Множества и действия над ними

Мн-во и элемент мн-ва — понятия первичные

A — мн-во, a — его элемент, $a \in A$ — принадлежит

$a \notin A$, $a \bar{\in} A$ — не принадлежит

Описание мн-ва: $A \equiv \{a : \dots\}$.

Некоторые символы

$\forall$ — любой, для любого $\quad$ $\exists$ — найдётся, существует $\quad$ $:$ — такой, что

$\Rightarrow$ влечёт, следует $\quad$ $\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда $\quad$ $\neg$, $/$, $\overline{}$ — „не" (отрицание)

$\vee$ — или $\quad$ $\wedge$ — и

Мн-во, не содержащее элементов — пустое мн-во

$\varnothing$ — пустое множество

Опр A и B — равные мн-ва, если состоят из одних и тех же элементов $\quad A = B$

Опр. A — подмн-во мн-ва A (A входит в B), если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ $\quad A \subset B$

М.б. $B = A$, т.е. $A \subset A$

В частности $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$

Ясно, что $\forall A$ $\varnothing \subset A$

Опр. Объединение мн-в A и B — мн-во

$$A \cup B \equiv \{a : a \in A \text{ или } a \in B\}$$

Опр. Пересечение мн-в A и B — мн-во

$$A \cap B \equiv \{a : a \in A \text{ и } a \in B\}$$

Эти понятия можно распространить на любую совокупность множеств:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha \equiv \{a : \exists \alpha, \text{ что } a \in A_\alpha\}$$

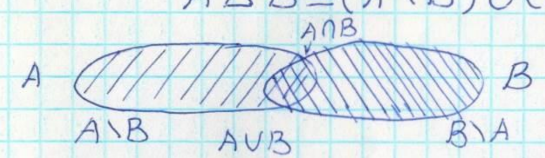
$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha \equiv \{a : \forall \alpha \ a \in A_\alpha\}$$

Опр Разность мн-в A и B — мн-во

$$A \setminus B \equiv \{a : a \in A \text{ и } a \notin B\}$$

Опр Симметрическая разность мн-в A и B — мн-во

$$A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Опр Пусть A и B — два мн-ва. Если $\exists$ закон (правило), по к-му $\forall a \in A$ $\exists$ и ед. $b \in B$, причём $\forall b \in B$ поставлен в соответствие единственному $a \in A$, то это значит, что между A и B установлено взаимно-однозначное соответствие, а мн-ва A и B называются эквивалентными (равномощными) $A \sim B$

Числа и числовые множества
Расширение понятия числа

1. Натуральные числа.

Возникли в глубокой древности для счёта предметов. Введены понятия: $=, >, <$; (отношения) операции: $+, \cdot$; (иногда $-, :$). Для обозначения натуральных чисел придуманы цифры

$\mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натур. чисел

Опр Мн-во A – конечное мн-во, если содержит конечное число элементов, то есть

$\exists n \in \mathbb{N} : A \sim \{1, 2, \dots, n\}$

Опр A – счётное мн-во, если

$$A \sim \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$$

Счётное мн-во – бесконечное мн-во

2. Целые числа

Возникли из натуральных добавлением нуля (0) и отрицательных целых чисел, чтобы всегда выполнялось вычитание ($x + 3 = 1$ не имеет решения среди $\mathbb{N}$)

$\mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – мн-во целых чисел. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Отношения $(=, >, <)$ и операции $(+, \cdot)$ переносятся на целые числа (известно из школы)

В частности $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, \text{ если } a = 0 \text{ или } b = 0 \\ |a| \cdot |b|, \text{ если } a, b \text{ – одного знака} \\ -|a| \cdot |b|, \text{ если } a, b \text{ – разных знаков} \end{cases}$$

Обратные операции: ($-$ всегда выполняется, $:$ – не всегда)

Установим, что $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, хотя $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \neq \varnothing$

$\mathbb{Z}$ $\quad 0, \; 1, \; -1, \; 2, \; -2, \; \dots, \; n, \; -n, \dots$

$\mathbb{N}$ $\quad 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5, \; \dots, \; 2n, \; 2n+1, \dots$

Мн-во может быть эквивалентным своей части.

3. Рациональные числа

Возникли из целых, чтобы всегда было возможно деление (кроме деления на ноль, т.к. $0 \cdot a = 0 \quad \forall a$)

$2 \cdot x = 3$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Q} \equiv \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

При этом отождествляются сократимые дроби, т.е. такие, что p и q имеют общий натуральный делитель, больший 1

Арифметические действия и отношения осуществляются по правилам, известным со школы.

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}_1 \subset \mathbb{Q} \quad \left(\mathbb{Z}_1 \equiv \left\{ \frac{p}{1}, p \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

с сохранением операций и отношений

Установим, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, т.е. мн-во рациональных чисел счётно.

Введём для $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ величину $r = |p| + q$ („вес" числа)

$r = 1 \quad \frac{0}{1}$ (1)

$r = 2 \quad \frac{0}{2}, \frac{1}{1}$ (2), $\frac{-1}{1}$ (3)

$r = 3 \quad \frac{0}{3}, \frac{1}{2}$ (4), $\frac{-1}{2}$ (5), $\frac{2}{1}$ (6), $\frac{-2}{1}$ (7)

$r = 4 \quad \frac{0}{4}, \frac{1}{3}$ (8), $\frac{-1}{3}$ (9), $\frac{2}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{3}{1}$ (10), $\frac{-3}{1}$ (11)

. . . .

Запишем эти числа подряд, исключая повторяющиеся (т.е. равные). Это и будет вз.-однозн. соответствие.

Рац. числа: там есть отношения $(=, <, >)$, основные операции $(+, \cdot)$, обратные $(-, :)$

Имеют место св-ва, известные со школы

1. $a > b, b > c \Rightarrow a > c \quad (a = b, b = c \Rightarrow a = c)$
2. $a + b = b + a$
3. $(a+b)+c = a+(b+c)$
4. $\exists 0 : a + 0 = a \ \forall a$
5. $\forall a \ \exists a' : a + a' = 0$
6. $ab = ba$
7. $(ab)c = a(bc)$
8. $\exists 1 \neq 0 : a \cdot 1 = a \ \forall a$
9. $\forall a \neq 0 \ \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = 1$
10. $(a+b) \cdot c = ac + bc$
11. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
12. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
13. $\forall a \ \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ раз}} > a$

Это - основные св-ва. Из них можно вывести св-ва чисел. нер-в

a' (5-е св.) $a' = -a$ (для вычитания)

$\tilde{a}$ (9-е св.) $\tilde{a} = \frac{1}{a}$ (для деления

Из рац. чисел будем строить вещественные