в области значений  $d_{min} < a$ . Наименьшие значения  $\lambda_{eff}$  при неизменной концентрации включений  $\eta$  достигаются при  $d_{min} = 0$ . При  $d_{min} > a$  такая зависимость практически не проявляется.
- ❑ Величина  $\lambda_{eff}$  зависит от размера включения  $a$ . В диапазоне исследования  $3h < a \ll A$  с ростом  $a$  наблюдается уменьшение значения  $\lambda_{eff}$  при неизменных  $\eta$  и  $d_{min}$ .
- ❑ Разброс значений (размах распределения) растет по мере уменьшения  $d_{min}$  и по мере роста  $\eta$  и  $a$ .
- ❑ При  $d_{min} = 0$  и малых  $\eta$  распределение  $\lambda_{eff}$  имеет более вытянутое левое крыло (более вероятны появления низких значений  $\lambda_{eff}$ ). При больших  $\eta$  и при приближении  $d_{min}$  к  $a$  более вытянутым становится правое крыло распределения (более вероятны появления высоких значений  $\lambda_{eff}$ ).

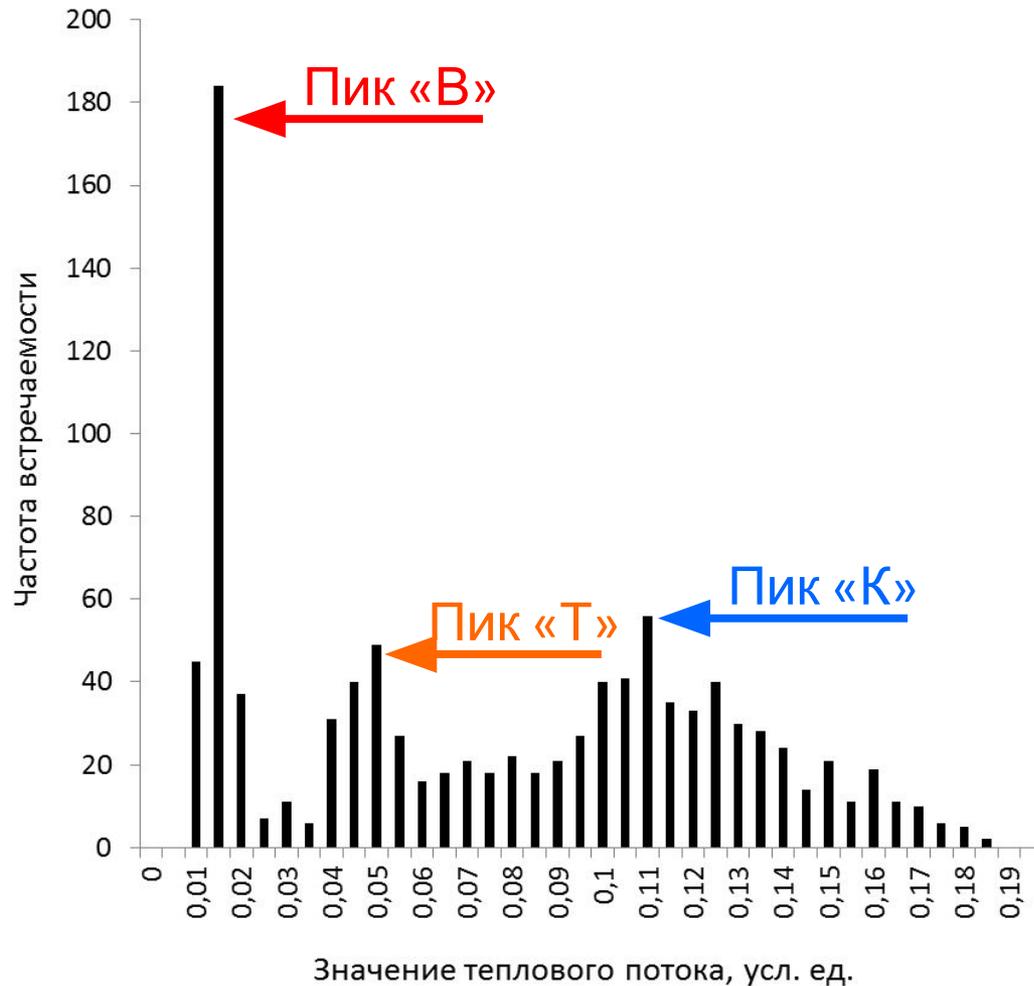
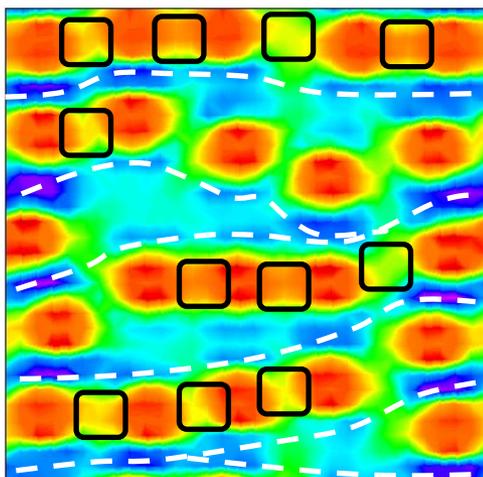
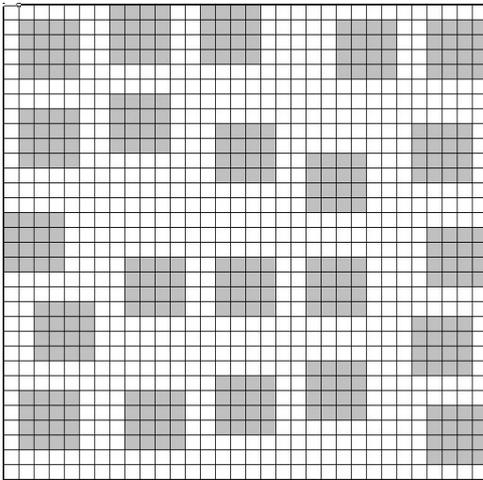
# ФРАГМЕНТ 1

Параметры материала: размеры включений  $a = 4h$ ;  
концентрация включений  $\eta = 0,31$ ;  $d_{\min} = 2h$ ;  $\lambda_{\text{eff}} = 0,50$  Вт/(м·К).

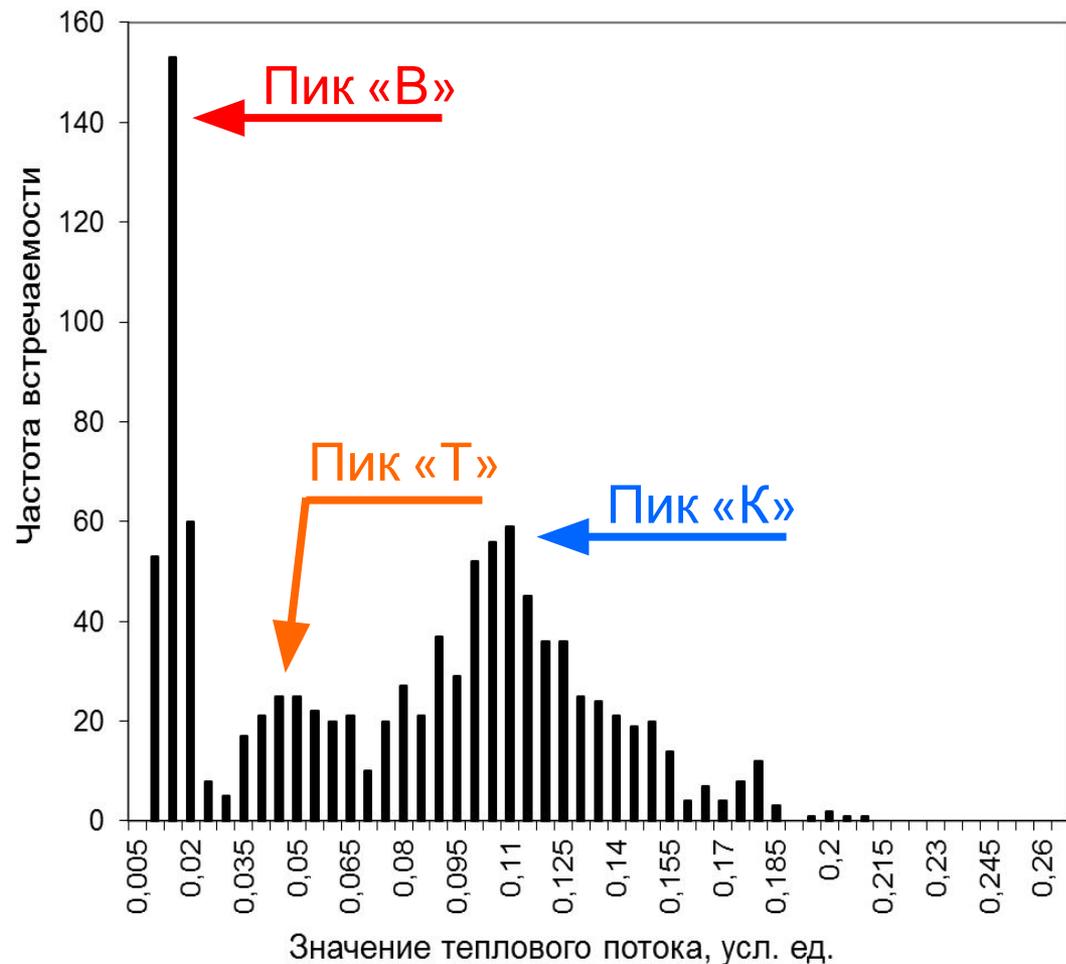
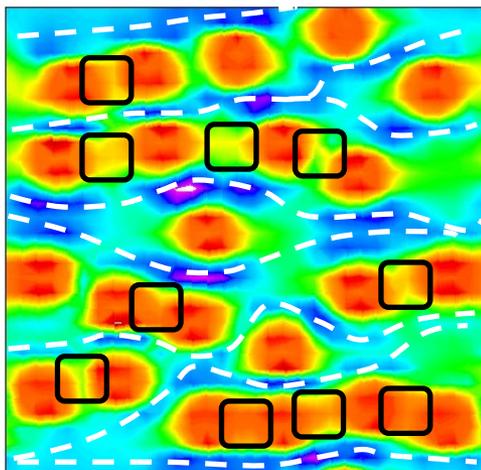
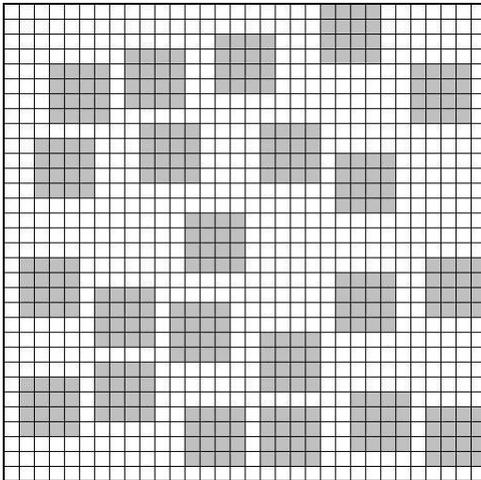


# ФРАГМЕНТ 2

Параметры материала: размеры включений  $a = 4h$ ;  
концентрация включений  $\eta = 0,31$ ;  $d_{\min} = 2h$ ;  $\lambda_{\text{eff}} = 0,46$  Вт/(м·К).

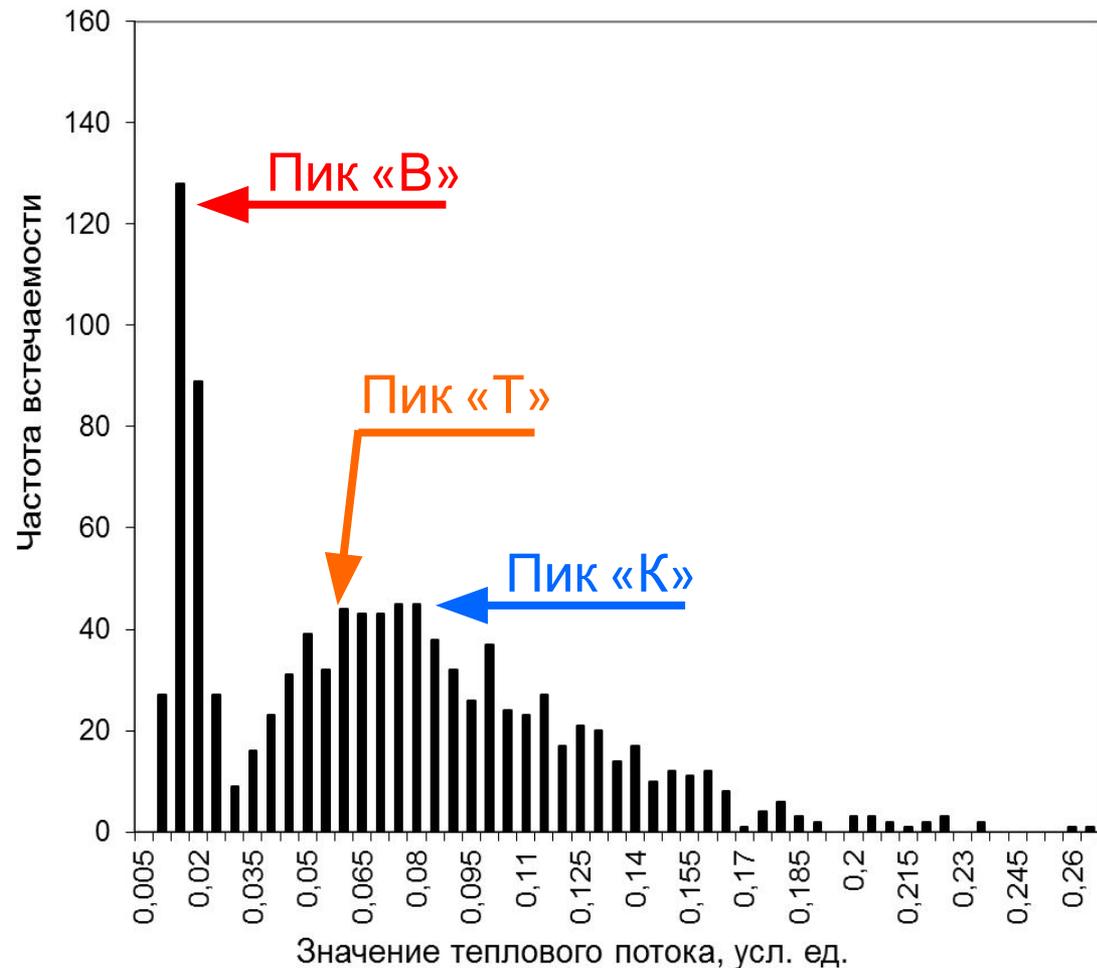
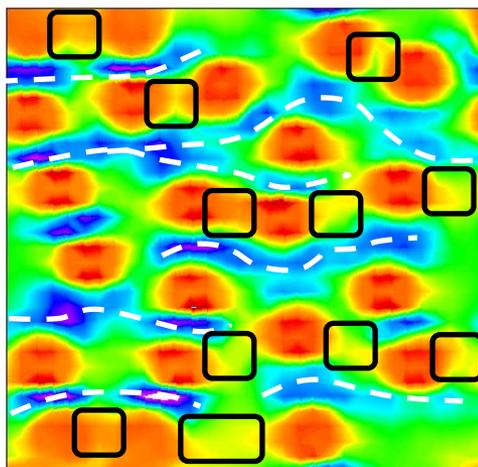
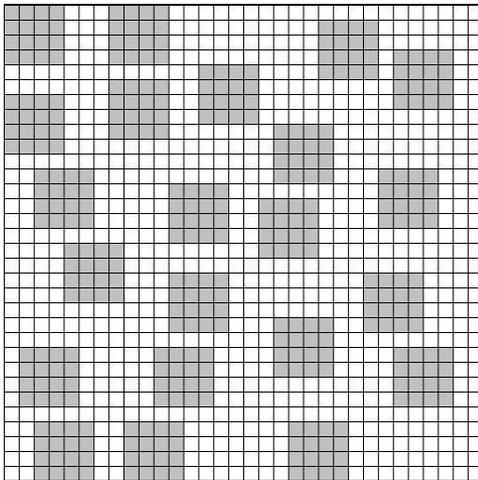


Параметры материала: размеры включений  $a = 4h$ ;  
 концентрация включений  $\eta = 0,31$ ;  $d_{\min} = h$ ;  $\lambda_{\text{eff}} = 0,50$  Вт/(м·К).



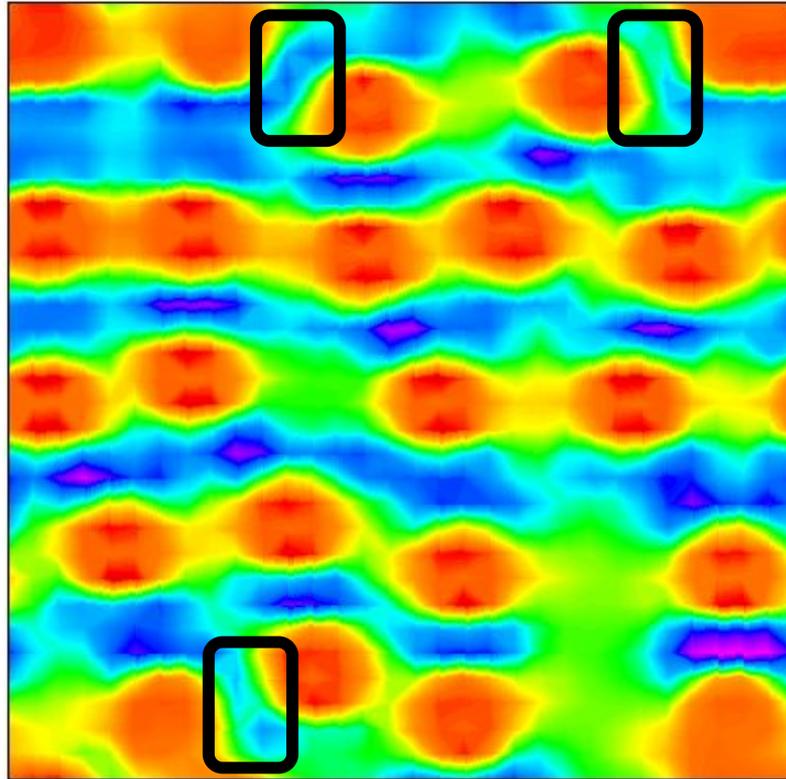
# ФРАГМЕНТ 4

Параметры материала: размеры включений  $a = 4h$ ;  
концентрация включений  $\eta = 0,31$ ;  $d_{\min} = h$ ;  $\lambda_{\text{eff}} = 0,44$  Вт/(м·К).



# ВЛИЯНИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ

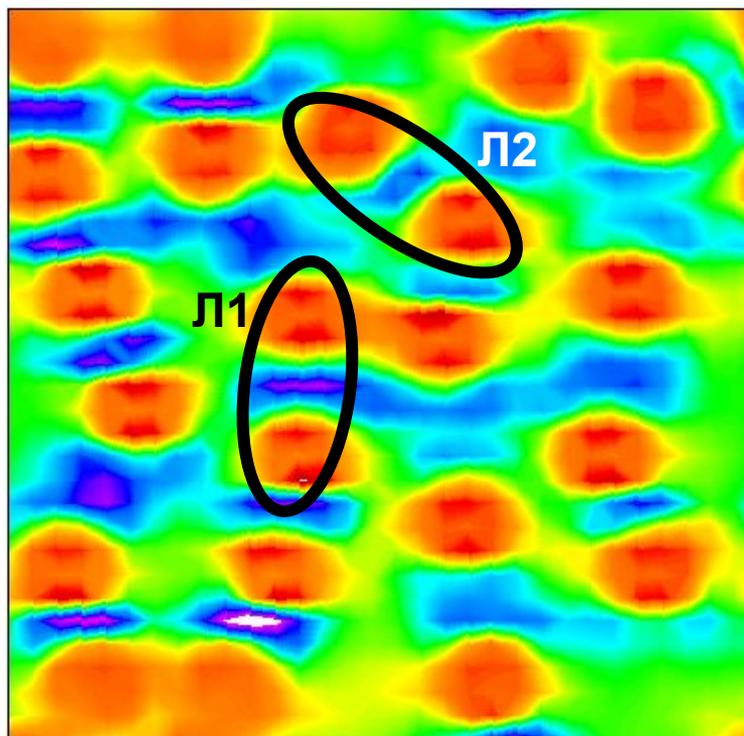
- На некоторых участках теплопроводящих каналов локальный тепловой поток может быть направлен под значительным углом к макроградиенту температуры. Это удлиняет тепловой путь и приводит к увеличению теплового сопротивления канала.



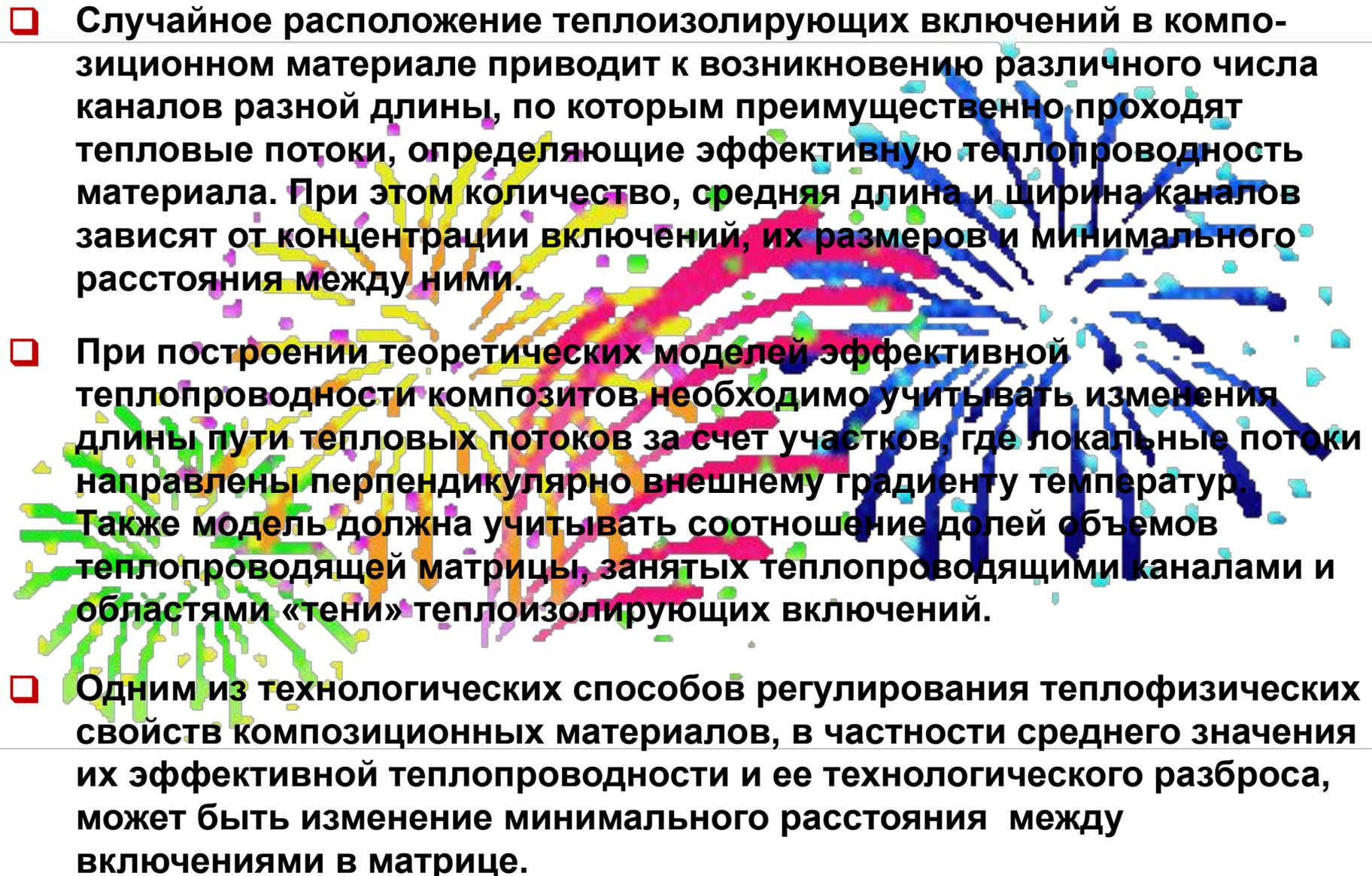
Этот эффект проявляется в большей мере при малых  $d_{\min}$ .

# ТЕПЛО-ОПТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

- Действие теплоизолирующих включений, направляющих тепловые потоки в узкие каналы в теплопроводящей матрице, можно назвать «фокусировкой тепловых потоков». Поэтому можно говорить, что при определенной конфигурации теплоизолирующих включений возникают «тепловые линзы».



Если «тепловые линзы» выстраиваются таким образом, что образуются значительное количество прямых протяженных теплопроводящих каналов для потоков, направленных вдоль внешнего градиента температур, то через материал будут идти повышенные теплотери.

- 
- ❑ **Случайное расположение теплоизолирующих включений в композиционном материале приводит к возникновению различного числа каналов разной длины, по которым преимущественно проходят тепловые потоки, определяющие эффективную теплопроводность материала. При этом количество, средняя длина и ширина каналов зависят от концентрации включений, их размеров и минимального расстояния между ними.**
  - ❑ **При построении теоретических моделей эффективной теплопроводности композитов необходимо учитывать изменения длины пути тепловых потоков за счет участков, где локальные потоки направлены перпендикулярно внешнему градиенту температур. Также модель должна учитывать соотношение долей объемов теплопроводящей матрицы, занятых теплопроводящими каналами и областями «тени» теплоизолирующих включений.**
  - ❑ **Одним из технологических способов регулирования теплофизических свойств композиционных материалов, в частности среднего значения их эффективной теплопроводности и ее технологического разброса, может быть изменение минимального расстояния между включениями в матрице.**