

Дистанционное обучение

Слайд-лекции по дисциплине

«Высшая математика»

Для студентов 2 курса ТГТ группы ПРПИ-19 и ТОРА -19

2020-2021 уч. г.

Линейная алгебра

- Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными и понятие определителя 2-го порядка.
- Определители 3-го порядка, вычисление и свойства.
- Система двух линейных уравнений с тремя неизвестными.
- Правило Крамера.
- Система трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными.
- Понятие определителя n -го порядка.
- Обобщение формулы Крамера на случай системы n - линейных уравнений.
- Понятие матрицы. Линейные операции над матрицами.
- Обратная матрица.
- Решение системы линейных уравнений матричным способом.
- Ранг матрицы.
- Теорема Кронеккера-Капелли.
- Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Понятие определителя 2-го порядка

Определитель второго порядка, соответствующий таблице

элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, определяется равенством

$$\Delta = D = \det = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

где a_1 и b_2 — элементы главной диагонали,
 a_2 и b_1 — элементы побочной диагонали

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2$$

Системы 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Варианты решений

- $\Delta \neq 0$ — система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad - \text{формулы Крамера}$$

- $\Delta = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0$ — система не имеет решения
- $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$ — система имеет бесконечное множество решений

Определители 3-го порядка, вычисление и свойства

Определитель третьего порядка, соответствующий таблице

элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ определяется равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

где a_1, b_2 и c_3 — элементы главной диагонали,

a_3, b_2 и c_1 — элементы побочной диагонали

Правило треугольников – схема нахождения определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

+

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

-

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-5) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 6 = -21$$

Правило Саррюса- схема нахождения определителя 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -21$$

Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками.
2. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.
3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.
4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
5. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
6. Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Пример

Вычислить определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Так как элементы 2-ой и 3-ей строки одинаковы, то определитель равен 0.

Система двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

- Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно выражается через два других, значения которых остаются произвольными.
- Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ не выполнено, то решения системы находятся по формулам

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad y = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t.$$

Правило Крамера – метод решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Варианты решений

- $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad - \text{формулы Крамера}$$

- $\Delta = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0$ – система не имеет решения
- $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$ – система имеет бесконечное множество решений

Пример:

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -9, \\ 8x + 3y + 5z = -13, \\ 2x + 5y - z = -5. \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим главный определитель системы и вычислим его

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -8 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ -8 & 5 & -16 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} =$$
$$(-1) \cdot (-8) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -16 \cdot (-2 - 2) = 64 \neq 0.$$

Следовательно, по правилу Крамера система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Составим и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -9 & 1 & 3 \\ -13 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 64, \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 8 & -13 & 5 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -128, \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 8 & 3 & -13 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -192.$$

Итак, $x = \frac{64}{64} = 1, y = -\frac{128}{64} = -2, z = -\frac{192}{64} = -3$ - решение системы.

Ответ: $x = 1, y = -2, z = -3$.

Система трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными.

Линейное уравнение называется *однородным*, если его свободный член равен нулю.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все входящие в нее уравнения являются линейными однородными уравнениями.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Если определитель отличен от нуля, то она имеет единственное решение $x=0, y=0, z=0$.

В противном случае она имеет бесконечное множество решений

Понятие определителя n -го порядка.

Определителем n -го порядка называется число Δ , образованное из n^2 чисел a_{ij} (элементов), расположенных в квадратной таблице из n строк и n столбцов, следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка
который получается путем вычеркивания в

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го
порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка
который получается путем вычеркивания в исходном
определителе строки и столбца, содержащих элемент
 a_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}
определителя n -го порядка называется его минор,
умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Теорема Лапласа

Каждый определитель равен сумме произведений элементов любой его строки(столбцов) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

(разложение по элементам i -ой строки, где $i=1,2, \dots, n$).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj},$$

(разложение по элементам j -го столбца, где $j=1,2, \dots, n$).

Пример:

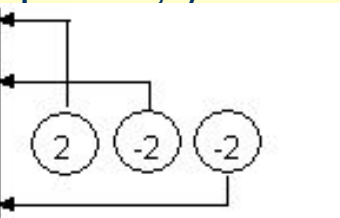
Вычислить определитель, разлагая его по элементам второго столбца

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \\
 & 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{5+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \\
 & \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -48 \\
 & \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = -96
 \end{aligned}$$

Пример: Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

- Прибавим к первой строке удвоенную третью, ко второй строке -третью, умноженную на -2, а к четвертой строке – третью, умноженную на -2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$


- Получили преобразованный определитель, который можно разложить по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 0 & -17 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 306$$

- Теперь определитель 3-го порядка можно также разложить по строке (столбцу) или подсчитать по правилу треугольников, предварительно вынося за знак определителя общий множитель третьей строки

Обобщение формулы Крамера на случай системы n - линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим определитель, т.е.

$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Варианты решений

Если для системы уравнений определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \left(i = \overset{\wedge}{1}, n \right)$$

где определитель Δ_i - полученный из определителя Δ заменой i -го столбца на столбец свободных членов.

Пример:

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -18 & 0 & 8 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 8 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 18 + 40 = 58. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, система уравнений может быть решена по формулам Крамера. Найдем определители $\Delta x_1 - \Delta x_4$:

$$\Delta \tilde{o}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 6 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 22 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -22 & -7 \end{vmatrix} = -(-14 - 48) = 58;$$

$$\Delta \tilde{o}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & 0 & 8 \\ -3 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 8 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 19 + 48 = 58;$$

Таким же образом высчитываем Δx_4 и получаем: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = -\Delta x_3 = \Delta x_4$,
и, следовательно, $x_1 = x_2 = -x_3 = x_4 = 1$.

$$\Delta \tilde{o}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & -6 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= -(70 - 12) = -58.$$

Таким же образом высчитываем Δx_4 и получаем: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = -\Delta x_3 = \Delta x_4$,
и, следовательно, $x_1 = x_2 = -x_3 = x_4 = 1$.

Понятие матрицы. Линейные операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[]$, $\| \|$.

или, в сокращенной записи, $A = (a_{ij})$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Виды матриц

Две матрицы A и B одного размера называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i=1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица называется **квадратной n -го порядка**, если число ее строк равно числу столбцов и равно n

Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой**, а из одного столбца - **матрицей-столбцом**

Виды матриц

Матрица $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ получающаяся из матрицы A

заменой строк столбцами (и наоборот), называется **транспонированной** (по отношению к матрице матрицей).

Матрица называется **симметрической** матрицей, если $A^T = A$
кососимметрической, если $A^T = -A$

Линейные операции над матрицами.

- *Умножением матрицы на число k* называется матрица, каждый элемент которой умножен на это число.
- *Суммой* двух матриц одинаковых размеров называется матрица, элементы которой равны суммам элементов исходных матриц, расположенных на соответствующих местах.
- *Разность* двух матриц одинаковых размеров определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.
- *Умножением матрицы на матрицу* называется матрица, каждый элемент которой равен сумме произведения элементов i -й строки первой матрицы на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы.

Обратная матрица

Квадратная матрица A^{-1} определитель которой $\det A \neq 0$, называется *неособенной* или *невыврожденной* матрицей. В противном случае она называется *вырожденной* или *особенной*.

Квадратная матрица называется *обратной* к квадратной матрице, если выполняется равенство

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E$$

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).

Обратная матрица существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример:

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Определитель $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ — A — невырожденная матрица, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Подставляя алгебраические дополнения и $\Delta A = -9$ в формулу, найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Пример:

Найти матрицу, обратную матрице $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель исходной матрицы:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Так как $\Delta A = 0$, то данная матрица не является вырожденной, и для нее нельзя составить обратную матрицу

Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) может быть записана в виде эквивалентного ей матричного уравнения

$$A \cdot X = B, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (2), а следовательно, и системы (1) может быть записано, если A - невырожденная, с помощью обратной матрицы в виде

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (3)$$

Пример:

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Запишем соответствующее матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно формуле (3) решение системы имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$.
Следовательно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Ранг матрицы.

Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

произвольно выделено k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k , определитель, которой называется *минором k -го порядка матрицы*.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы, называется *рангом* матрицы и обозначается $r(A)$. Любой минор порядка r , отличный от нуля, называется *базисным минором*.

Методы вычисления ранга матрицы - метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице найден минор k -го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$ -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор, если все они равны нулю, то ранг минора равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$ -го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример:
Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Выявим какой-либо минор 2-го порядка, отличный от нуля, например,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Все окаймляющие его миноры 3-го порядка равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, ранг матрицы равен трём, M_2 базисный минор.

Совместность систем уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли.

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

где, в общем случае, $m \neq n$.

Для того, чтобы система уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(\bar{A})$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- основная матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- расширенная матрица системы уравнений.

Пример:

Установить совместимость системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 1, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи будем искать ранги матриц A и $\bar{A}$ одновременно, следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

К элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2) , к элементам четвертой строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-1) . Тогда получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Теперь, сложим вторую строку с третьей. Затем с четвертой строками, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

откуда следует, что $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. Следовательно, по теории Кронекера-Капелли, данная система уравнений совместима.

Литература

Основная:

- Щипачев В.С. Высшая математика. Учебн. Для вузов. 3-е изд., стер.-М., Высшая школа. 1996-479 с.
- Щипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебн. Для вузов. 2-е изд., испр.-М., Высшая школа 1998-304с.
- Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике., Минск «Высшая школа.», 1991г., часть 1, 2, 3.
- Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я., Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1,2, М.В. Ш., 1996 г.
- Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. Москва, Высшая школа., 1, 2, 3 т., 1991, 448с.
- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа., М., 1988, 1989, т.1-3
- Гурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. Высшая школа. 1979 г.
- Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. Н., 1988 – 223 с.
- Владимиров В. С., Жариков В. П. Уравнение математической физики. М. 2003 г.
- Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М., В. Ш., 1985 – 105 с.

Дополнительная:

- Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Харьков, 1980 г.
- Пискунов Н. П. Дифференциальное и интегральное исчисление по математике для вузов. М., 1970 г., 1985 г., т. 1, 2
- Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., 1980 г., 1984 г.
- Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1981 г., 1985 г.