Математика.
Лекция 11.

Дифференцирование.

Дифференцирование обратной функции.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (или убывает) в некоторой окрестности точки x_0 и имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет производную $y'_x = f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция имеет производную в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$x'_y = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{или} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Производная функции $y = arctgx$.

Функция $y = arctgx$, определенная на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, является обратной для функции $x = tgy$, определенной на интервале $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. Из формулы следует, что

$$y'_x = (arctgx)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 y}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}\right)} =$$

$$= \frac{1}{tg^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Итак, $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Производная функции, заданной параметрически.

Теорема. Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in (a, b),$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные в некоторой точке $t \in (a,b)$: $y'_t = \psi'(t)$, $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$. Кроме того, функция $x = \varphi(t)$ в окрестности точки t имеет обратную функцию $t = g(x)$.
Тогда определенная параметрическими уравнениями функция $y=f(x)$ также имеет производную в точке $x = \varphi(t)$, причем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производная функции, заданной параметрически.

Пример . Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^3 + 5t, \\ y = t^2 - t + 2. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $x'_t = 3t^2 + 5, \quad y'_t = 2t - 1.$

Следовательно, производная равна:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t - 1}{3t^2 + 5}.$$

Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ в каждой точке некоторого промежутка имеет производную, то эта производная $f'(x)$ является новой функцией на данном промежутке. Если функция $f'(x)$ тоже имеет производную, то её производная называется второй производной или производной второго порядка и обозначается y'' или $f''(x)$. Таким образом, по определению:

$$\boldsymbol{f''(x) = (f'(x))'.}$$

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется третьей производной или производной третьего порядка и обозначается y''' (или $f'''(x)$):

$$\boldsymbol{f'''(x) = (f''(x))'.}$$

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.}$$

Начиная с производной четвёртого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^{IV} или $y^{(4)}$ – производная четвёртого порядка).

Механический смысл второй производной.

Пусть закон движения материальной точки по некоторой прямой линии имеет вид $S = S(t)$. Известно , что первая производная $S'(t)$ равна скорости точки в данный момент времени t:

$$v(t) = S'(t).$$

По определению второй производной $S''(t) = v'(t)$, а $v'(t)$ – скорость изменения $v(t)$ в момент t. Как известно из механики, величина $v'(t)$ является ускорением α в момент времени t. Итак, вторая производная $S''(t)$ от пути по времени есть ускорение прямолинейного движения точки:

$$\boldsymbol{\alpha(t) = S''(t).}$$

Например, если $S = \frac{1}{2}gt^2$ (g – постоянное ускорение свободного падения), то скорость $v(t) = S'(t) = gt$, а ускорение $\alpha\ (t) = v'(t) = S''(t) = g$.

Правило Лопиталя.

Теорема.

Пусть для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполнены следующие условия:

а) они определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0, причем $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в указанной окрестности;

б) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ совместно стремятся к 0 или ∞ :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

или $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty;$$

в) существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тогда существует и предел отношения функций, равный пределу отношения производных:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

1. Правило Лопиталя справедливо и при $x \to \infty$ (при соответствующих условиях).
2. Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

Правило Лопиталя.

Пример . Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Пример . Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Пример . Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Дифференциал функции.

Определение.

Функция $y = f(x)$, имеющая конечную производную в точке x, называется **дифференцируемой в точке x.**

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда по теореме о связи предела и бесконечно малой, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Умножив обе части последнего равенства на Δx, получим приращение функции Δy в виде:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть её приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента. Дифференциал обозначается

$$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot \Delta x.}$$

Дифференциал функции.

Найдём дифференциал независимой переменной x, т.е. дифференциал функции $y = x$:
$dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$.
Таким образом, $dx = \Delta x$.
Поэтому дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной:

$$dy = f'(x)dx.$$

Из формулы следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Теперь обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

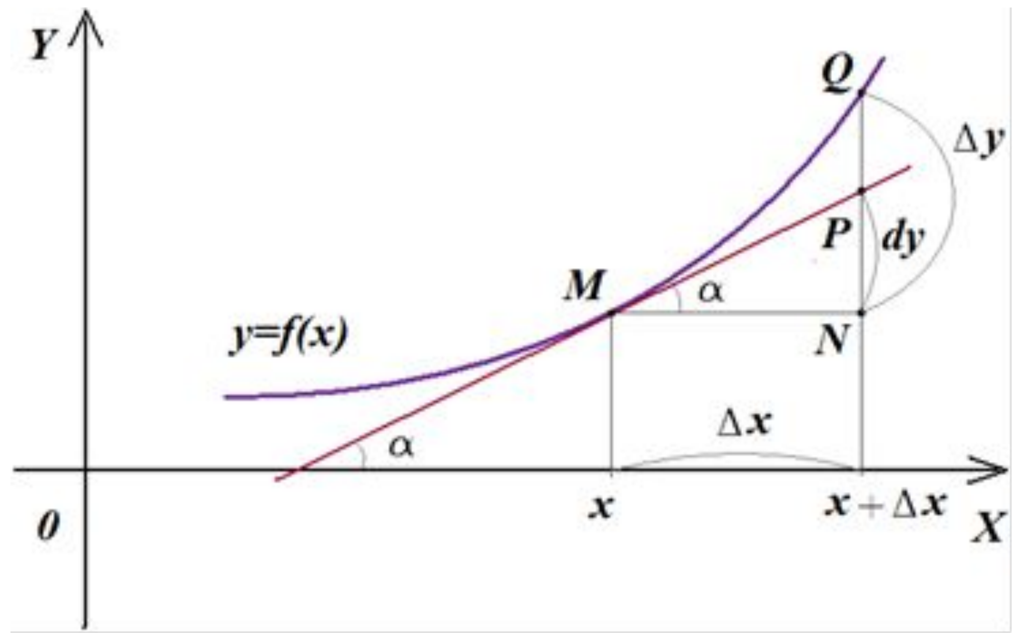
Пример 1. Найти дифференциал функции $y = \mathrm{tg}3x$.

Решение. По формуле находим:

$$dy = (\mathrm{tg}3x)'dx = \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3dx = \frac{3dx}{\cos^2 3x}.$$

Геометрический смысл дифференциала функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке $M(x, f(x))$, когда аргумент x получит приращение Δx.



Основные свойства дифференциалов.

Свойство 1. Дифференциал постоянной равен нулю:

$$dc = 0.$$

Действительно:
$dc = c'dx = 0 \cdot dx = 0.$

Свойство 2. Постоянное число можно выносить за знак дифференциала:

$$d(cu) = cdu.$$

Действительно:
$d(cu) = (cu)'dx = c \cdot u'dx = c\mathrm{d}u.$

Свойство 3. Дифференциал суммы дифференцируемых функций равен сумме дифференциалов:

$$d(u + v) = du + dv.$$

Действительно,
$d(u + v) = (u + v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv.$

Основные свойства дифференциалов.

Свойство 4. Дифференциал произведения дифференцируемых функций находится по формуле:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Свойство 5. Дифференциал частного дифференцируемых функций находится по формуле:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Свойство 6. Инвариантность формы дифференциала.

Рассмотрим дифференцируемые функции $u = u(x)$, $y = f(u)$. Тогда дифференциал сложной функции $y = f(u(x))$ находится по формуле:

$$dy = f'(u)du.$$

Если сравним последнюю формулу с определением дифференциала, то получим, что дифференциал имеет неизменную (инвариантную) форму относительно аргумента.

Действительно, по формуле производной сложной функции имеем:

$$dy = (f(u(x)))'dx = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du,$$

т.к. $du = u'(x)dx$.

Таблица дифференциалов основных элементарных функций.

1. $d\left(x^a\right) = ax^{a-1}dx$.
2. $d(a^x) = a^x \ln a \cdot dx, \quad d(e^x) = e^x dx$.
3. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}dx, \quad d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$.
4. $d(\sin x) = \cos x dx$.
5. $d(\cos x) = -\sin x dx$.
6. $d(tgx) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.
7. $d(ctgx) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.
8. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.
9. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.
10. $d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}$.
11. $d(arcctgx) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях значений функции.

Перейдем к применению дифференциала в приближенных вычислениях значений функции.

Пусть известно значение функции $y = f(x)$ и её производной в точке x_0. Покажем, как найти значение функции в точке x, близкой к x_0 .

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Рассмотрим приращение функции Δy при малых приращениях аргумента Δx:

$$\Delta y \approx dy = y' dx = y' \Delta x$$

Так как $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x)\Delta x$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x.$$

Пример. Вычислим приближенно $\sqrt{1{,}0003}$ с помощью дифференциала.

Для этого используем функцию $y = \sqrt{x}$. Найдем значение этой функции при $x = 1{,}0003$. Ближайшее к нему значение, для которого точно известно значение функции – это $x_0 = 1$, значение функции $y_0 = \sqrt{1} = 1$.

Найдем производную функции, чтобы применить приближенную формулу.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ значение производной } y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

В результате $\sqrt{1{,}0003} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(1{,}0003 - 1) = 1 + \frac{0{,}0003}{2} = 1{,}00015.$