Производные элементарных функций

$$y = \ln x \qquad y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{x_0} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_0}, \text{ т. е. } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$y = e^x$ – обратная ф-я к $\ln x$

$$e^x = y, \quad x = \ln y, \quad x'_y = \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1/y} = y = e^x, \text{ т. е. } (e^x)' = e^x$$

Производные элементарных функций

$y = \ln x \quad y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0+\Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{x_0} + \bar{o}(\Delta x)\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x}\right) =$

$= \frac{1}{x_0}$, т.е. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$y = e^x$ – обратная ф-я к $\ln x$

$e^x = y,\ x = \ln y,\ x'_y = \frac{1}{y} \Rightarrow$

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1/y} = y = e^x$, т.е. $(e^x)' = e^x$

1. $y = c \quad \Delta y = c - c = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \to 0,\ y' = 0$

2. $y = x \quad \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x) - x =$

$= \Delta x,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \to 1$, т.е. $y' = 1$

3. $y = x^\mu$

$\mu \in \mathbb{N} \quad \mu = n \quad (x^n)' = n x^{n-1}$ по индукции

$n = 1 \quad (x^1)' = (x)' = 1$ – верно

$n \Rightarrow n+1 \quad (x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x +$

$+ x^n \cdot (x)' = n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = n x^n + x^n =$

$= (n+1) x^n$

$-\mu \in \mathbb{N}$, т.е. $\mu = -n,\ n \in \mathbb{N}$

$(x^\mu)' = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - (x^n)' \cdot 1}{(x^n)^2} =$

$= -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1} = \mu x^{\mu - 1}$

$\mu = 0 \quad (x^0)' = (1)' = 0 \quad (x \neq 0)$

Остальные $\mu \quad x^\mu$ при $x > 0$

$y = x^\mu = e^{\mu \ln x},\ y' = e^{\mu \ln x} (\mu \ln x)' =$

$= x^\mu \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu - 1}$

$\mu > 0 \quad x_0 = 0 \quad y'_{пр}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{(\Delta x)^\mu}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} (\Delta x)^{\mu - 1} = \begin{cases} 0, & \mu > 1 \\ +\infty, & \mu < 1 \end{cases}$

Итак, $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ в любой точке обл. опред., кроме $x = 0$ при $0 < \mu < 1$

4. $y = a^x = e^{x \ln a},\ y' = e^{x \ln a} \cdot \ln a$,

т.е. $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\ y' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

6. $y = \sin x$. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$

7. $y = \cos x$. $y' = -\sin x$ (самостоятельно)

8. $y = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. $y' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = ctg\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (самостоят.)

10. $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $x'_y = \cos y$

$y'_x = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

$(\arcsin x)'_x \Big|_{x=\pm 1} = +\infty$.

11. $y = \arccos x$. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ (самост.)

$(\arccos x)'_x \Big|_{x=\pm 1} = -\infty$.

12. $y = arctg\, x$. $x = tg\, y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$y'_x = \dfrac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+tg^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y = arcctg\, x$. $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (самостоятельно)

6. $y = \sin x$. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$

7. $y = \cos x$. $y' = -\sin x$ (самостоятельно)

8. $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. $y' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (самостоят.)

10. $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $x'_y = \cos y$

$y'_x = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

$(\arcsin x)'_x \Big|_{x=\pm 1} = +\infty$.

11. $y = \arccos x$. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ (самост.)

$(\arccos x)'_x \Big|_{x=\pm 1} = -\infty$.

12. $y = \operatorname{arctg} x$. $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$y'_x = \dfrac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y = \operatorname{arcctg} x$. $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (самостоятельно)

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f(x)$ непр. при $x = x_0$, но не наоборот.

$y = f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. $f'_{пр}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1$,

$f'_{лев}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1 \Rightarrow \overline{\exists} f'(0)$.

Есть непр. ф-ии, у к-ых __нигде__ нет производной (Вейерштрасс, 1872)

6. $y = \sin x$. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

7. $y = \cos x$. $y' = -\sin x$ (самостоятельно)

8. $y = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. $y' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9. $y = ctg\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (самостоят.)

10. $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $x'_y = \cos y$

$$y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1$$

$$(\arcsin x)'_x \Big|_{x=\pm 1} = +\infty.$$

11. $y = \arccos x$. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ (самост.)

$$(\arccos x)'_x \Big|_{x=\pm 1} = -\infty.$$

12. $y = arctg\, x$. $x = tg\, y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$$y'_x = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

13. $y = arcctg\, x$. $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (самостоятельно)

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f(x)$ непр. при $x = x_0$, но не наоборот.

$y = f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. $f'_{пр}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1$,

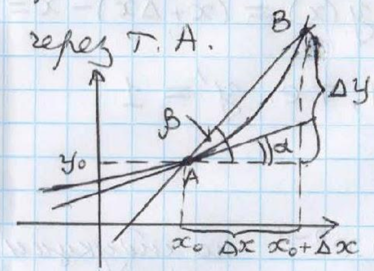
$f'_{лев}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1 \Rightarrow \overline{\exists} f'(0)$.

Есть непр. ф-ии, у к-ых нигде нет производной (Вейерштрасс, 1872)

Геометрический смысл производной

Опр. Касательной к кривой в т. A называется предельное положение секущей AB, когда т. B стремится по кривой к т. A.

Опр. Нормалью к кривой в т. A называется прямая, $\perp$ касательной в т. A и проходящая через т. A.



$y = f(x)$ $A(x_0, y_0)$ $B(x, y)$

$B \to A \Rightarrow x = x_0 + \Delta x \to x_0$

$tg\,\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $tg\,\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

$y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = tg\,\alpha$

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ – касательная

$f'(x_0) \ne 0 \Rightarrow y = y_0 - \dfrac{x - x_0}{f'(x_0)}$ – нормаль

$f'(x_0) = 0$	$f(x)$ непр. при $x = x_0$, $f'(x_0) = \pm\infty$
$y = y_0$ – касат.	$\Rightarrow$ $x = x_0$ – касат.
$x = x_0$ – нормаль	$y = y_0$ – нормаль

Производные высших порядков

$\exists f'(x)$, $f''(x) \equiv (f'(x))'$, $\ldots$, $f^{(n+1)}(x) \equiv (f^{(n)}(x))'$. $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

Ясно, что $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$, $(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x)$

$\underline{\text{Т}}$ (Лейбниц) $\exists f^{(n)}(x), \exists g^{(n)}(x) \Rightarrow \exists (f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$.

Д-во. Индукция по n. $n=1$. $\exists f'(x), \exists g'(x) \Rightarrow \exists (f(x)\cdot g(x))' =$

$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = \sum\limits_{k=0}^{1} C_1^k f^{(1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$, т.е. верно.

$n \Rightarrow n+1$. $\exists f^{(n+1)}(x), \exists g^{(n+1)}(x)$. $(f(x)\cdot g(x))^{(n+1)} = \left((f(x)\cdot g(x))^{(n)}\right)' = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\right)' =$

$$= \Big(\underbrace{C_n^0}_{=1} f^{(n)}(x)\cdot g^{(0)}(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)\cdot g^{(1)}(x) + \ldots + C_n^{n-1}\cdot f^{(1)}(x)\cdot g^{(n-1)}(x) + \underbrace{C_n^n}_{=1} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x)\Big)' =$$

$$= \underbrace{1}_{C_{n+1}^0}\cdot f^{(n+1)}(x)\cdot g^{(0)}(x) + C_n^1 f^{(n)}(x)\cdot g^{(1)}(x) + \ldots + C_n^n f^{(1)}(x)\cdot g^{(n)}(x) +$$
$$+ C_n^0 f^{(n)}(x)\, g^{(1)}(x) + \ldots + C_n^{n-1} f^{(1)}(x)\cdot g^{(n)}(x) + \underbrace{1}_{C_{n+1}^{n+1}}\cdot f^{(0)}(x)\, g^{(n+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$$

Теорема доказана.

Пример. $ch x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. $(ch x)' = sh x$, $(sh x)' = ch x$

$f(x) = x^2\cdot ch x = ch x\cdot x^2$. $f^{(2020)}(x) = (ch x\cdot x^2)^{(2020)} = C_{2020}^0\cdot(ch x)^{(2020)}\cdot(x^2)^{(0)} +$

$+ C_{2020}^1\cdot(ch x)^{(2019)}(x^2)^{(1)} + C_{2020}^2\cdot(ch x)^{(2018)}\cdot(x^2)^{(2)} + 0 + \ldots + 0 = ch x\cdot x^2 +$

$+ 2020\cdot sh x\cdot 2x + \dfrac{2020\cdot 2019}{1\cdot 2}\cdot ch x\cdot 2 = (x^2 + 2020\cdot 2019) ch x + 4040 sh x$

Дифференциалы

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. x_0. Если $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ имеет вид:

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,\ \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0,$$

то $y=f(x)$ – дифференцируемо при $x=x_0$, а $A\cdot\Delta x$ – (первой) дифференциал $y=f(x)$ при $x=x_0$.

Обозначения: $dy=A\Delta x$, $dy(x_0)$, $df(x_0)$, df

Иногда не d, а δ: δy, $\delta y(x_0)$, $\delta f(x_0)$, δf и др.

Дифференциалы

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. x_0. Если $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ имеет вид:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0,$$

то $y = f(x)$ – дифференцируема при $x = x_0$, а $A \cdot \Delta x$ – (первый) дифференциал $y = f(x)$ при $x = x_0$.

Обозначения: $dy = A\Delta x$, $dy(x_0)$, $df(x_0)$, df

Иногда не d, а δ: δy, $\delta y(x_0)$, $\delta f(x_0)$, δf и др.

Т. $y = f(x)$ дифф-ма при $x = x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$.

При этом $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Д-во. $\Rightarrow$ $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, $\Rightarrow \underline{f'(x_0) =}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) \underline{= A}, \text{ т.е. } dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$\Leftarrow$. $\exists f'(x_0) = A$ (обозначим), т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta y = \underbrace{A \cdot \Delta x} + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Теорема д-зана.

Сл. $y = f(x)$ – дифф. при $x = x_0 \Rightarrow y = f(x)$ непр. при $x = x_0$.

Дифференциалы

<u>Опр.</u> $y=f(x)$ опред. в окр. x_0. Если $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ имеет вид:

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \ \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0,$$

то $y=f(x)$ – дифференцируема при $x=x_0$, а $A\cdot\Delta x$ – (первый) дифференциал $y=f(x)$ при $x=x_0$.

Обозначения: $dy = A\Delta x$, $dy(x_0)$, $df(x_0)$, df

Иногда не d, а δ: δy, $\delta y(x_0)$, $\delta f(x_0)$, δf и др.

<u>Т.</u> $y=f(x)$ дифф-ма при $x=x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$.

При этом $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Д-во. $\Rightarrow$ $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\Rightarrow \underline{f'(x_0)} = $

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha(\Delta x)) = \underline{A}, \text{ т.е. } dy = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$\Leftarrow$. $\exists f'(x_0) = A$ (обозначим), т.е. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$

$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$, $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\Delta y = \underbrace{A\cdot\Delta x}_{dy = f'(x_0)\cdot\Delta x} + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

Теорема д-зана.

<u>Сл.</u> $y=f(x)$ – дифф. при $x=x_0 \Rightarrow y=f(x)$ непр. при $x=x_0$.

Инвариантность (1-го) дифференциала

x – незав. перем. $dx \equiv \Delta x$.

$$dy = y'_x\cdot dx$$

x – промежуточная перем., т.е. $x=x(t)$.

$y=y(x)$, $x=x(t)$. t – незав. перем.

$$dy = y'_t\cdot\Delta t = y'_t\cdot dt = y'_x\cdot\underbrace{x'_t\cdot dt}_{dx} = y'_x\cdot dx$$

$$\boxed{dy = y'_x\, dx}$$

Сохранение вида этой формулы называется инвариантностью первого дифференциала

Дифференциалы

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. x_0. Если $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ имеет вид:

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,\ \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0,$$

то $y=f(x)$ – дифференцируема при $x=x_0$, а $A\cdot\Delta x$ – (первый) дифференциал $y=f(x)$ при $x=x_0$.

Обозначения: $dy=A\Delta x$, $dy(x_0)$, $df(x_0)$, df

Иногда не d, а δ: δy, $\delta y(x_0)$, $\delta f(x_0)$, δf и др.

Т. $y=f(x)$ дифф-ма при $x=x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$.

При этом $dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Д-во. $\Rightarrow$ $\Delta y = A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\Rightarrow \underline{f'(x_0)} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\alpha(\Delta x)) = \underline{A}$, т.е. $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

$\Leftarrow$. $\exists f'(x_0)=A$ (обозначим), т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$

$\alpha(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-A$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$

$\Downarrow$

$$\Delta y = \underbrace{A\cdot\Delta x}_{dy=f'(x_0)\cdot\Delta x}+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

Теорема д-зана.

Сл. $y=f(x)$ – дифф. при $x=x_0 \Rightarrow y=f(x)$ непр. при $x=x_0$.

Инвариантность (1-го) дифференциала

x – незав. перем. $dx\equiv\Delta x$.

$$dy=y'_x\cdot dx$$

x – промежуточная перем., т.е. $x=x(t)$.

$y=y(x)$, $x=x(t)$. t – незав. перем.

$$dy=y'_t\cdot\Delta t=y'_t\cdot dt=y'_x\cdot\underbrace{x'_t\cdot dt}_{dx}=y'_x\cdot dx$$

$$\boxed{dy=y'_x\cdot dx}$$

Сохранение вида этой формулы называется инвариантностью первого дифференциала

$d(u\pm v)=du\pm dv$	Выведем: $d(uv)=(uv)'_x\cdot dx=$
$d(uv)=u\,dv+v\,du$	$=(u\cdot v'_x+u'_x\cdot v)\cdot dx=$
$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$	$=u\cdot dv+v\cdot du$
	Ост. ф-лы – самостоят.

Дифф-лы используют в приближ. вычислениях, заменяя приращение ф-ии дифф-лом

$(\Delta y\approx dy)$