ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 1.

Говорят, что задано *отображение* $f\colon A \to B$, если заданы, во-первых, *множество* A (называемое *областью определения*), во-вторых, *множество* B (называемое *областью значений*), и, в третьих, правило f, которое <u>каждому</u> элементу a из множества A ставит в соответствие <u>ровно один</u> элемент $f(a)$ из множества B. Элемент $f(a)$ называют *образом* элемента a при отображении f, сам элемент a при этом называется *аргументом*. Множество $f(C)$, состоящее из образов всех точек множества $C \subset A$, называется *образом множества* C.

Упражнение 1.

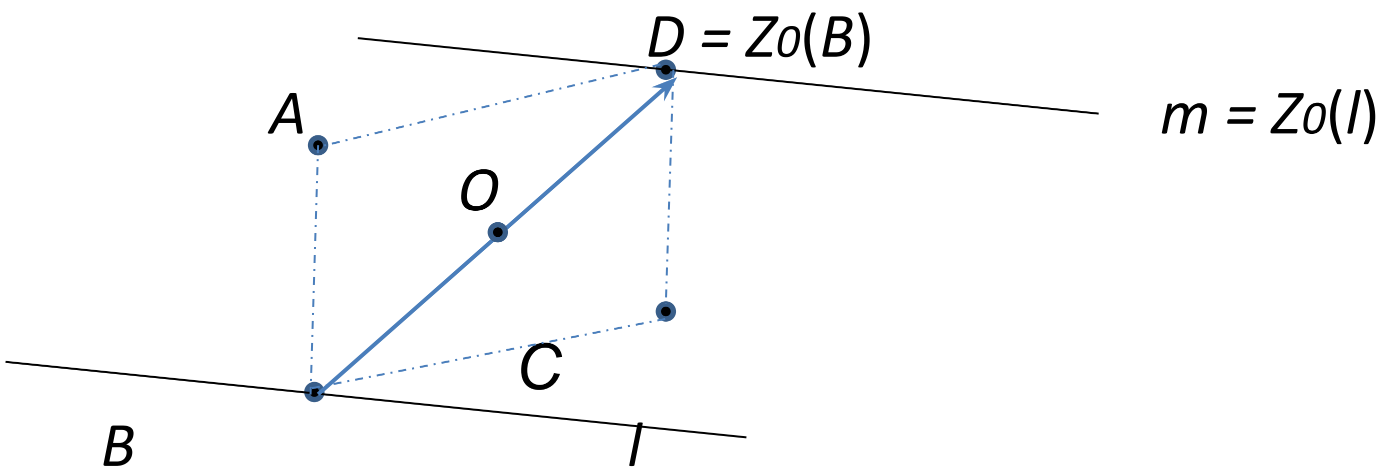
Петя сопоставил каждому городу России, где он бывал, число 1, каждому городу России, где бывал его друг Вася, число 2, а каждому городу России, где не бывали ни он ни Вася, — число 0. Является ли такое сопоставление отображением из множества всех городов России в множество {0, 1, 2}?

Упражнение 2

«Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ жестко закреплены, а вершина B пробегает прямую l. Какую фигуру «вычерчивает» вершина D?»

Какое отображение работает в этой задаче?

Z_0 – центральная симметрия с центром O (O – середина отрезка BD). Она является отображением плоскости в себя, как и все другие движения и подобия плоскости.



Упражнение 3

«$a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/n(n+1)$ при всех $n \geq 1$. Чему равно a_{2018}?»

О каком отображении идет речь в этой задаче?

- Отображение, область определения которого --- множество всех натуральных чисел, называется *последовательностью*.
- У последовательностей аргумент по традиции пишут как индекс: a_n вместо $a(n)$.
- Последовательность в упражнении 3 задана *рекуррентно* (индуктивно). Чтобы, работая с ней, обойтись без длинных вычислений, её надо задать *формулой*, выражающей образ натурального числа n (то есть n-ый член

Упражнение 4

- Задайте формулами последовательности:
- **а)** 2, 5, 8, 11, …;
- **б)** 2, 5, 10, 17, …;
- **в)** 1, 2, 6, 24, …;
- **г)** 1, 2, 3, …

Упражнение 5

Имеются три автомата. Первый прибавляет к любому введённому в него числу единицу, второй — возводит введённое в него число в квадрат, третий — вычитает 3. В первый автомат ввели число x, результат y ввели во второй автомат, а новый результат z — в третий. Получилось число t.

- а) Выразите t через x.
- б) Можно ли по известному t восстановить x?
- в) Каким будет ответ на вопрос б), если вто-рой автомат возводит не в квадрат, а в

- $f(x) = x+1,\ g(y) = y^2,\ h(z) = z-3.$

  $h(g(f(x))) = (x+1)^2-3$
- Отображение из числового множества в числовое называется *числовой функцией,* а образы аргументов – *значениями функции*.
- В упражнении 5 функции были заданы *описаниями*. Решая его, мы заменили эти описания *формулами*. Именно так числовые функции обычно и задают.

Определение 2.

Пусть заданы отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Сопоставим каждому элементу $x \in A$ элемент $y = f(x) \in B$, а тому — элемент $z = g(y) \in C$. Получится «сквозное» отображение $h\colon A \to C$, заданное правилом $h(x) = g(f(x))$. Оно называется *композицией* отображений g и f. Операция композиции обозначается кружочком: пишут $h = g \circ f$.

У функций, заданных формулами, легко искать композицию: достаточно *подставить* одну формулу в другую, что мы в упр. 5 и сделали.

- Отображения из числовых множеств в числовые называют *числовыми функциями*.
- В упражнении 5 функции были заданы *описаниями*. Решая его, мы заменили эти описания *формулами*. Именно так числовые функции обычно и задают: из школьного курса Вам известны линейные функции $f(x) = ax+b$, квадратичная функция $f(x) = x^2$, обратная пропорциональность $f(x) = 1/x$.
- У функций, заданных формулами, легко искать композицию: достаточно *подставить* одну формулу в другую.

Тождественное отображение

- Последовательность г) из упражнения 4 — пример *тождественного отображения,* при котором каждый элемент переходит в себя, а область определения совпадает с областью значений. Тождественное отображение множества A обозначается id_A.
- **Упражнение 6.** Пусть $f\colon A \to B$ — произвольное отображение. Найдите композиции $\mathrm{id}_B \circ f$ и $f \circ \mathrm{id}_A$.

Упражнение 7

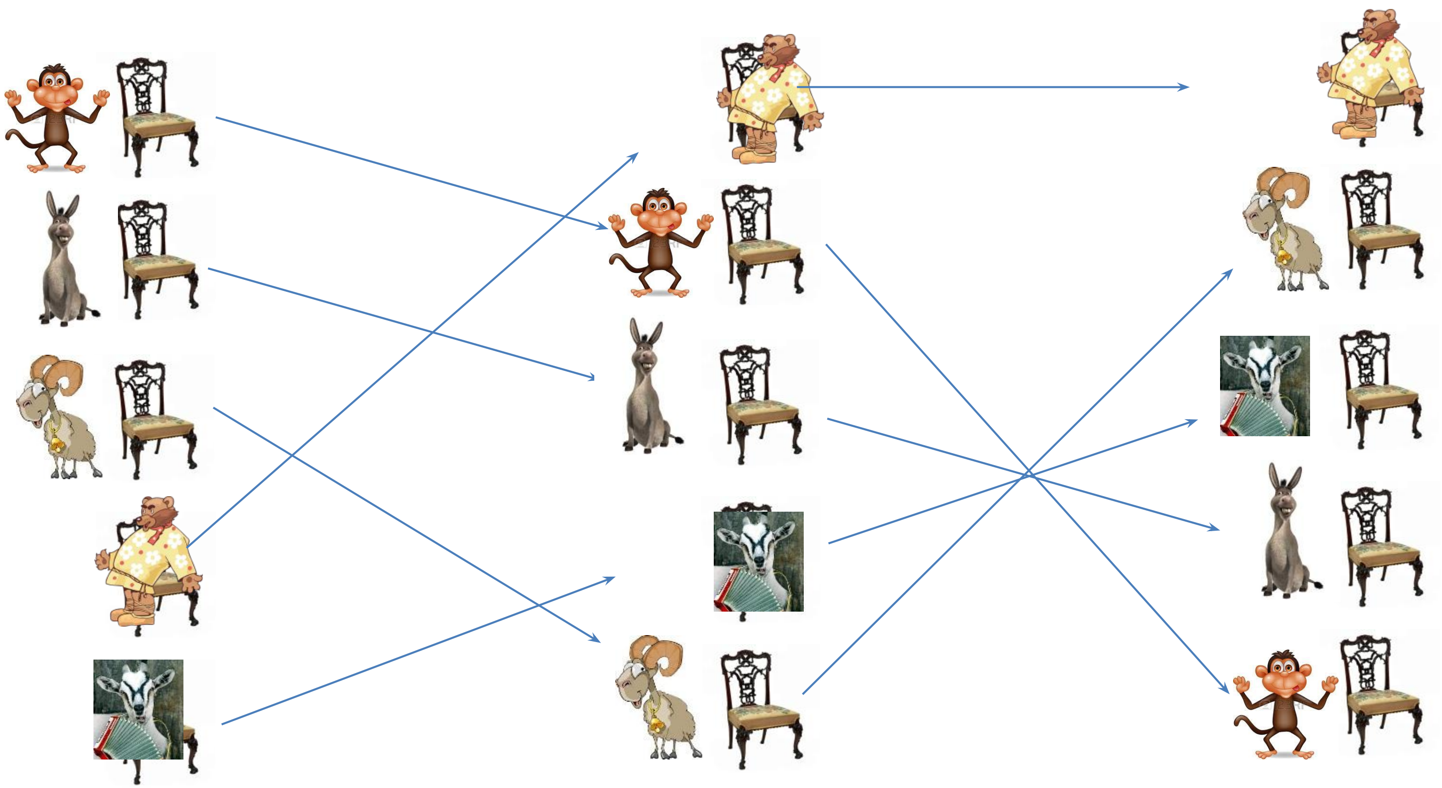
Докажите, что все точки графика арифметической прогрессии $a_n = a+nd$ (n = 0, 1, …) лежат на одной прямой.

- Доказательство: Это график линейной функции $y = dx+a$.
- Как видим, графики у арифметической прогрессии и функции из **R** в **R**, заданной тем же законом, различны, то есть *отображения, заданные одной и той же формулой, но с разными областями определения, имеют разные свойства* (ещё пример различия в свойствах: линейную функцию из **R** в **R** рекуррентно не задашь).

Упражнение 8

Проказница Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка, а также Коза с баяном расселись, чтобы сыграть концерт. Играли они отвратительно, и потому дважды менялись местами. Сначала Мартышка села на место Осла, Осел — на место Козла, Козел — на место Козы, а Коза — на место Мишки, а Мишка — на оставшееся место. Затем Коза поменялась местами с Ослом, а Козел — с Мартышкой. Выясните, кто на чьем месте в итоге оказался.

Отображения из упражнения 8 удобно задавать *орграфом* или *таблицей.*



1	2	3	4	5
2	3	5	1	4
5	4	2	1	3

Определение 3

Если развернуть все стрелочки на их графах, задающих отображения в упражнении 8, то снова получатся отображения. Такие отображения называются *обратимыми*, а отображение $f^{-1}: B \to A$, получающееся из обратимого отображения $f: A \to B$ «разворотом всех стрелочек» — *обратным* к отображению f. Аналитически определение обратного отображения записывается так:

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Упражнение 9

Докажите следующие свойства обратных отображений:

а) Если отображение f обратимо, то обратимо и отображение f^{-1}, и обратным к нему является отображение f.

б) Отображения g: $B \to A$ и f: $A \to B$ являются взаимно обратными тогда и только тогда, когда $g \circ f = \mathrm{id}_A$ и $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

в) Если отображения f: $A \to B$ и g $B \to C$ обратимы, то обратима и их композиция, причём $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Очевидно, отображение $f: A \to B$ обратимо тогда и только тогда, когда одновременно обладает двумя свойствами:
1) в каждый элемент множества B «входит стрелочка», то есть *каждый элемент из B является образом какого-то элемента из A*;
2) ни в какой элемент множества B не входит двух стрелочек, то есть *разные элементы множества A переходят в разные элементы множества B*.
Первое свойство называется *сюръективностью,* второе — *инъективностью,* а оба вместе — *биективностью* или *взаимной однозначностью*.
Инъективные, сюръективные и биективные отображения коротко называют *инъекциями, сюръекциями* и *биекциями*. Биекции множества на себя называют ещё *преобразованиями* этого множества. Например, движения и подобия плоскости являются её преобразованиями.

Определение 4

Отображение $f\colon A \to B$ называется *инъективным/сюръективным,* если в при этом отображении каждый элемент множества B переходит <u>не больше/не меньше</u> одного элемента множества A.

Отображение, которое одновременно и инъективно, и сюръективно, называется *биективным* или *взаимно-однозначным*.

Отображение имеет обратное тогда и только тогда, когда оно биективно.

Упражнение 10.

Обратима ли композиция отображений

$$h(g(f(x))) = (x+1)^2-3$$

из упражнения 5?

Упражнение 11

Подберите в качестве областей определения и значений такие числовые множества, чтобы формула $f(x) = x^2$ задавала отображение, которое

- **а)** биективно;
- **б)** инъективно, но не сюръективно;
- **в)** сюръективно, но не инъективно;
- **г)** не сюръективно и не инъективно.

Упражнение 12

Многие комбинаторные задачи можно понимать как задачи о подсчёте тех или иных отображений. Так преобразования конечного множества известны вам под названием его *перестановок*. Сформулируйте как задачи о подсчёте количества отображений задачи о нахождении

- **а)** числа размещений с повторениями n предметов по m местам;
- **б)** числа размещений (без повторений) n предметов по m местам;
- **в)** числа перестановок с повторениями n_1 предметов типа 1, n_2 предметов типа 2, …, n_k предметов типа k;
- **г)** числа всех подмножеств данного конечного множества;
- **д)** числа разбиений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на k

Множества, связанные биективным отображением, называются *равномощными*. Для конечных множеств равномощность означает, что в них поровну элементов. На этом основан известный *принцип кодировки,* когда подсчет числа каких-либо объектов заменяется подсчетом числа присвоенных им кодов, находящихся с ними в биективном соответствии. Например, в упражнении 12г мы кодировали подмножества данного множества отображениями этого множества в множество $\{0, 1\}$.