Логика первого порядка

Лекции 10-11

Н.В. Белоус

Факультет компьютерных наук

Кафедра ПО ЭВМ, ХНУРЭ

Понятие терма, предиката

A – «каждый человек смертен»,

B – «Сократ — человек»,

C – «Сократ смертен».

Исходное умозаключение будет соответствовать формуле логики высказываний

$$\mathbf{A \wedge B \rightarrow C}$$

Приведем данную формулу к нормальной форме:

$$\mathbf{A \wedge B \rightarrow C = \neg (A \wedge B) \vee C = \neg A \vee \neg B \vee C}$$

Понятие предиката

Определен некоторый ***предикат***, если:

1. Задано некоторое (произвольное) множество, называемое областью определения предиката (**предметная область**);

2. Фиксировано множество {1, 0}, называемое **областью значений**;

3. Указано **правило**, с помощью которого каждому элементу, взятому из предметной области, ставится в соответствие один из двух элементов из области значений.

Понятие предиката

Понятие предиката является частным случаем понятия функции.

Отличие предиката от функции состоит в том, что у предиката четко фиксирована область значений.

Примеры

«x - действительное число» - одноместный предикат,

«y меньше z» - двуместный предикат,

«x и y родители z» - трёхместный предикат.

Понятие предиката

Если x, y и z замещены конкретными значениями (объектами), то предикат переходит в высказывание, которое рассматривается как ***нульместный предикат.***

Пример:

«Терм и квантор - понятия логики предикатов».

Таким образом, если количество аргументов предиката P $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n равно нулю, то предикат является высказыванием;

если n=1, то предикат соответствует ***свойству***;

если n=2, то предикат является ***бинарным отношением***;

если n=3, то предикат - ***тернарное отношение***.

Понятие предиката

Предикат P, имеющий n аргументов, называется ***n-местным предикатом***, обозначается $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Количество аргументов предиката $P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется его ***порядком***.

Функциональный символ

В логике предикатов существует понятие ***функционального символа***.

Пример:

минус(x, y) - функциональный символ «x - y»;

отец(x) - функциональный символ «отец человека x».

Функциональный символ

Если функциональный символ имеет n аргументов, то он называется ***n-местным функциональным символом***

Пример:

минус(x, y) - двухместный функциональный символ.

Индивидуальный символ или константа может рассматриваться как функциональный символ без ***аргументов***.

Отличие функционального символа от предикатного в том, что предикат принимает значение из множества {0,1}, а функционального - любое из предметной области М.

Типы символов в ЛПП

Для построения ***атомов*** логики предикатов разрешается использовать следующие типы символов:

1. **Индивидуальные символы (константы)**, которые обычно являются именами объектов.
2. **Символы предметных переменных**, в качестве которых обычно выступают буквы латинского алфавита, возможно с индексами.
3. **Функциональные символы** – строчные буквы латинского алфавита или осмысленные слова из строчных букв.
4. **Предикаты** – прописные буквы или осмысленные слова из прописных букв.

Понятие терма

Аргументы предиката называются ***термами***.

Терм определяется рекурсивно следующим образом:

Понятие терма

1. Константа есть терм.
2. Переменная есть терм.
3. Если f является n-местным функциональным символом,

   а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы,

   то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ есть терм.
4. Никаких термов, кроме порожденных с помощью указанных выше правил, не существует.

Пример.

Перевести на естественный язык следующее высказывание логики предикатов.

ЗНАТЬ(папа (Вася), математика).

Решение.

Функциональный символ *«папа(x)»* принимает значение из множества людей, соответствующее отношению

«быть отцом x».

Выражение *папа(Вася)* следует интерпретировать как *«Васин папа»*.

Понятие терма, предиката

Продолжение примера.

Предикат

ЗНАТЬ(папа(Вася), математика) соответствует предложению

«папа у Васи знает математику».

«Вася» и *«математика»* являются константами, *папа* - функциональный символ.

Любой функциональный символ от константы является термом, следовательно, *папа(Вася)* - терм.

Кванторы

Кванторы – специальные символы, которые используются для характеристики переменных.

Существует два типа кванторов:

$(\forall \boldsymbol{x})$ и $(\exists \boldsymbol{x})$

Кванторы

Пусть P(x) – предикат, определенный на M.

- Высказывание

«для всех $x \in$ M, P(x) истинно» обозначается

$$(\forall x)P(x).$$

Знак $\forall$ называется ***квантором всеобщности*.**

- Высказывание

«существует такой $x \in$ M, что P(x) истинно» обозначается

$$(\exists x)P(x),$$

где знак $\exists$ называется ***квантором существования***.

Кванторы

Переход от $P(x)$ к $(\forall x)P(x)$ или $(\exists x)P(x)$ называется ***связыванием*** переменной x, а сама переменная x в этом случае называется ***связанной***.

Переменная, не связанная никаким квантором, называется ***свободной.***

Пример.

Определить, какие переменные являются связанными, а какие - свободными в следующих формулах:

$A(x, y)$;

$\exists y\ (B(x) \rightarrow \forall x\ A(x, y))$;

$\exists x\ (B(x) \rightarrow \forall x\ A(x, y))$.

Решение:

Обе переменные в формуле 1 являются свободными. В формуле 2 переменная y является связанной, а переменная x - и связанной и свободной (переменная x свободна в предикате B(x) и связана в предикате A(x,y)). В формуле 3 переменная x является связанной, а переменная y - свободной.

Кванторы

Пример.

Записать в виде предикатов с кванторами следующие высказывания:

“Все студенты сдают экзамены”,

“Некоторые студенты сдают экзамены на отлично”.

Решение.

Введем предикаты:

P – «сдавать экзамены»

Q – «сдавать экзамены на отличие».

Предметная область данных предикатов представляет собой множество студентов.

Тогда исходные выражения примут вид:

$$(\forall x)\ \mathrm{P}(x)$$

$$(\exists x)\ \mathrm{Q}(x)$$

Атом

Если P - n-местный предикат и $t_1, \ldots, t_n$ - термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ называется **атомом** или **элементарной формулой** логики предикатов.

Пример

ДЕЛИТСЯ(x, 13),

ДЕЛИТСЯ(x, y),

БОЛЬШЕ(плюс(x, 1), x),

РАВНЯТЬСЯ(x,1),

СДАВАТЬ(студенты, сессии).

Правильно построенные формулы в ЛПП

Правильно построенными формулами логики первого порядка называются формулы, которые можно рекурсивно определить следующим образом:

1. Атом является формулой.

2. Если **F** и **G** – формулы, то

   $$(\neg F),\ (F \vee G),\ (F \wedge G),\ (F \rightarrow G),\ (F \sim G)$$

   также являются формулами.

3. Если **F** – формула, а x – свободная переменная, то $(\forall x)F$ и $(\exists x)F$ тоже формулы.

4. Никаких формул, кроме порожденных указанными выше правилами, не существует

Интерпретация формул в ЛПП

Интерпретация формулы F логики первого порядка состоит из

- **непустой предметной области D,**
- **значений всех констант,**
- **функциональных символов и**
- **предикатов, встречающихся в F.**

Указанные значения задаются следующим образом:

Интерпретация формул в ЛПП

1. Каждой константе ставится в соответствие некоторый элемент из D.

2. Каждому n-местному функциональному символу ставится в соответствие отображение из D^n в D.
Здесь $D^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n \in D$.

3. Каждому n-местному предикату ставится в соответствие отображение из D^n в {И, Л}.

Интерпретация формул в ЛПП

Для каждой интерпретации на области D формула может получить истинностное значение И или Л согласно следующим правилам:

1. Если заданы значения формул F и G, то истинностные значения формул

$$(\neg F),\ (F \vee G),\ (F \wedge G),\ (F \to G),\ (F \sim G)$$

получаются с помощью таблиц истинности соответствующих логических операций.

2. Формула **(**$\forall$***x*****)**F получает значение **И**, если F получает значение **И** для каждого ***x*** из D,

в противном случае она получает значение Л.

3. Формула ($\exists$***x***)F получает значение **И**, если F получает значение **И** хотя бы для одного ***x*** из D, в противном случае она получает значение **Л**.

PS: Формула, содержащая свободные переменные, не может получить истинностное значение.

Предваренные нормальные формы

Формула F в логике первого порядка находится в ***предваренной нормальной форме (ПНФ)*** тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)(M),$$

где каждое $(Q_i x_i)$, $i=1, \ldots, n$ есть или $(\forall x)$, или $(\exists x)$,

M – формула, не содержащая кванторов.

$(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)$ называется **префиксом**,

а M — матрицей формулы F.

Преобразования выражений произвольной формы в ПНФ

Для преобразования выражений произвольной формы в ПНФ необходимо выполнить, следующие этапы преобразования:

Преобразования выражений произвольной формы в ПНФ

1. Исключить логические связки эквиваленции **(~)** и импликации **(→),** выразив их через операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания с помощью следующих законов:

$$\mathbf{F \sim G = (\neg F \lor G) \land (\neg G \lor F),}$$

$$\mathbf{F \sim G = (\neg F \land \neg G) \lor (G \land F),}$$

$$\mathbf{F \to G = \neg F \lor G.}$$

Преобразования выражений произвольной формы в ПНФ

2. Опустить знаки операций отрицания непосредственно на предикаты, используя приведенные ниже законы.

а) **Двойного отрицания:**

$\neg(\neg F) = F.$

б) **Де Моргана:**

$\neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G,$

$\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G.$

в) **Де Моргана для кванторов**:

$\neg((\forall x)\, F(x)) = (\exists x)\, (\neg F(x)),$

$\neg((\exists x)\, F(x)) = (\forall x)\, (\neg F(x)).$

Преобразования выражений произвольной формы в ПНФ

3. Если необходимо – переименовать связанные переменные.

4. Вынести кванторы в начало формулы, используя соответствующие законы, для получения предваренной нормальной формы.

Пример.

Привести формулу

$(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$ к ПНФ.

Решение.

$$(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) =$$

$$= \neg((\forall x)P(x)) \vee (\exists x)Q(x) =$$

$$= (\exists x)(\neg P(x)) \vee (\exists x)Q(x) =$$

$$= (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)).$$

Законы логики первого порядка

1. ***Замена связанной переменной***

$$(\exists x)\,F(x) = (\exists y)\,F(y);$$
$$(\forall x)\,F(x) = (\forall y)\,F(y).$$

2. ***Коммутативные свойства кванторов***

$$(\forall x)\,(\forall y)\,P(x, y) = (\forall y)\,(\forall x)\,P(x, y);$$
$$(\exists x)\,(\exists y)\,P(x, y) = (\exists y)\,(\exists x)\,P(x, y).$$

Законы логики первого порядка

3. ***Дистрибутивные свойства кванторов***

$(\forall x)F(x) \vee G = (\forall x)(F(x) \vee G)$,

$(\exists x)F(x) \vee G = (\exists x)(F(x) \vee G)$,

$(\forall x)F(x) \wedge G = (\forall x)(F(x) \wedge G)$,

$(\exists x)F(x) \wedge G = (\exists x)(F(x) \wedge G)$,

$(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)H(x) = (\forall x)(F(x) \wedge H(x))$,

$(\exists x)F(x) \vee (\exists x)H(x) = (\exists x)(F(x) \vee H(x))$.

Для применения дистрибутивного закона заменим связную переменную в одной из частей формул:

$$(\forall x)F(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)F(x) \vee (\forall y)H(y) = (\forall x)(\forall y)(F(x) \vee H(y))$$

$$(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)F(x) \wedge (\exists y)F(y) = (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y))$$

4. *Закон де Моргана для кванторов*

$$\neg((\forall x)F(x)) = (\exists x)\neg F(x),$$

$$\neg((\exists x)F(x)) = (\forall x)\neg F(x).$$

Логическое следствие в ЛПП

Формула **B** является ***логическим следствием*** высказывания **A**, если формула

$$\mathbf{A \to B}$$

является тождественно истинной.

Формула **B** называется ***логическим следствием*** формул $\mathbf{A_1, A_2, ..., A_n}$, если

$$\mathbf{A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B}$$

тождественно истинная формула .