Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования.

- Понятие неопределенного интеграла
- Свойства неопределенного интеграла
- Таблица интегралов
- Непосредственное интегрирование
- Введение части функции под знак дифференциала
- Метод замены переменной
- Метод интегрирования по частям

Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную.

Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$:

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если

$$\forall x \in (a,b): \quad F'(x) = f(x)$$

Теорема

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой: $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Доказательство: $$(F(x)+C)' = f(x) \Rightarrow$$

$F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Переменная интегрирования

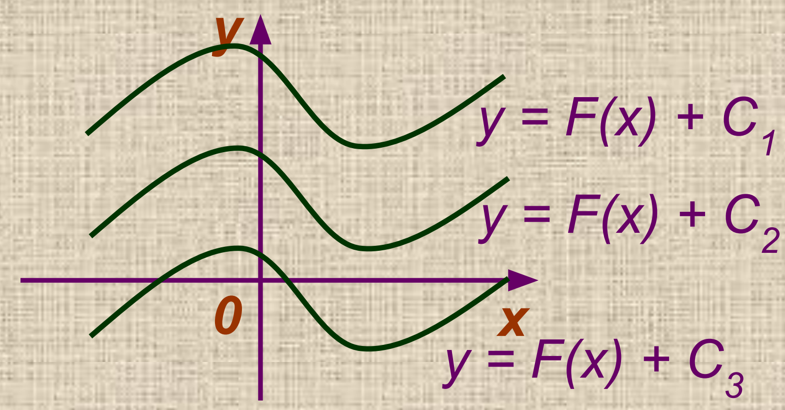
Подынтегральная функция

Подынтегральное выражение

Знак неопределенного интеграла

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство параллельных кривых $y = F(x) + C$ (***интегральных кривых***)



Свойства неопределенного интеграла

- Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

- Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$$

- Неопределенный интеграл от суммы (разности) конечного числа непрерывных функций равен сумме (разности) интегралов:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

- Инвариантность формулы интегрирования: Если

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ то: $\int f(u)\,du = F(u) + C$

где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

- $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$ $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$; $\int 0\,dx = C$; $\int dx = x + C$;

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C_1; \quad (a \neq 0)$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1; \quad (a > 0)$;

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1)$;

6. $\int e^x dx = e^x + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad (a \neq 0)$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$;

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C_1, \quad (a \neq 0)$;

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0)$.

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием.***

$$\int \left(e^x + 2x - 6\right) dx = \int e^x\, dx + \int 2x\, dx - \int 6\, dx =$$

$$= \int e^x\, dx + 2\int x\, dx - 6\int dx = \boxed{e^x + x^2 - 6x + C}$$

$$\int ctg^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx =$$

$$= \boxed{-ctg\, x - x + C}$$

Введение части функции под знак дифференциала.

При сведении данного интеграла к табличному часто применяются следующие преобразования дифференциала (операция «***подведения под знак дифференциала***»)

$$du = d(u+b)$$

$$du = \frac{1}{a} d(au)$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2)$$

$$\cos u \cdot du = d(\sin u)$$

$$\frac{du}{u} = d(\ln u)$$

$$\boxed{f'(u) \cdot du = d(f(u))}$$

$$\int \sin(x^2)\cdot x\,dx = \int \sin(x^2)\cdot\frac{1}{2}\,d\left(x^2\right) =$$

$$= 0.5\int \sin(\ u\ )\,d\left(\ u\ \right) = \boxed{-0.5\cos(x^2)+C}$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \int (\ u\ )^3\,d(\ u\ ) = \boxed{\frac{\ln^4 x}{4}+C}$$

$$\int \sqrt{3x-5}\,dx = \int \sqrt{3x-5}\,\frac{1}{3}\,d(3x-5)$$

$$= \frac{1}{3}\int (\ u\ )^{\frac{1}{2}}\,d(\ u\ ) = \boxed{\frac{2}{9}(3x-5)^{\frac{3}{2}}+C}$$

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx.$

Сделаем подстановку: $x = \varphi(t)$, где φ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда:

$$dx = \varphi'(t)dt$$

Получим ***формулу интегрирования подстановкой***:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dx}$$

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$

Тогда подынтегральную функцию нужно представить в виде:

$$\boxed{\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{t}) \cdot \underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{dt} = \int f(t)dt.}$$

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=t;\\ x=t^2+3;\\ dx=(t^2+3)'dt=2tdt\end{array}\right|=$$

$$=\int\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int\left(2t^4+6t^2\right)dt=$$

$$=2\int t^4\,dt+6\int t^2\,dt=\ 2\frac{t^5}{5}+6\frac{t^3}{3}+C=$$

$$\boxed{=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C}$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} e^x + 2 = t; \\ dt = \left(e^x+2\right)' dx = e^x dx \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \boxed{2\sqrt{e^x+2}+C}$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции, имеющие непрерывную производную. Тогда:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \;\Rightarrow\; uv = \int udv + \int vdu \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad \textbf{(1)}$$

Формула интегрирования по частям

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух сомножителей: u и dv , затем, после нахождения du и v используется формула *(1)*. Иногда эта формула применяется несколько раз.

Типы интегралов, которые удобно вычислять по частям:

- Интегралы вида:

$$\int P(x)\cdot e^{kx}dx; \quad \int P(x)\cdot \sin kx\,dx; \quad \int P(x)\cdot \cos kx\,dx$$

где: *P(x)* – многочлен. Удобно положить *u = P(x), dv* – остальные сомножители.

- Интегралы вида: $\int P(x)\cdot \arcsin kx\,dx;$

$$\int P(x)\cdot arctg\,kx\,dx; \quad \int P(x)\cdot \ln x\,dx;$$

Удобно положить *dv = P(x)dx, u* – остальные сомножители.

- Интегралы вида:

$$\int e^{ax}\cdot \sin bx\,dx; \quad \int e^{ax}\cdot \cos bx\,dx$$

- интегралы, приводящиеся к исходному. За *u* можно принимать любой сомножитель.

$$\int \underbrace{(2x+1)}_{u}\,\underbrace{e^{2x}\,dx}_{dv} = \left|\begin{aligned} &u = 2x+1; \\ &dv = e^{2x}dx; \\ &du = (2x+1)'dx = 2dx \\ &v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}\right| =$$

$$= \underbrace{(2x+1)}_{u}\cdot\underbrace{0.5e^{2x}}_{v} - \int \underbrace{0.5e^{2x}}_{v}\,\underbrace{\cdot\, 2dx}_{du} =$$

$$= (x+0.5)e^{2x} - \int e^{2x}dx =$$

$$= (x+0.5)\,e^{2x} - 0.5e^{2x} + C = \boxed{x\,e^{2x} + C}$$

Метод интегрирования по частям

$$\mathrm{I} = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin 4x \, dx}_{dv} = \left| \begin{aligned} & u = e^x; \\ & dv = \sin 4x dx; \\ & du = (e^x)' dx = e^x dx \\ & v = \int dv = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \end{aligned} \right|$$

$$= e^x \cdot (-0.25 \cos 4x) - \int (-0.25 \cos 4x \cdot e^x) dx =$$

$$= -0.25 e^x \cos 4x + 0.25 \underbrace{\int \cos 4x \cdot e^x dx}_{\mathrm{I}_1}$$

$$\mathrm{I} = -0.25 e^x \cos 4x + 0.25 \mathrm{I}_1$$

$$\mathrm{I}_1 = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos 4x \, dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \\ dv = \cos 4x dx; \\ du = (e^x)' dx = e^x dx \\ v = \int dv = \int \cos 4x dx = \dfrac{1}{4} \sin 4x \end{array} \right|$$

$$= e^x \cdot 0.25 \sin 4x - \int 0.25 \sin 4x \cdot e^x dx =$$

$$= e^x \cdot 0.25 \sin 4x - 0.25 \cdot \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} = -0.25 e^x \cos 4x + 0.25(0.25 e^x \sin 4x - 0.25 \cdot \mathrm{I})$$

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{1}{17} e^x (\sin 4x - 4 \cos 4x)}$$