



КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



Определение

*Комплексным числом называется
выражение вида*

$$z = a + bi$$

где a и b – действительные числа,

i – символ, называемый мнимой

единицей, где $i^2 = -1$

Множество комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$.



*Число **a** называется действительной
частью комплексного числа **z** .*

*Пишут: **$a = \operatorname{Re}(z)$***

*Число **b** называется мнимой
частью комплексного числа **z** .*

*Пишут: **$b = \operatorname{Im}(z)$***



Комплексные числа

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

называются равными, если равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$



*Комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$
называются противоположными*

*Комплексные числа
 $z = a + bi$ $z = a - bi$
называются взаимно - сопряжёнными*



Арифметические действия над комплексными числами



Сумма (разность) комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)i$$

Произведение комплексных чисел:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i - b_1 \cdot b_2 = \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i \end{aligned}$$

Итак:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i$$



Частное комплексных чисел:

*Чтобы выполнить деление комплексных чисел,
надо и числитель, и знаменатель дроби
умножить на число, сопряжённое знаменателю.*



$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \\ &= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}\end{aligned}$$

Итак:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$



Примеры

*Найти сумму, разность, произведение
и частное комплексных чисел:*

$$z_1 = 12 + 5i$$

$$z_2 = 3 - 4i$$



Решение

$$z_1 + z_2 = 12 + 5i + 3 - 4i = 15 + i$$

$$z_1 - z_2 = 12 + 5i - (3 - 4i) = 9 + 9i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (12 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 36 + 15i - 48i + 20 = \\ &= 56 - 33i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \\ &= \frac{36 + 15i + 48i - 20}{9 + 16} = \frac{16 + 63i}{25} = 0,64 + 2,52i \end{aligned}$$

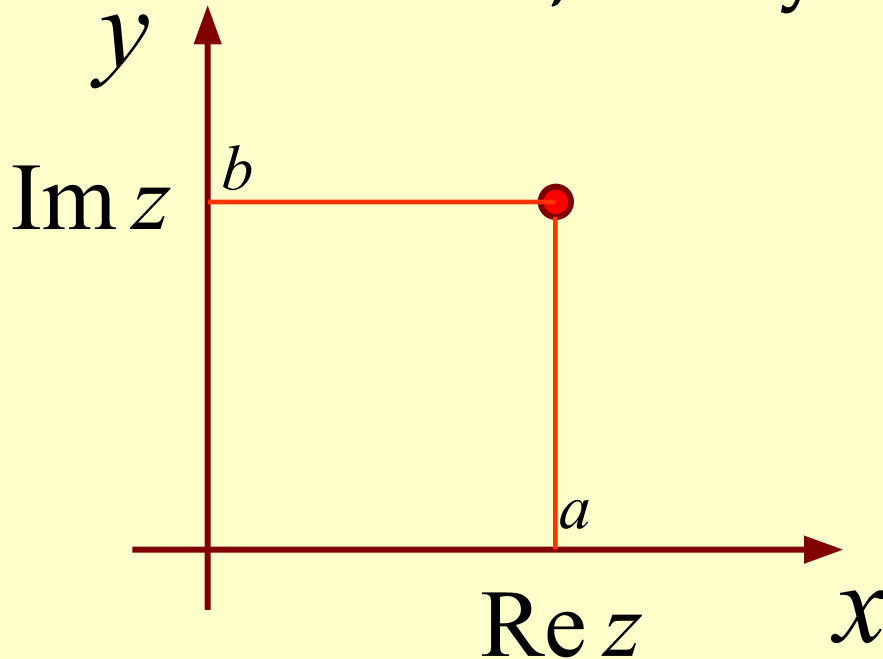


Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Если для изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости XOY .



По оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа $Re(z)$, а по оси ординат – мнимая $Im(z)$, поэтому ось x называется действительной осью, а ось y – мнимой.





Модуль комплексного числа

Модулем комплексного числа $z = a + bi$
называется действительное число

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Модулем комплексного числа $z = a + bi$
называется действительное число

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Спасибо за работу!