Лекция 2. Продольные и поперечные плоские волны в однородных изотропных средах

1. **Плоские звуковые волны в жидкостях и газах. Упругие волны в твердых телах:**
   - уравнения механики сплошной среды в отсутствие вязкости;
   - линеаризованные уравнения акустики, продольные звуковые волны
   - упругие плоские волны в изотропных твердых телах

2. **Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде без дисперсии:**
   - уравнения Максвелла и материальные уравнения;
   - уравнения поля для плоских возмущений в изотропной среде;
   - электромагнитные волны в изотропной среде
   - поляризация поперечных волн

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{U}) = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}$$

$$p = p(\rho)$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\tilde{p},$$

$$\tilde{p} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0\tilde{\rho} \equiv \mathrm{v}^2\tilde{\rho}.$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = -\mathrm{v}^2\nabla\rho'.$$

$$\Delta\rho' - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} = 0$$

$$\rho'(t,\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\rho}(t,\mathbf{r})}{\rho_0} = f_1(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t) + f_2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} + \mathrm{v}t)$$

$$\mathbf{U}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{s}\mathrm{v}[f_1(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t) - f_2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} + \mathrm{v}t)] \qquad |\mathbf{U}(t,\mathbf{r})| << \mathrm{v}$$

$$\rho'(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\{C_0\exp[ik(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t)] + C_0^*\exp[-ik(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t)]\},$$

$$U(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{s}\mathrm{v}\{C_0\exp[ik(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t)] - C_0^*\exp[-ik(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t)]\},$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \left(K + \frac{1}{3}\mu \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) + \mu \, \Delta \mathbf{W}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, \xi)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \left(K + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \partial^2 \mathbf{W} / \partial \xi^2) + \mu \, \partial^2 \mathbf{W} / \partial \xi^2$$

$$\mathrm{W}_l = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{W})$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathrm{W}_l}{\partial t^2} = \left(K + \frac{4}{3}\mu \right) \frac{\partial^2 \mathrm{W}_l}{\partial \xi^2}$$

$$\mathrm{v}_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left(K + \frac{4}{3}\mu \right)}$$

$$\mathbf{W}_{tr} = \mathbf{W} - \mathbf{s}\mathrm{W}_l = \mathbf{s} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{s})$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_{tr}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{W}_{tr}}{\partial \xi^2}$$

$$\mathrm{v}_{tr} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} < \mathrm{v}_l$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_0),\\
&\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_0),\\
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$

$$\mathbf{j} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 4\pi(\mathbf{j}_{\text{см.}} + \mathbf{j}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\int_{-\infty}^{t}\mathbf{j}\,dt' = \mathbf{E} + 4\pi\int_{-\infty}^{t}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{E})\,dt' = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathbf{E}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0,\\
&\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.
\end{aligned}$$

$$\xi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{s} \times \partial \mathbf{A} / \partial \xi, \; \mathrm{div}\mathbf{A} = \mathbf{s} \cdot \partial \mathbf{A} / \partial \xi$$

$$\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \; \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \; \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = 0.$$

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) \qquad \mathbf{E}_{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_l = \mathbf{s} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{s})$$

$$\mathbf{D}(t,\xi) = \varepsilon^{tr}\mathbf{E}_{tr}(t,\xi) + \varepsilon^{l}\mathbf{E}_l(t,\xi)$$

$$\varepsilon^l \frac{\partial E_l}{\partial \xi} = 0 \;\rightarrow\; \varepsilon^l E_l = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{tr}}{\partial \xi} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s} \times \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = -\frac{1}{c}\varepsilon^{tr}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s} \times \mathbf{E}_{tr}.$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{tr}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon^{tr}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{tr}}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathbf{E}_{tr}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{v}t) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} + \mathrm{v}t) \qquad \mathrm{v}^2 = c^2 / \varepsilon^{tr}$$

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon_{tr}}\left[\mathbf{s} \times \mathbf{F}_1(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{v}t) - \mathbf{s} \times \mathbf{F}_2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} + \mathrm{v}t)\right]$$

$$\mathbf{E}_{tr}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{C}_0 \exp[ik(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{v}t)] + \mathbf{C}_0^* \exp[-ik(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{v}t)]\},$$

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{tr}}\{\mathbf{s} \times \mathbf{C}_0 \exp[ik(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{v}t)] + \mathbf{s} \times \mathbf{C}_0^* \exp[-ik(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{v}t)]\}.$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr} = 0$$

$$\varepsilon^l(\omega) = 0$$

$$\mathbf{E}_{tr}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{C}_0 \exp[ik(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t)] + \mathbf{C}_0^* \exp[-ik(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{v}t)]\}$$

$$\mathbf{C}_0 = \{E_{0x} \exp(i\delta_x),\ E_{0y} \exp(i\delta_y)\}$$

$$E_x = E_{0x}\cos(\theta + \delta_x), \quad E_y = E_{0y}\cos(\theta + \delta_y) \qquad\qquad P(E_x, E_y) = 0$$

$$\cos\theta\,\cos\delta_x - \sin\theta\,\sin\delta_x = E_x / E_{0x}\ ,$$
$$\cos\theta\,\cos\delta_y - \sin\theta\,\sin\delta_y = E_y / E_{0y}\ .$$

$$\boxed{P(E_x, E_y; E_{0x}, E_{0y}, \delta) \equiv \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta - \sin^2\delta = 0}$$

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 1 = 0 \qquad\qquad \frac{E_x}{E_{0x}} \mp \frac{E_y}{E_{0y}} = 0$$