

Угол между прямыми в пространстве.
Перпендикулярность прямых

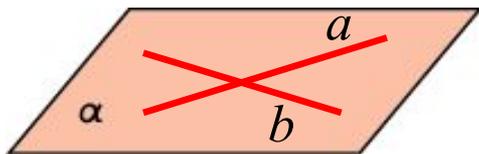
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые

Лежат в одной плоскости

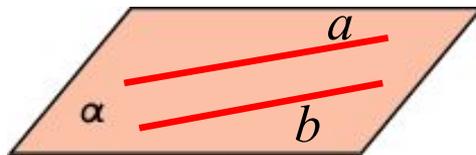
Имеют общую точку
(пересекаются)

$$a \cap b$$



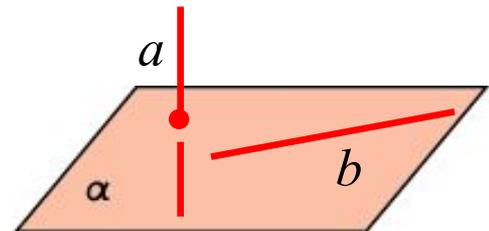
Не имеют
общих точек
(параллельны)

$$a \parallel b$$



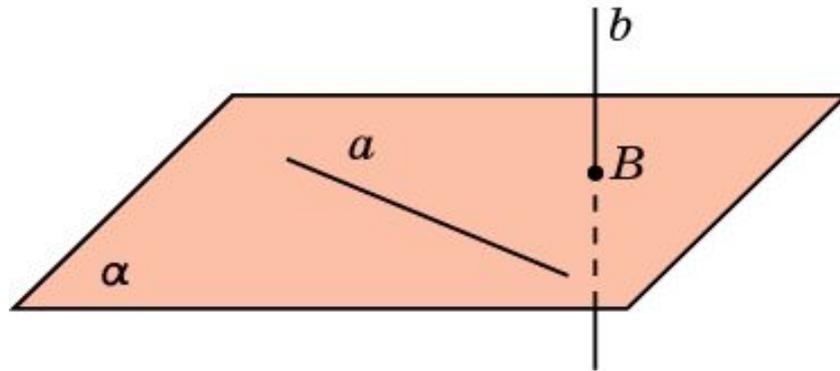
Не лежат в одной
плоскости
(скрещиваются)

$$a \div b$$



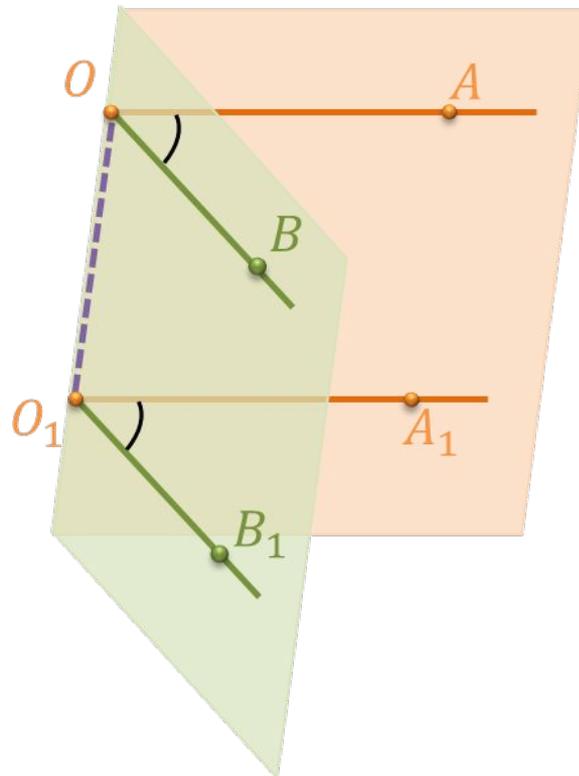
Признак скрещивающихся прямых

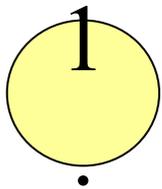
Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.



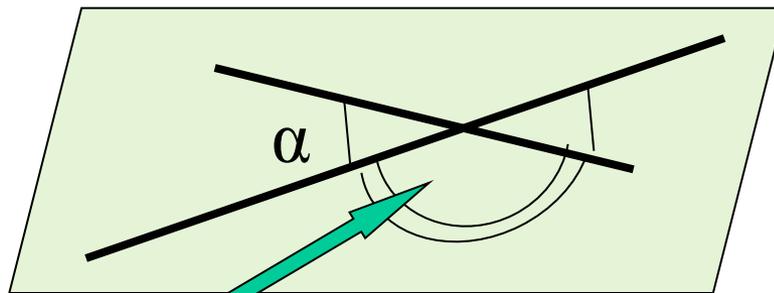
Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.





Угол между двумя пересекающимися прямыми.



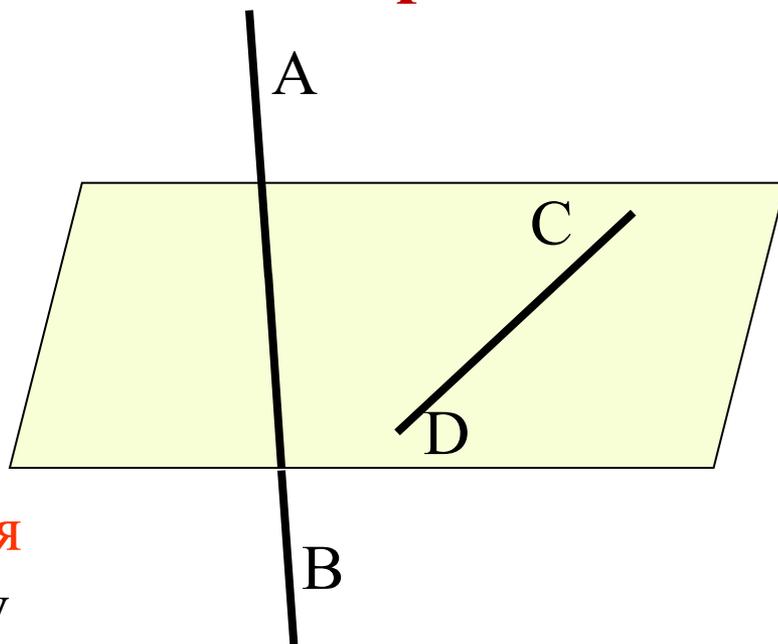
$$180^{\circ} - \alpha \quad 0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$$

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.

2

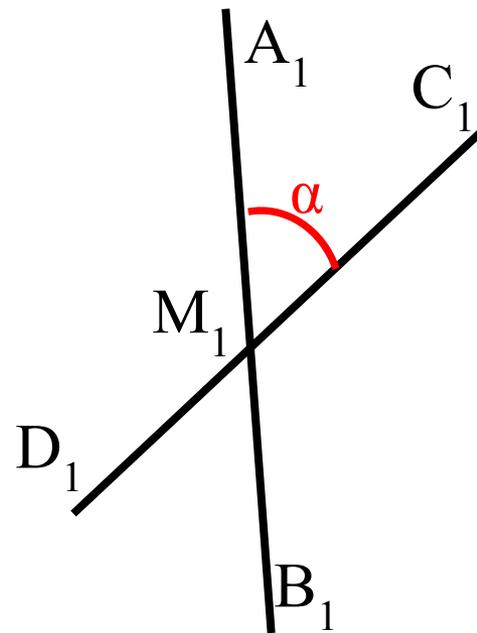
Угол между скрещивающимися прямыми.

Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1 , при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.

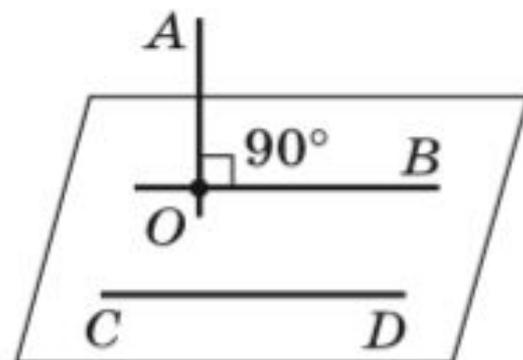
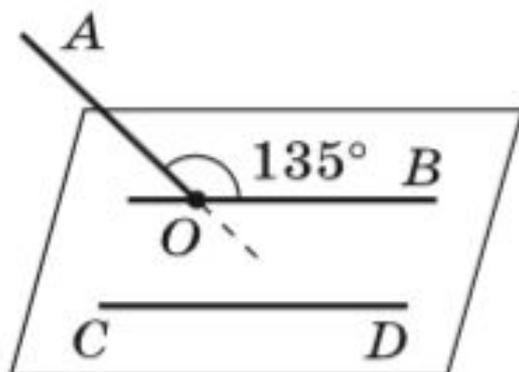
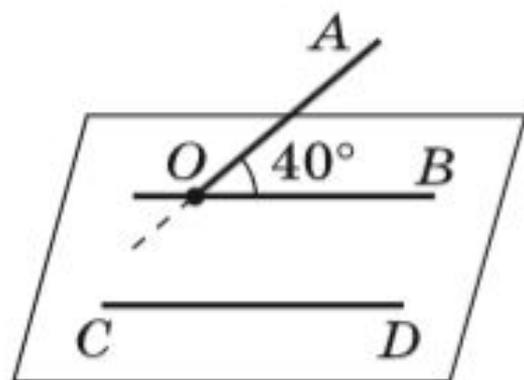


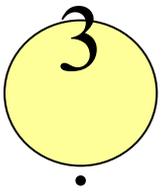
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным скрещивающимся прямым.

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.



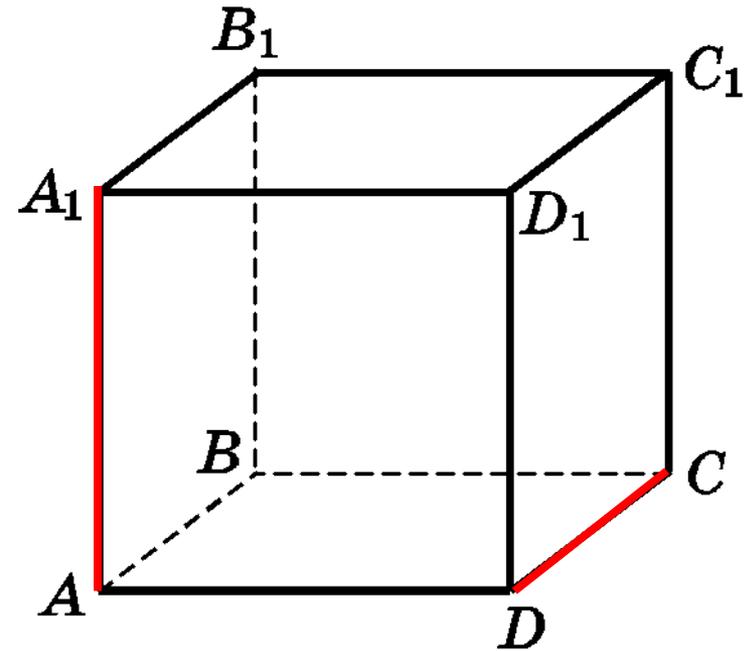
Задача Прямые OB и CD параллельны, а прямые OA и CD скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми OA и CD , если: а) $\angle AOB = 40^\circ$; б) $\angle AOB = 135^\circ$; в) $\angle AOB = 90^\circ$.





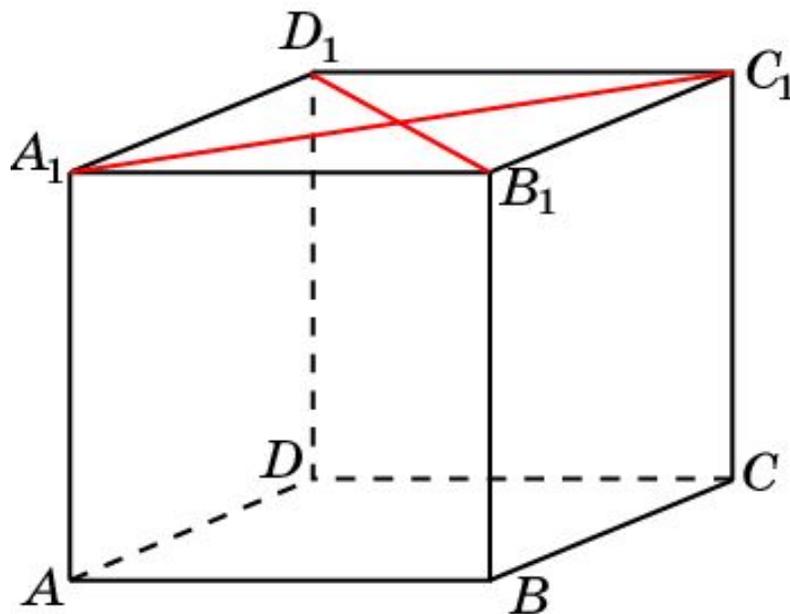
Перпендикулярные прямые.

Две скрещивающиеся прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.



Куб 1

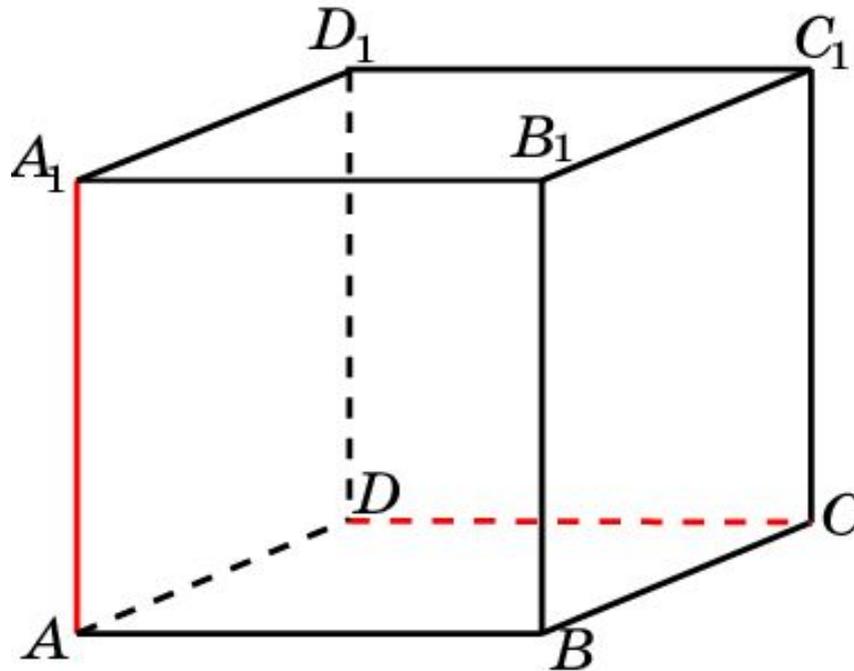
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1D_1 .



Ответ: 90° .

Куб 2

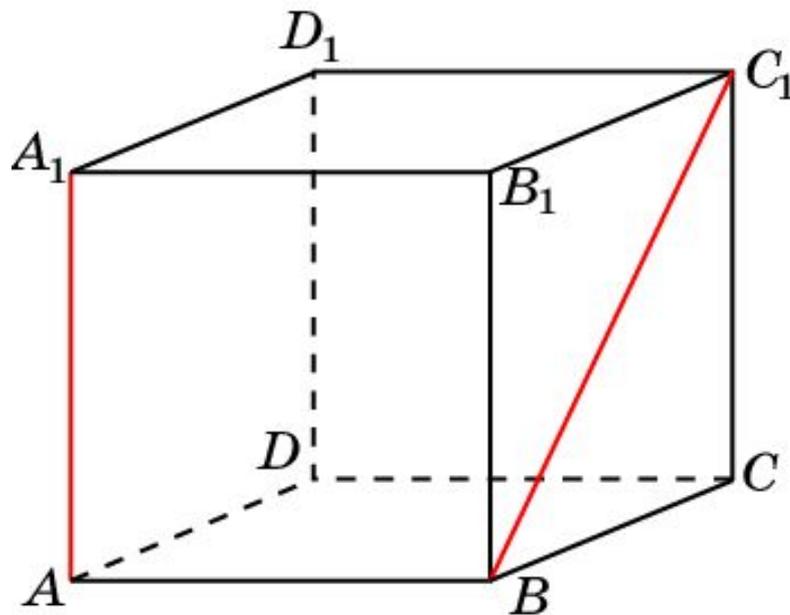
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и CD .



Ответ: 90° .

Куб 3

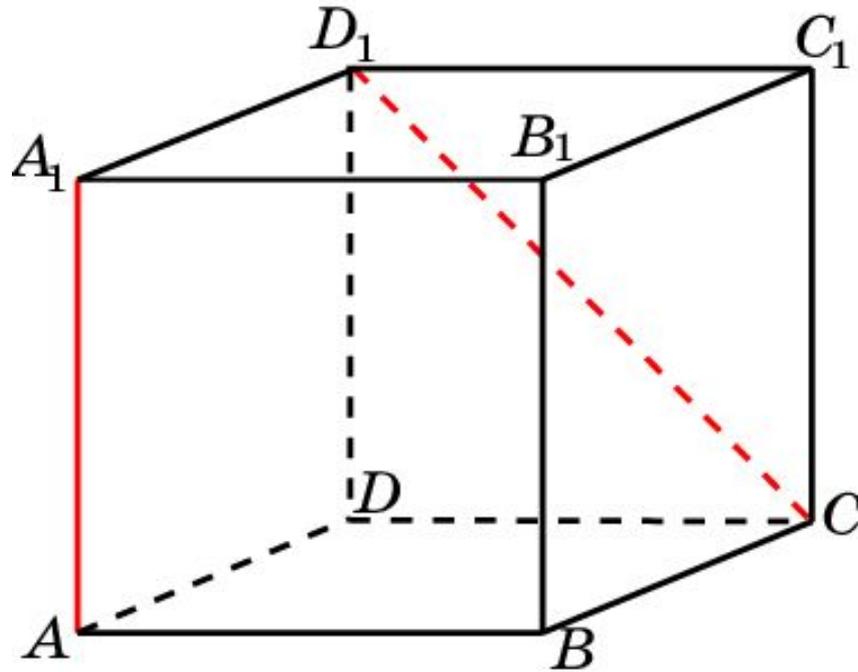
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: 45° .

Куб 4

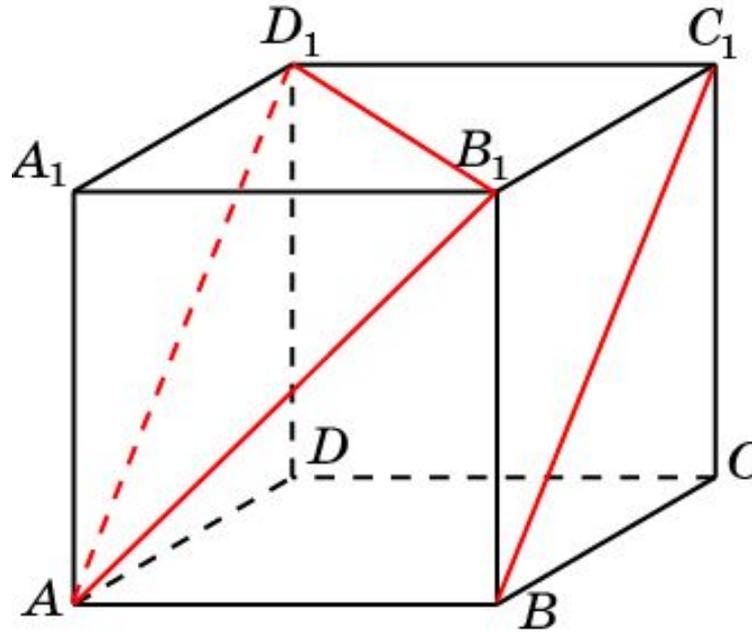
В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и CD_1 .



Ответ: 45° .

Куб 5

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .

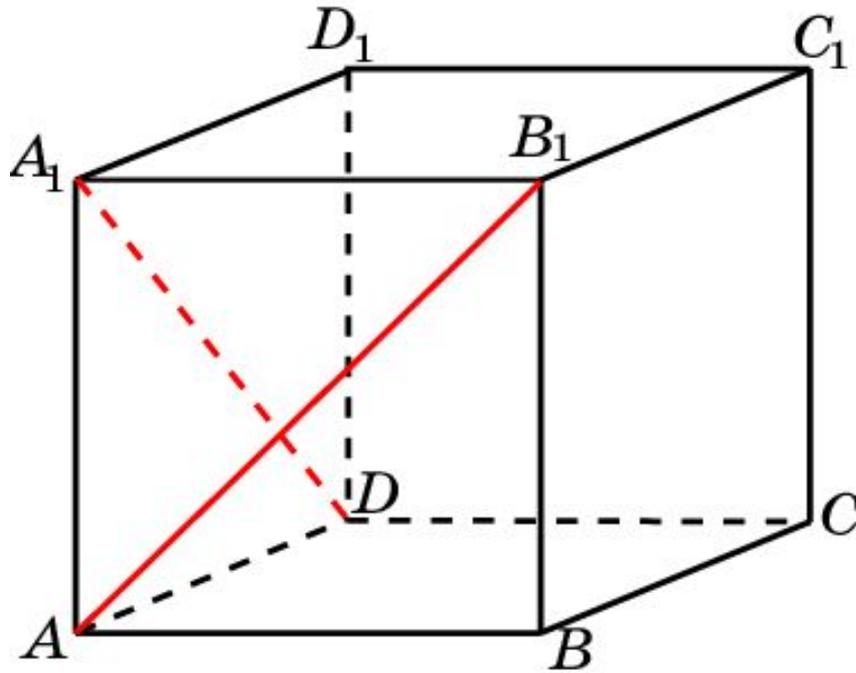


Решение. Через точку A проведем прямую AD_1 , параллельную BC_1 . Искомый угол равен углу B_1AD_1 . Треугольник B_1AD_1 – равносторонний. Следовательно, искомый угол равен 60° .

Ответ: 60° .

Куб 6

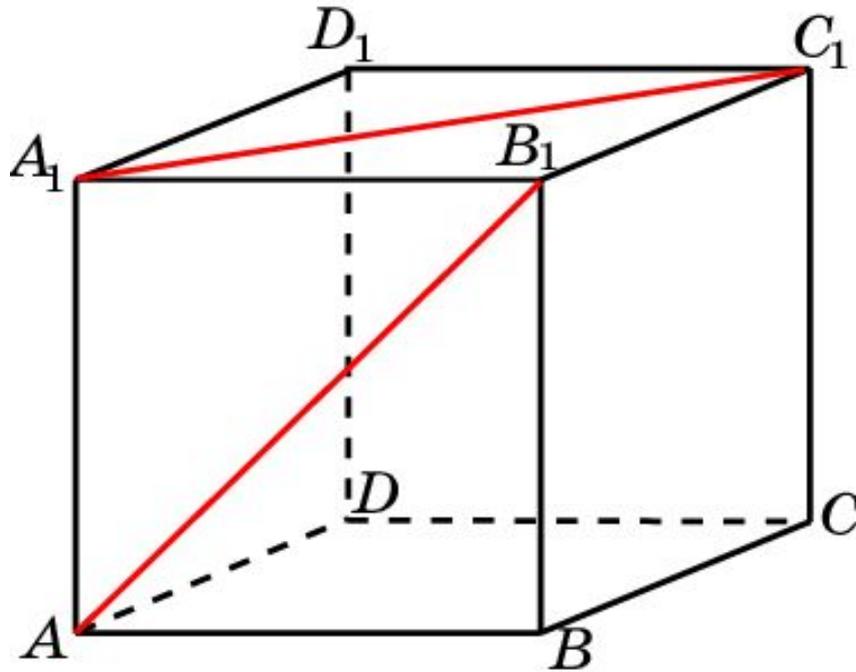
В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и DA_1 .



Ответ: 60° .

Куб 7

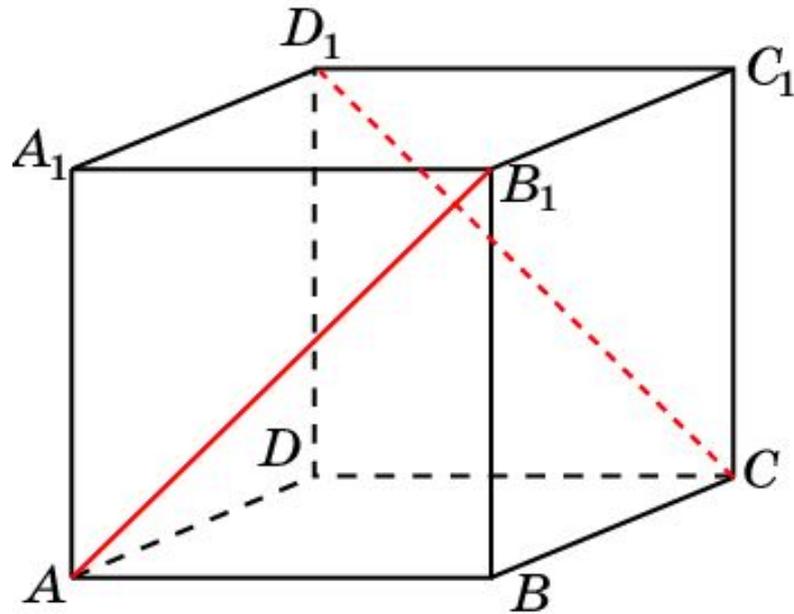
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 .



Ответ: 60° .

Куб 8

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1 .



Ответ: 90° .

Упражнение 1

Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

Ответ: Бесконечно много.

Упражнение 2

Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

Ответ: Бесконечно много.

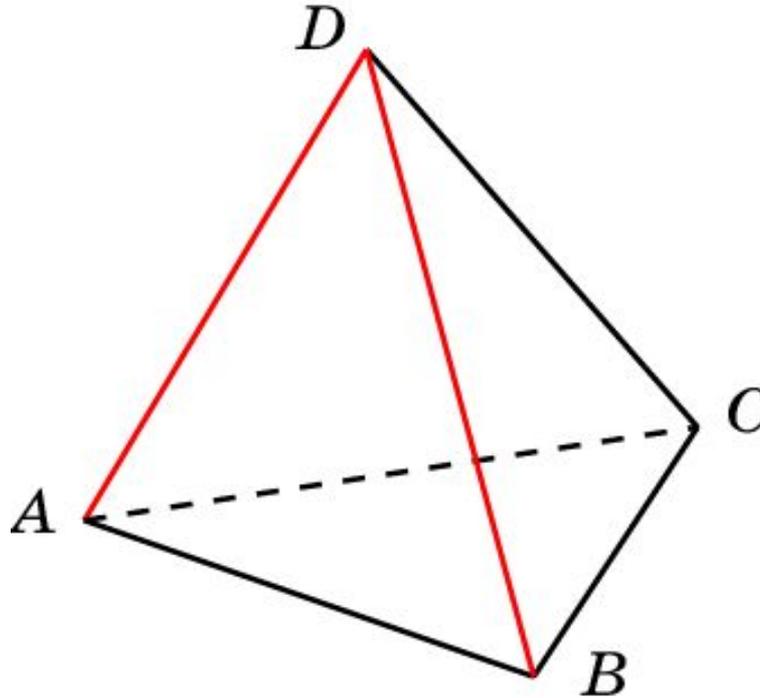
Упражнение 3

Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

Ответ: Нет.

Пирамида 1

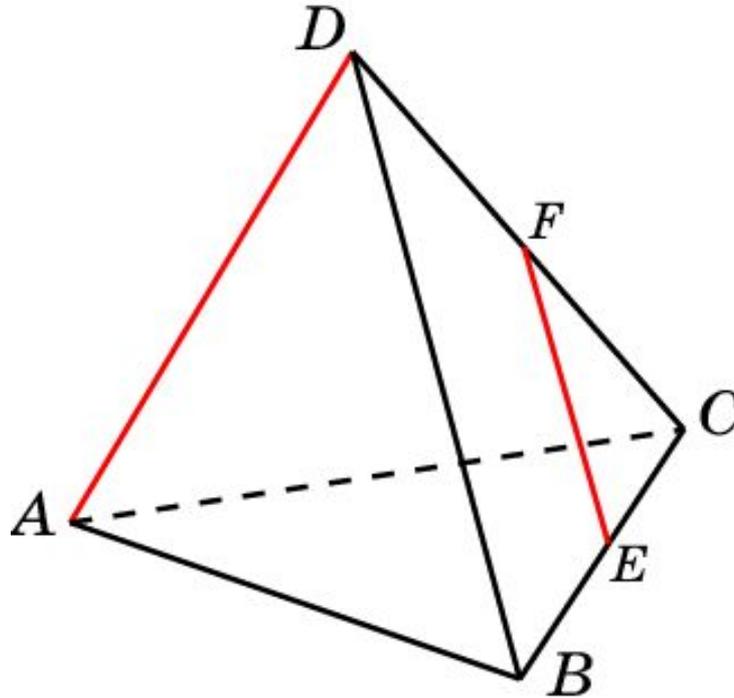
В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AD и BC .



Ответ: 60° .

Пирамида 2

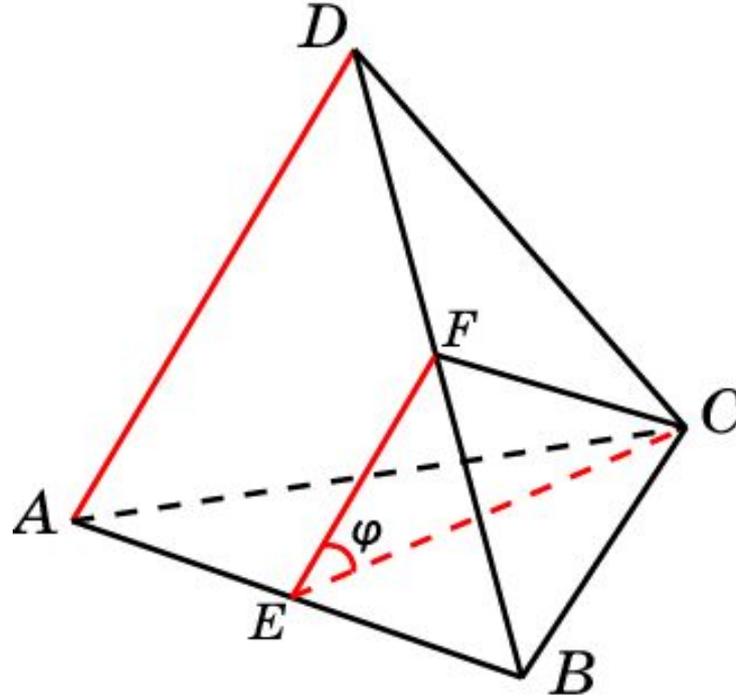
В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F – середины ребер BC и CD . Найдите угол между прямыми AD и EF .



Ответ: 60° .

Пирамида 3

В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра AB . Найдите косинус угла между прямыми AD и CE .



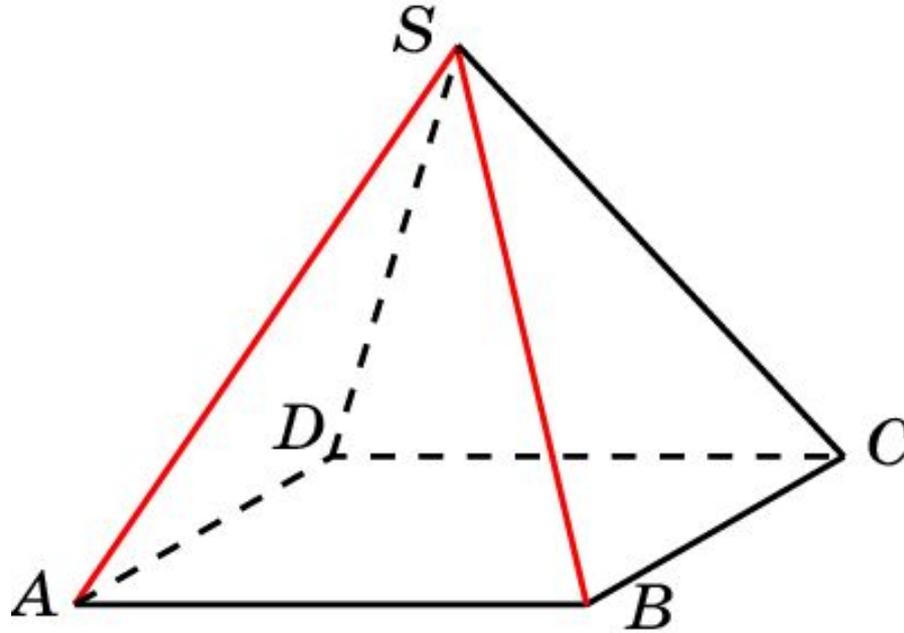
Решение. Через точку E проведем прямую EF , параллельную AD . Искомым углом φ будет угол CEF . В треугольнике CEF имеем

$$EF = \frac{1}{2}, \quad CE = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Следовательно, } \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Пирамида 4

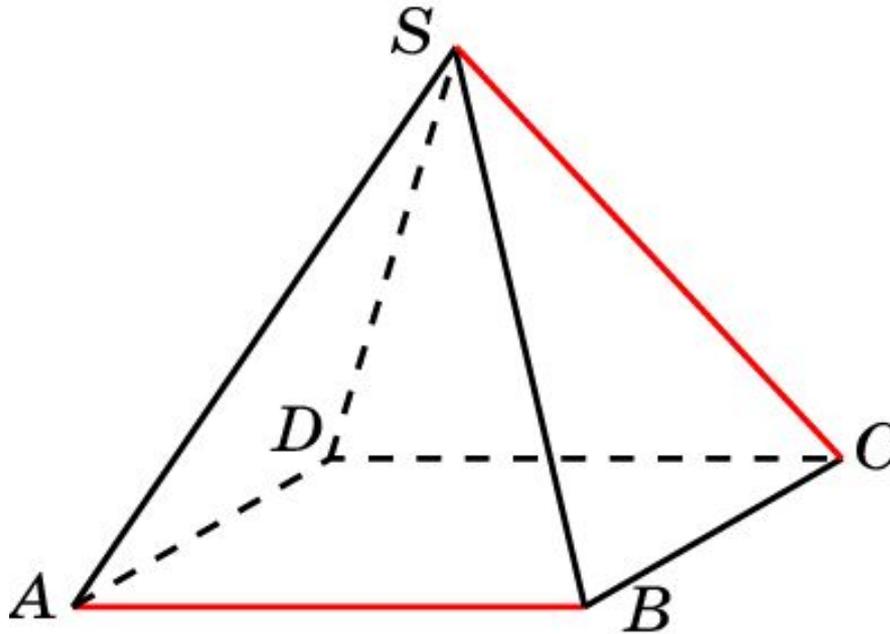
В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SA и SB .



Ответ: 60° .

Пирамида 5

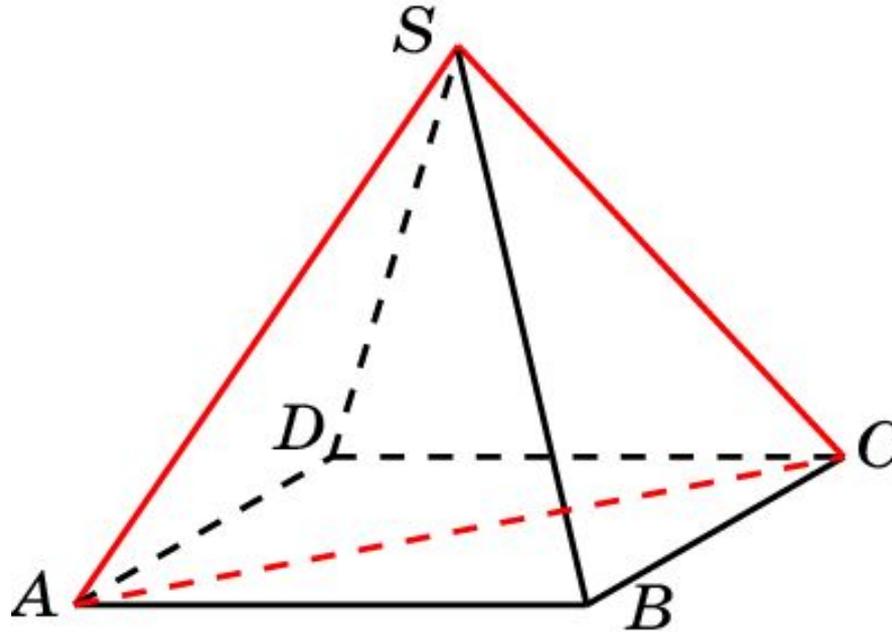
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и SC .



Ответ: 60° .

Пирамида 6

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SA и SC .

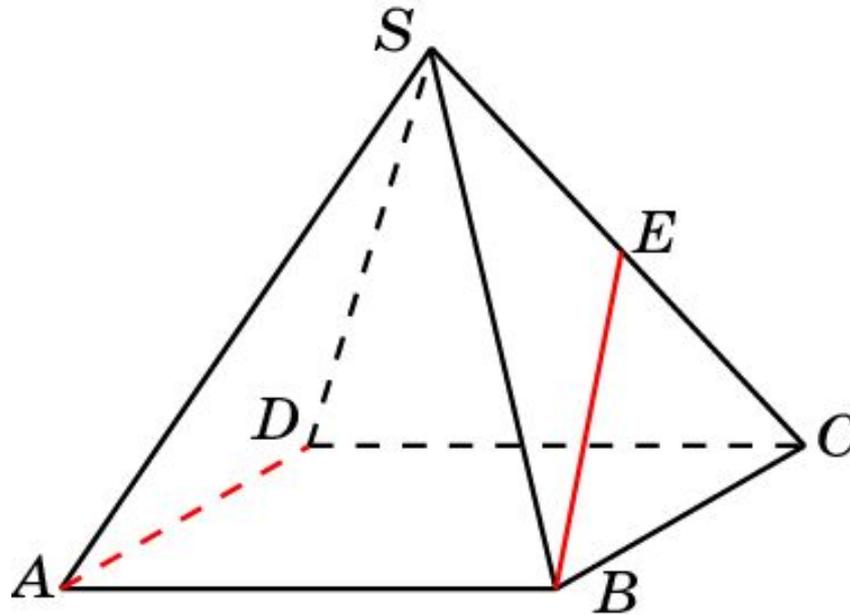


Решение. В треугольнике SAC $SA = SC = 1$, $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, искомый угол равен 90° .

Ответ: 90° .

Пирамида 7

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SC . Найдите угол между прямыми AD и BE .

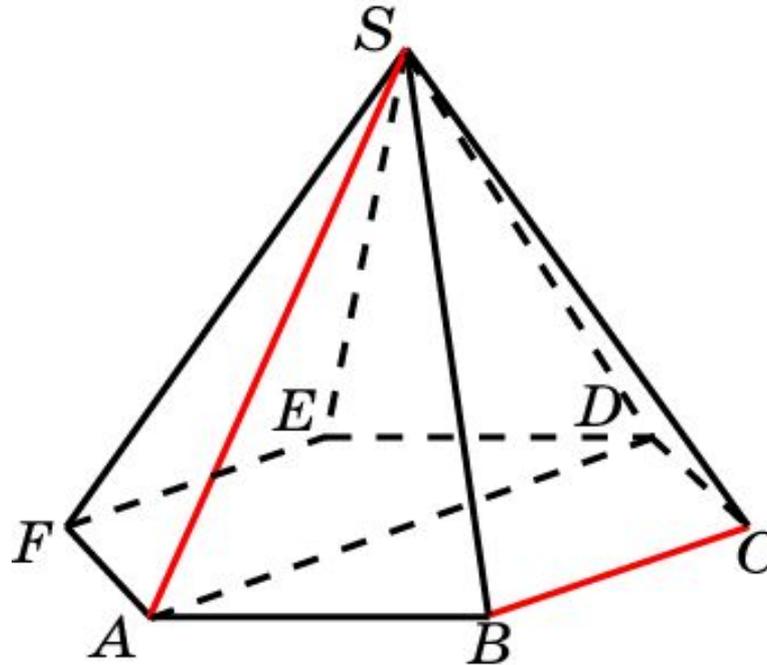


Решение. Искомый угол равен углу CBE . Он равен 30° .

Ответ: 30° .

Пирамида 8

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите угол между прямыми SA и BC .

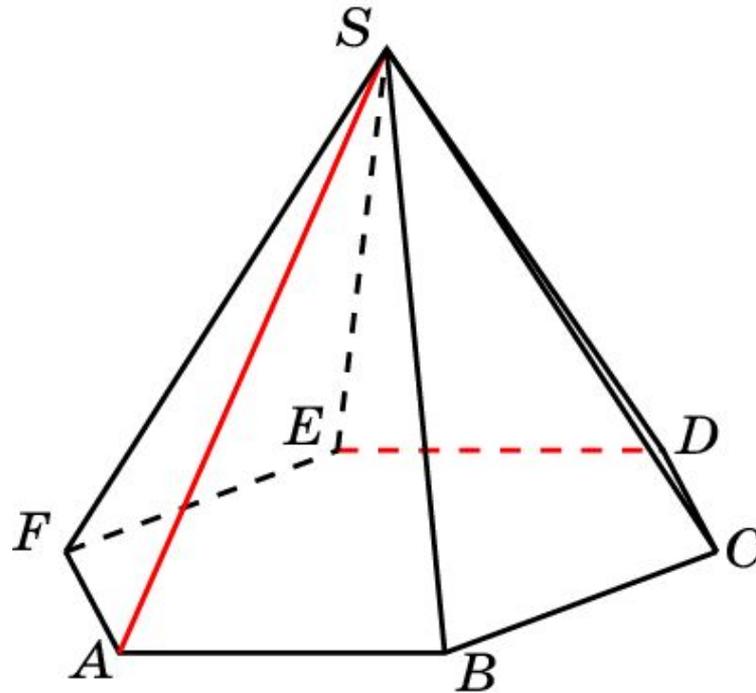


Решение: Искомый угол равен углу SAD . Треугольник SAD – равносторонний, следовательно, $\angle SAD = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Пирамида 9

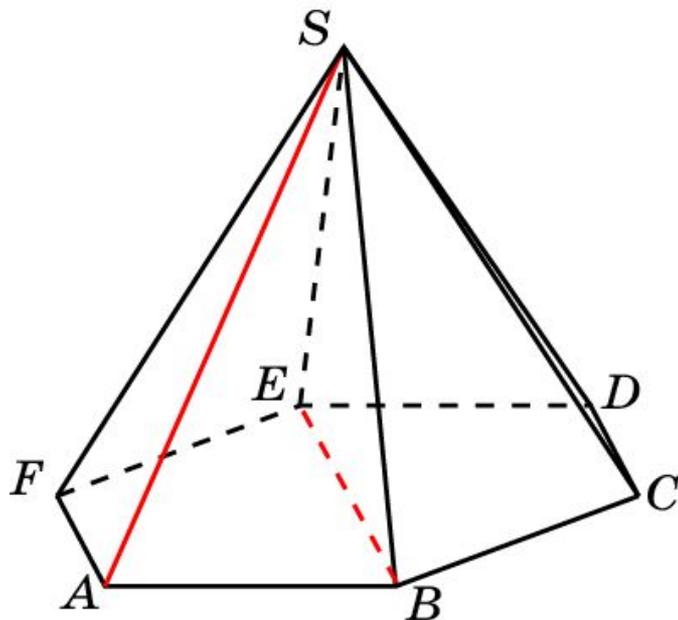
В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямыми SA и DE .



Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Пирамида 10

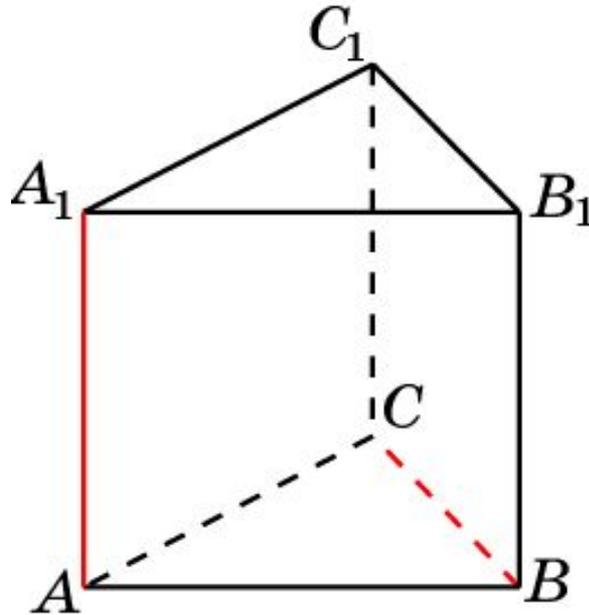
В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямыми SA и BE .



Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Призма 1

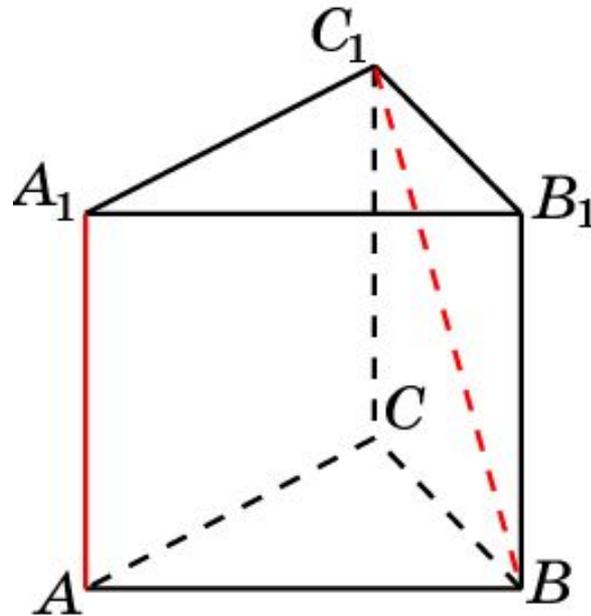
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC .



Ответ: 90° .

Призма 2

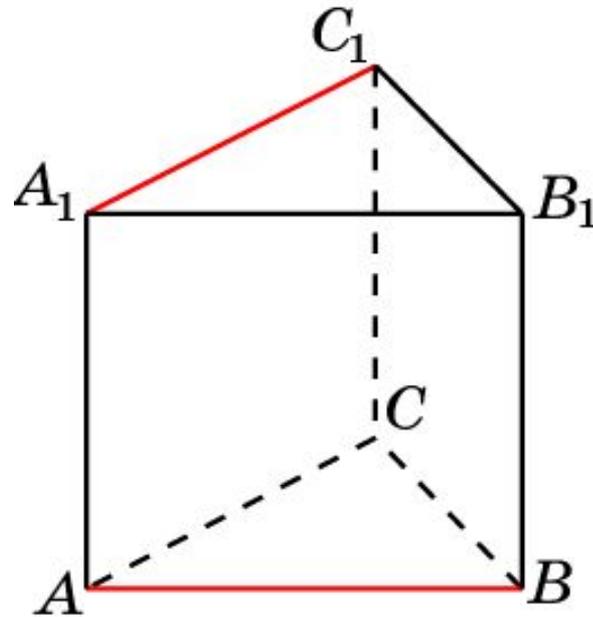
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: 45° .

Призма 3

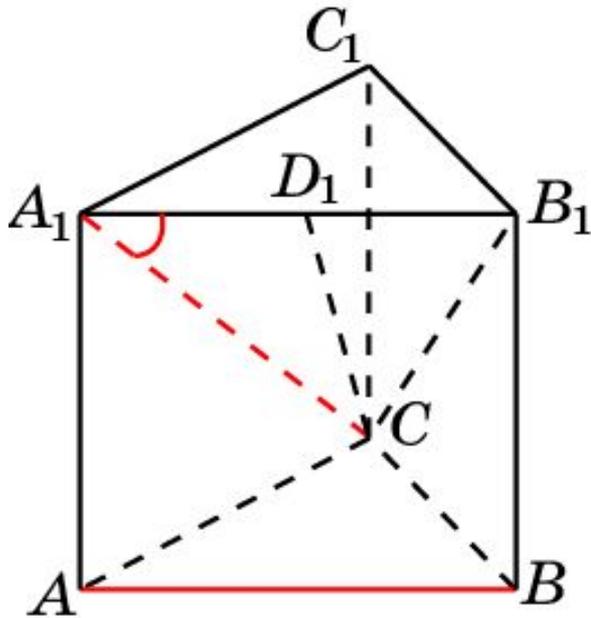
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C_1 .



Ответ: 60° .

Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C .

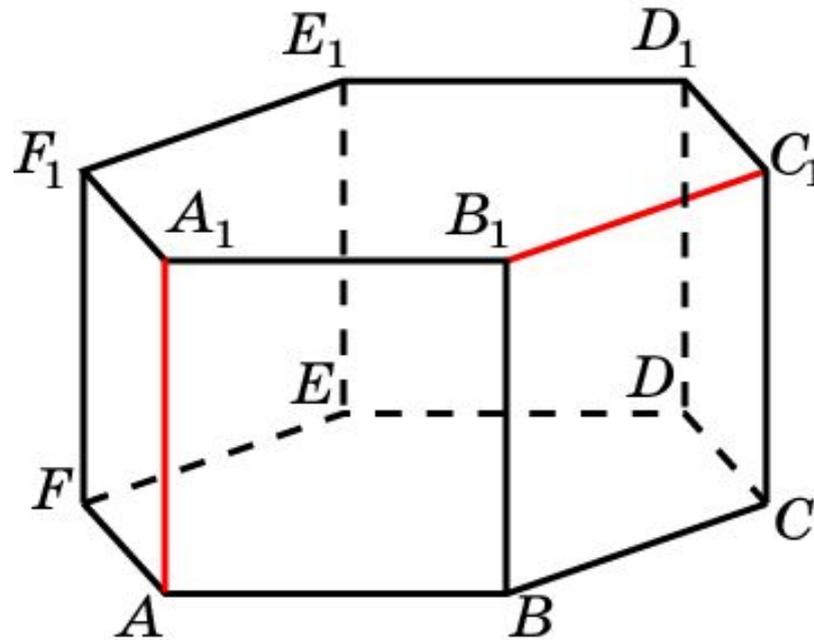


Решение: Искомый угол равен углу B_1A_1C . В треугольнике B_1A_1C проведем высоту CD_1 . В прямоугольном треугольнике A_1CD_1 катет A_1D_1 равен 0,5; гипотенуза A_1C равна $\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Призма 5

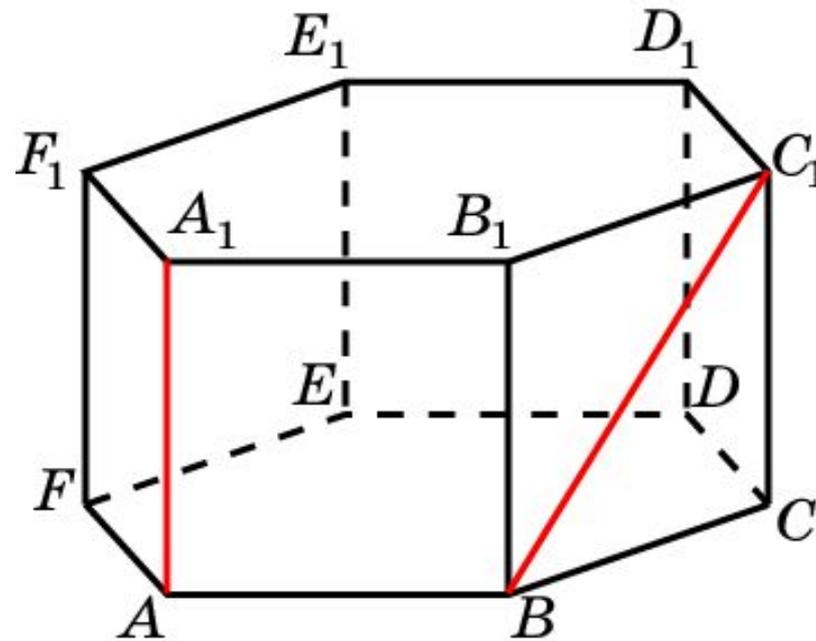
В правильной 6-й призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и $B_1 C_1$.



Ответ: 90° .

Призма 6

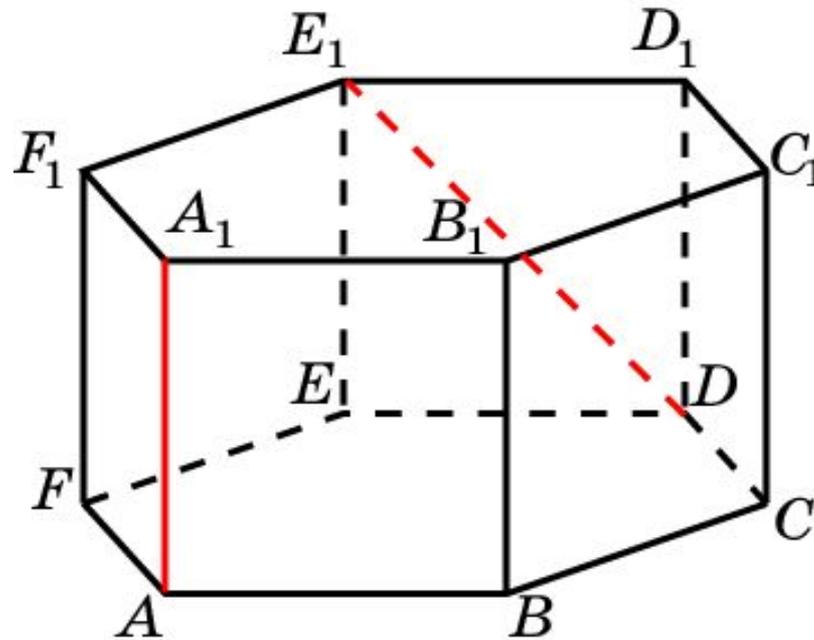
В правильной 6-й призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: 45° .

Призма 7

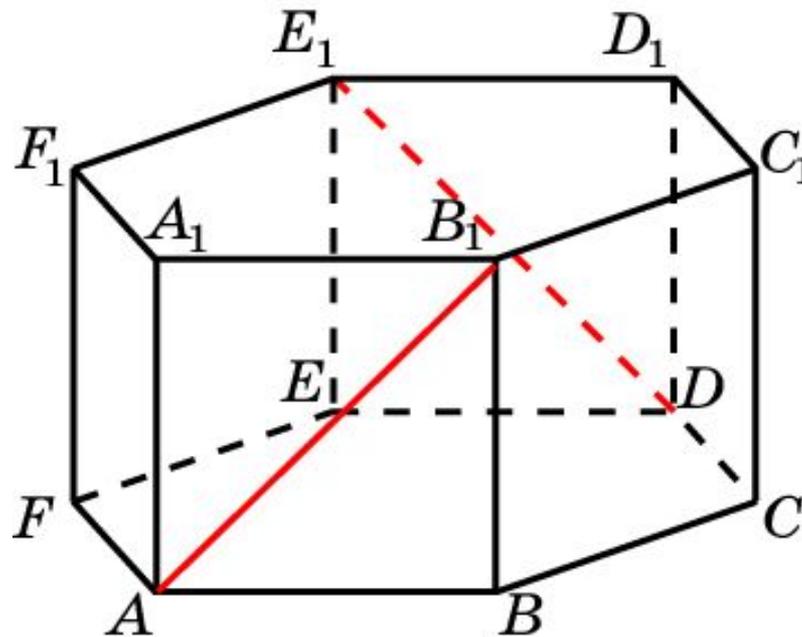
В правильной 6-й призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и DE_1 .



Ответ: 45° .

Призма 8

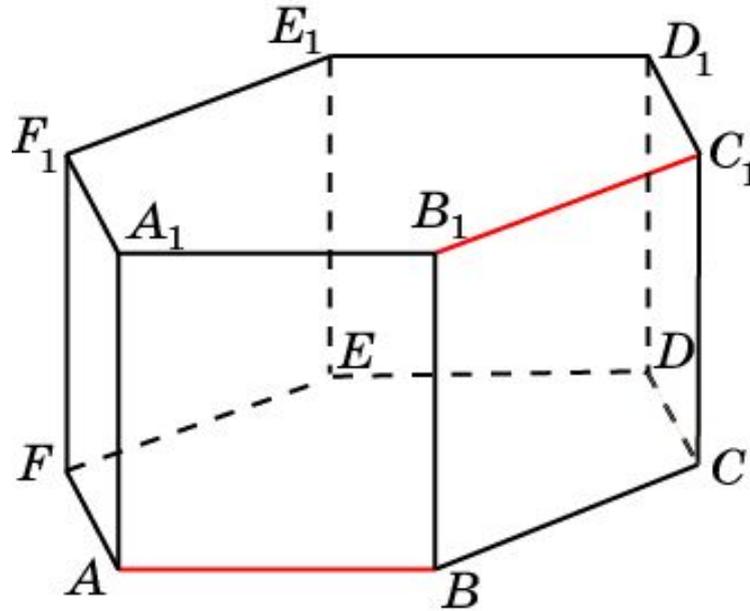
В правильной 6-й призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DE_1 .



Ответ: 90° .

Призма 9

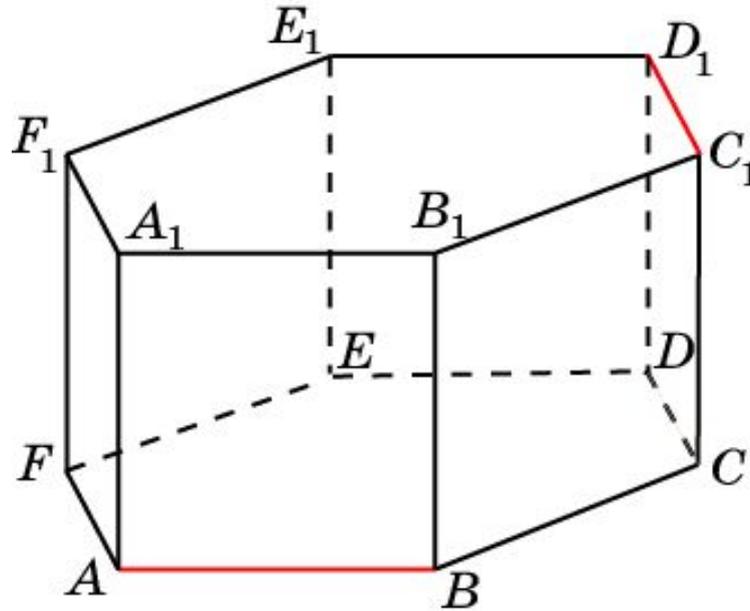
В правильной 6-й призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и $B_1 C_1$.



Ответ: 60° .

Призма 10

В правильной 6-й призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и $C_1 D_1$.



Ответ: 60° .