

Техническая механика

**Элементы сопротивления
материалов**

II. Сопротивление материалов

Н. М. БЕЛЯЕВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ
Элементы сопротивления материалов
МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАНИЕ ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведений*

Механика деформируемого твёрдого тела (МДТТ)

Сопротивление материалов

Теория упругости

Теория пластичности

Теория прочности

Теория надёжности

Теория устойчивости

Механика деформируемого твёрдого тела (МДТТ)

Деформация материала = изменение формы и размеров деформируемого тела при воздействии внешних силовых факторов.

Деформация – изменение взаимного положения частиц тела: результат изменения межмолекулярных расстояний или перегруппировки кристаллов

МДТТ: отличия от МАТТ

- Число степеней свободы
- Аналитические методы анализа, основанные на опыте (сопромат)
- Аналитические методы ТУиП
- Методы дискретизации и численные методы ТУиП (пластичность, ползучесть, вязкопластичность, динамика, прочность и др.)

Элементы сопротивления материалов

- 1 -

Сопромат

Задачи по обеспечению:

- нормальной работы элементов конструкции и всей конструкции в целом без риска разрушения:
 - выбора размеров и формы,
 - выбора материала,
- надёжности и экономии материала,
Динамика, оптимизация, новые материалы

Новые материалы



**Аэрогель – материал,
на 99,9% состоящий из воздуха**

Пример. Аэрогели

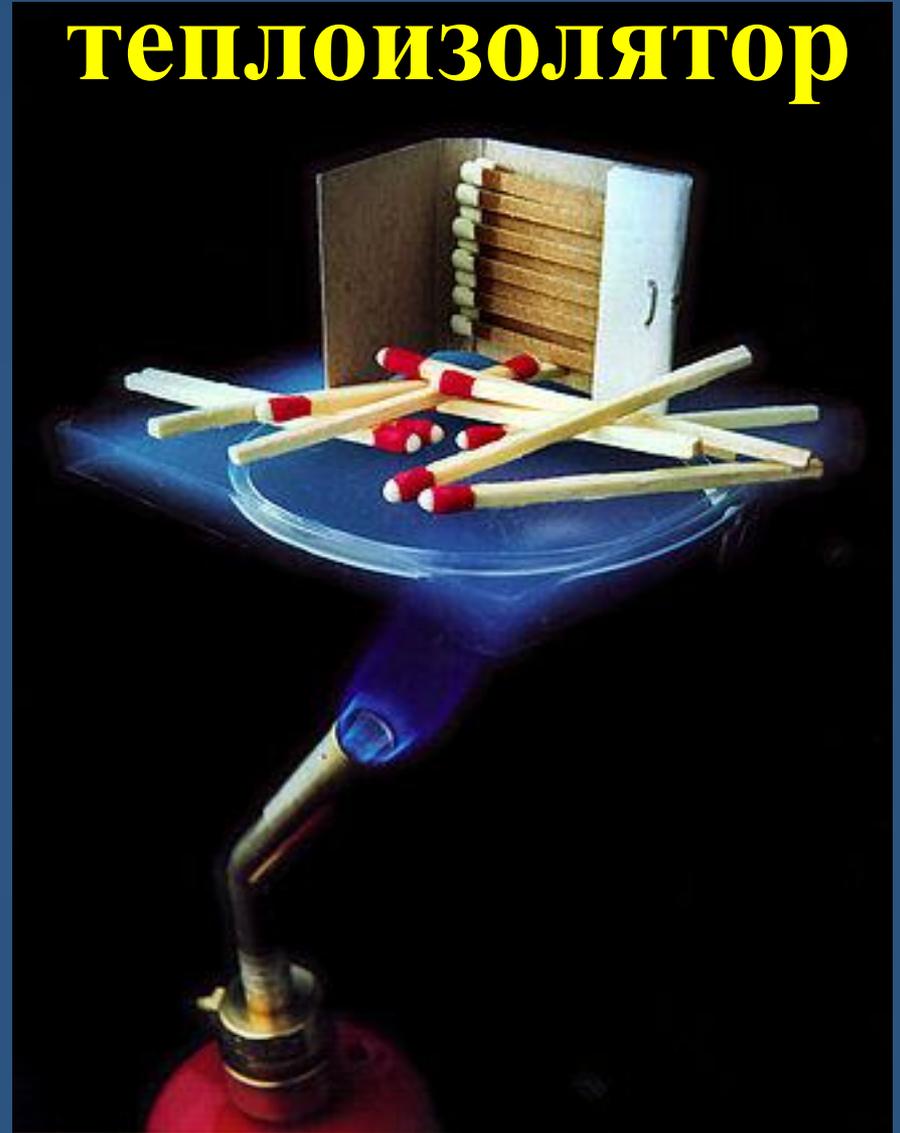
Гели – состоят из высокомолекулярных и низкомолекулярных веществ. Наличие трёхмерного полимерного каркаса (сетки, матрицы) даёт гелям механические свойства твёрдых тел: отсутствие текучести, способность сохранять форму, прочность и способность к деформации (пластичность и упругость)

Обладают рекордно низкой плотностью и имеют уникальные свойства: твёрдость, прозрачность, жаропрочность, чрезвычайно низкую теплопроводность. На ощупь лёгкая, но твёрдая пена, похожая на пенопласт

Аэрогель – теплоизолятор



Кирпич массой 2,5 кг
стоит на куске аэрогеля
массой 2,38 г



Классификация материалов

- кристаллические,
 - аморфные

- упругие,
 - пластические,
 - упругопластические,
 - хрупкие

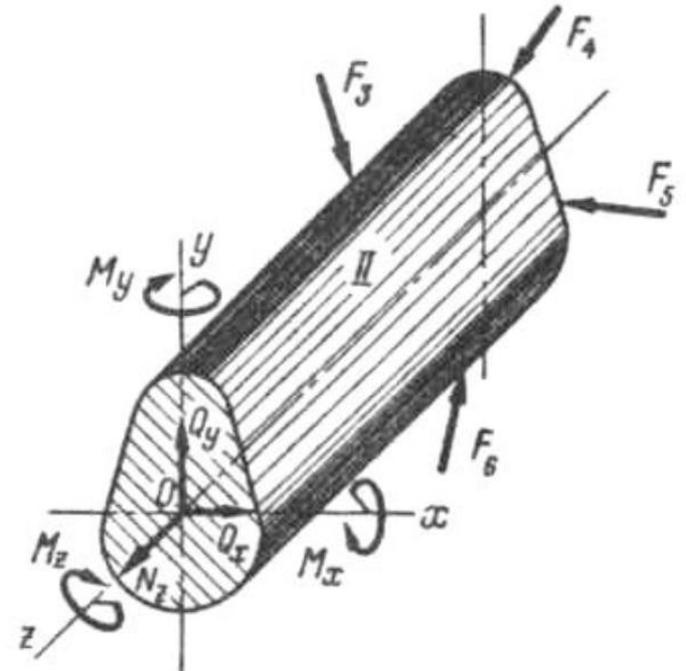
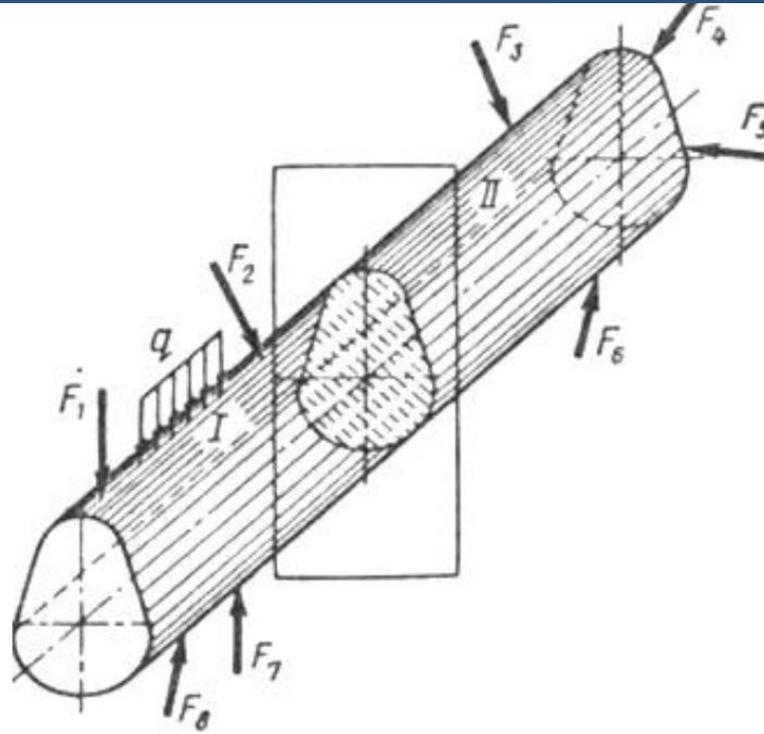
Классификация сил

- объёмные и поверхностные
 - контактные силы
 - сосредоточенные и распределённые
- постоянные и временные
 - ударные и повторно-переменные
- внезапно приложенные

Деформации и внутренние напряжения

- деформация,
- внутренние силы,
напряжения,
- метод сечений

Метод сечений



Допускаемые напряжения

$$[p] = p_{\text{в}} / k$$

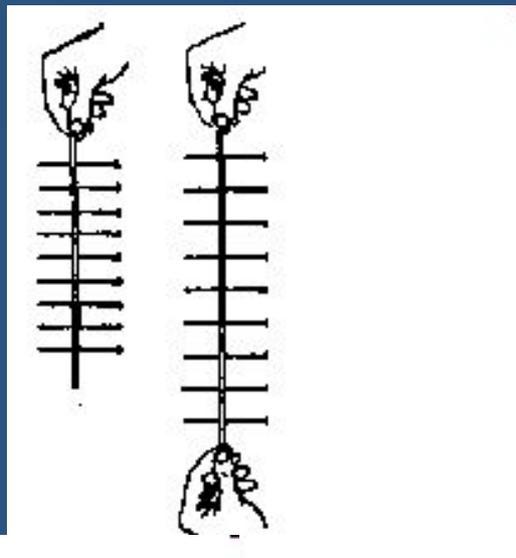
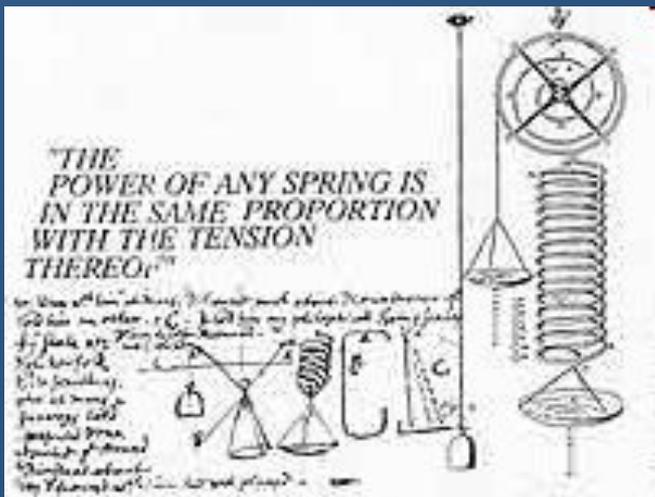
$[p]$ – допускаемые напряжения,
 k – коэффициент запаса
прочности,
 $p_{\text{в}}$ – предел прочности

План решения задач

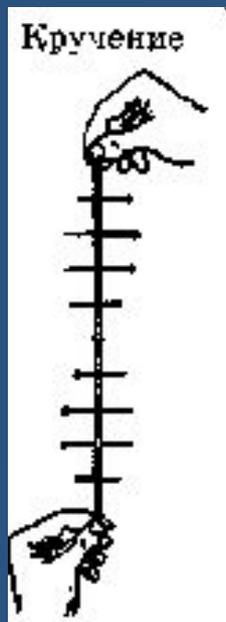
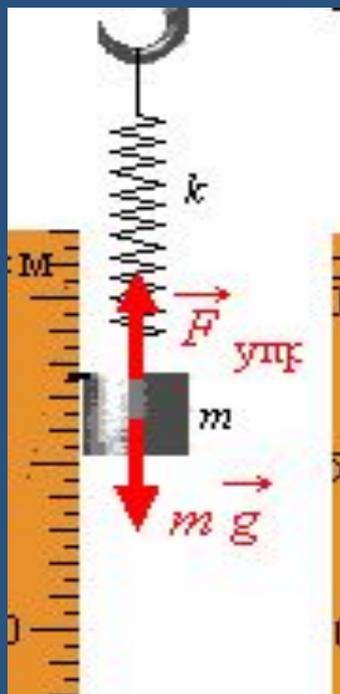
- определение величины и характера внешних сил,
- выбор материала,
- выбор параметров сечения,
- вычисление p_{max} ,
- проверка условия прочности:
$$p_{max} < [p],$$
- определение размеров и проверка их достаточности

Роберт Гук

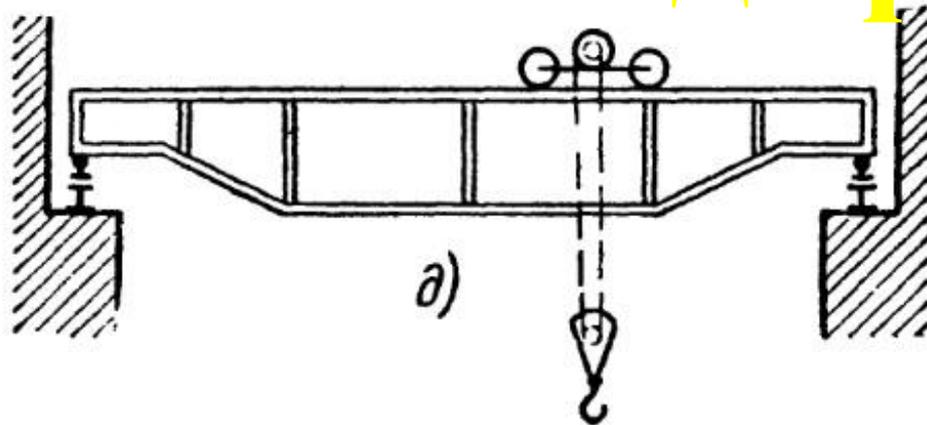
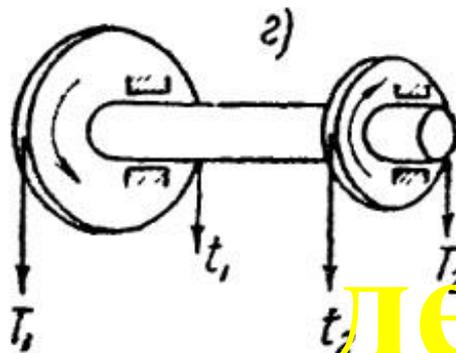
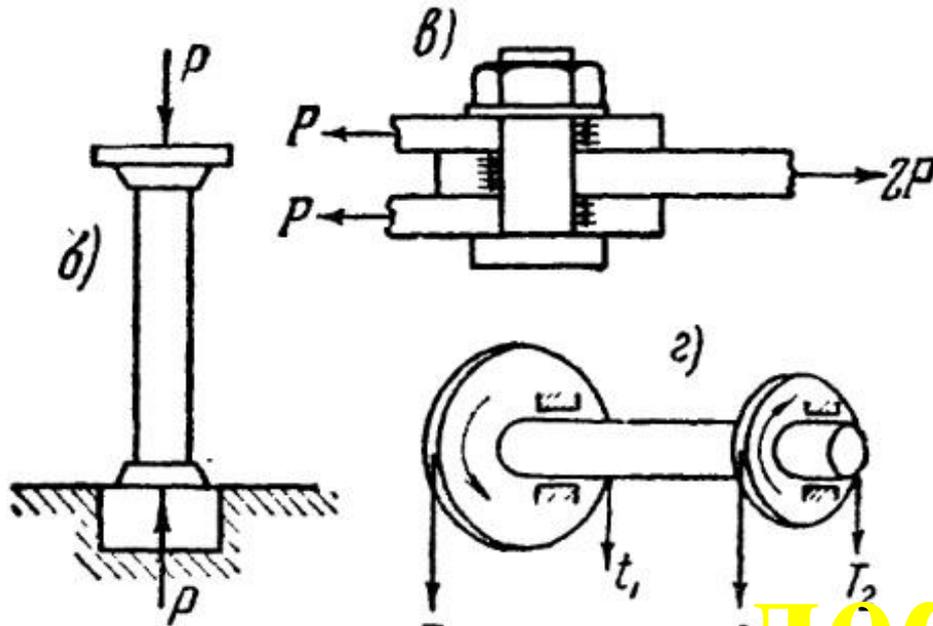
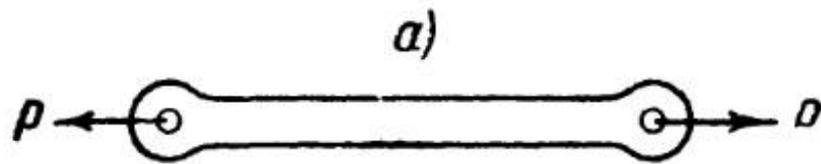
1635-1703



Robert Hooke



$$F_s = -kx$$



Виды деформаций

Растяжение- сжатие

Растяжение – сжатие



Растяжение – сжатие

Растяжение-сжатие - вид продольной деформации стержня или бруса, возникающий в том случае, если нагрузка к нему прикладывается по его продольной оси (равнодействующая сил, воздействующих на него, нормальна поперечному сечению стержня и проходит через его центр масс)

Растяжение – сжатие

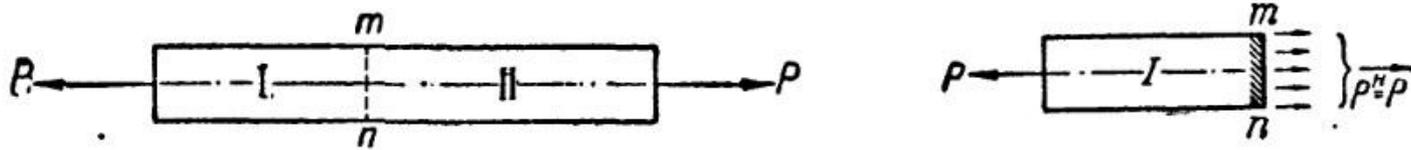
Одноосное или линейное напряжённое состояние. Может быть двух- и трёхосным.

Вызывается силами, приложенными к концам стержня, силами, распределёнными по объёму (силы инерции и тяготения).

Растяжение вызывает удлинение, сжатие вызывает укорочение стержня.

В поперечных сечениях бруса возникает один внутренний силовой фактор – нормальная сила

Растяжение-сжатие



$$\sigma = P/F$$

σ – нормальное напряжение,

P – растягивающая/сжимающая
сила,

F – площадь поперечного сечения

Условие прочности

$$\sigma = P/F \leq [\sigma]$$

σ – действительное напряжение,
 $[\sigma]$ – допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \sigma_B / k$$

σ_B – предел прочности,
 k – коэффициент запаса прочности

Предел прочности

$$\sigma_B = P_B / F$$

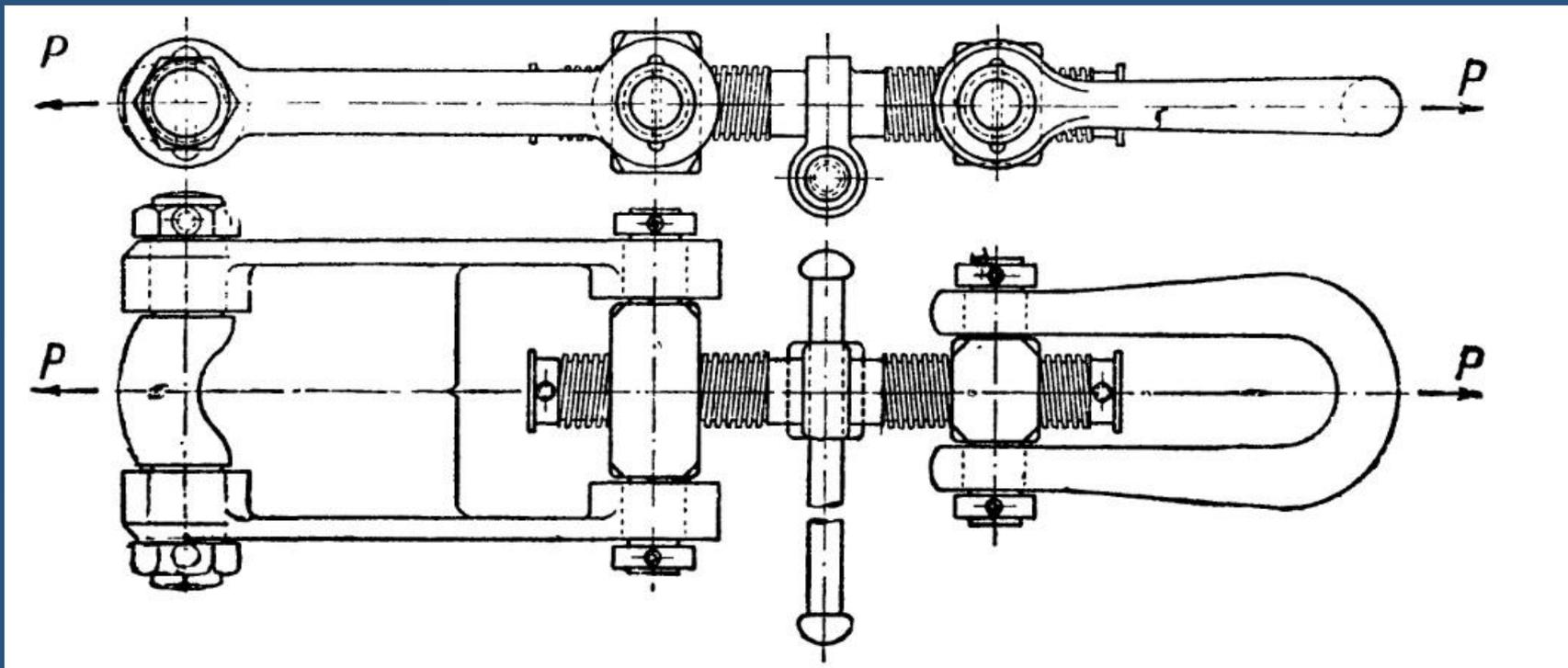
σ_B – предел прочности,

P_B – наибольшая нагрузка
до разрушения,

F – площадь поперечного сечения

Пример.

Стяжка ж/д вагонов



Стяжка ж/д вагонов

$$\text{ППр: } \sigma_B = 50 \text{ кг/мм}^2$$

$$\text{ПУпр: } \sigma_y = 0,6 \sigma_B$$

$$[\sigma] = 0,5 \cdot 0,6 \sigma_B = 0,3 \sigma_B$$

$$\Rightarrow \text{КЗан: } k = 1/0,3 = 3,33$$

$$\Rightarrow \text{ДопН: } [\sigma] = \sigma_B/k =$$

$$= 0,3 \cdot \sigma_B = 1500 \text{ кг/см}^2$$

Стяжка ж/д вагонов

$$P = 25 \text{ т} = 25\,000 \text{ кг}$$

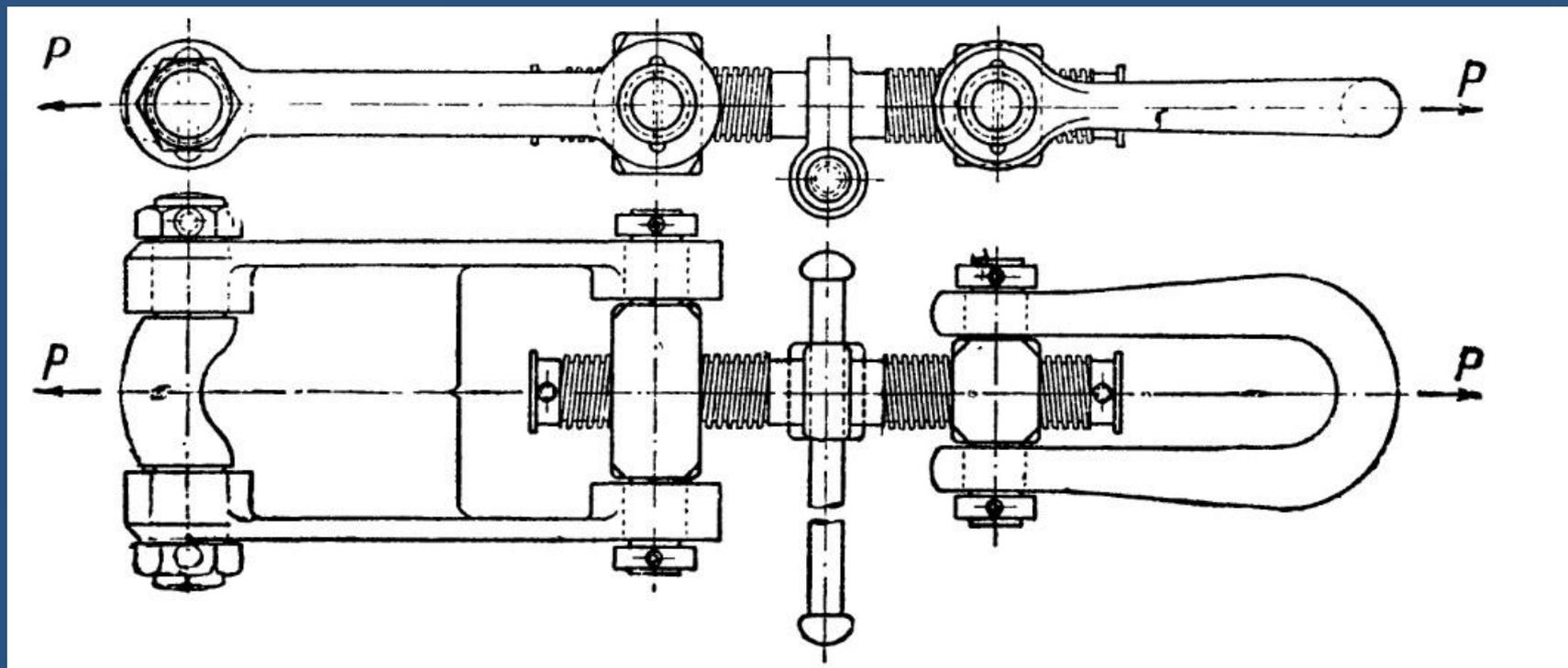
$$\begin{aligned} \text{ПСеч: } F &= P / [\sigma] \geq 25\,000 / 1\,500 \\ &= 16,7 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

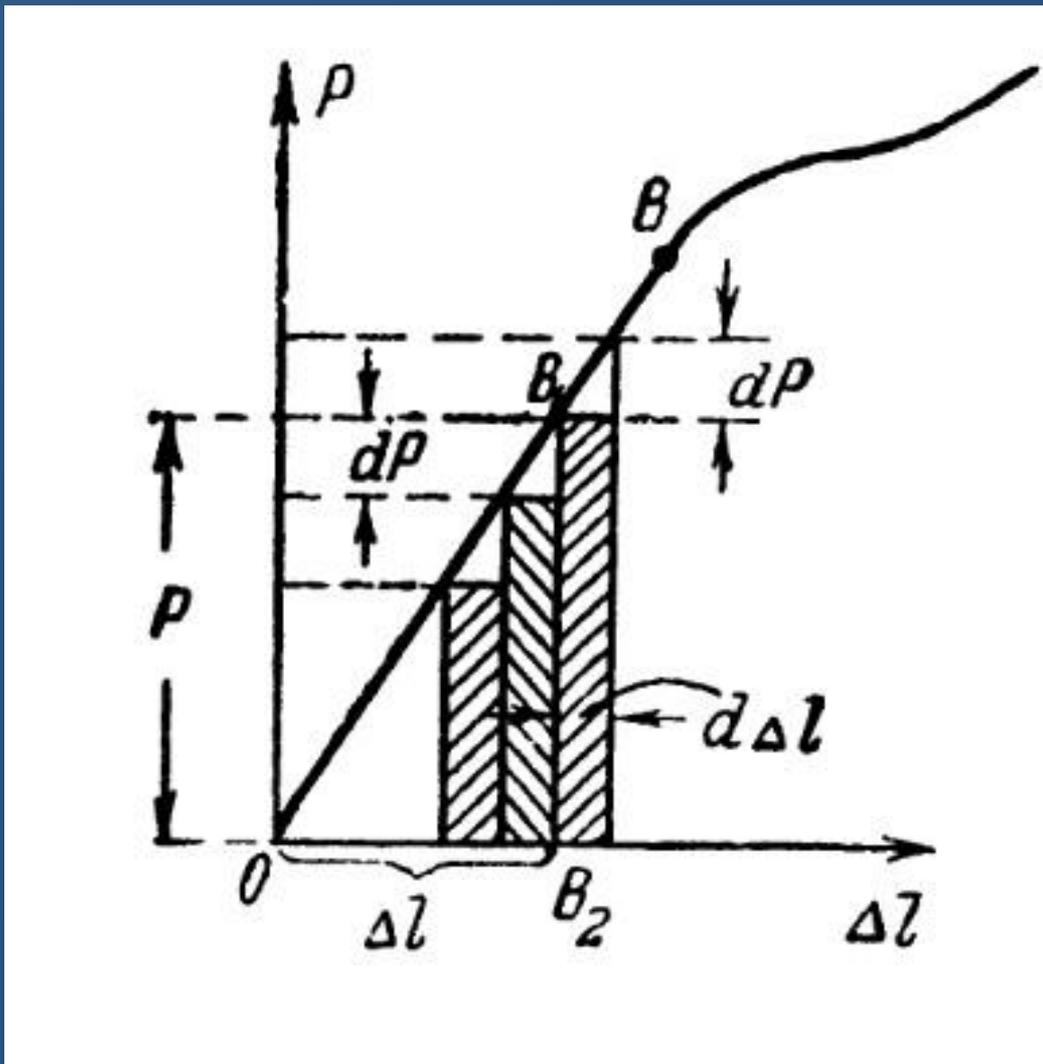
$$\pi d^2 / 4 = F \geq 16,7 \text{ см}^2$$

$$d \geq 4,55 \text{ см}$$

– диаметр по дну нарезки (резьбы)

Стяжка ж/д вагонов





Закон Гука

$$\Delta l / l = P / EF$$

E – модуль
упругости

$$\varepsilon = \Delta l / l$$

$$\Delta l = Pl / EF$$

$$\varepsilon = \sigma / E, \text{ или}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

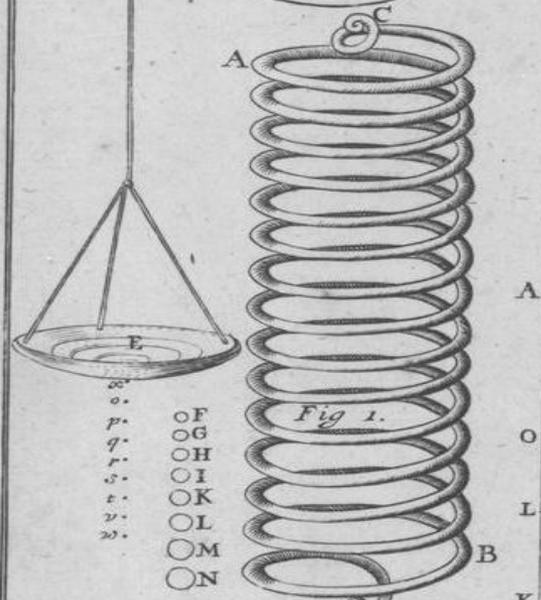
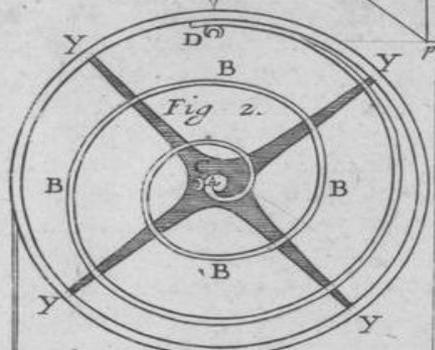
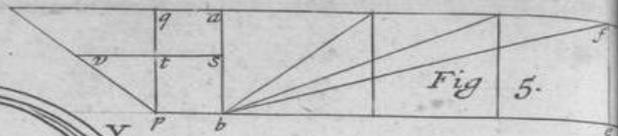
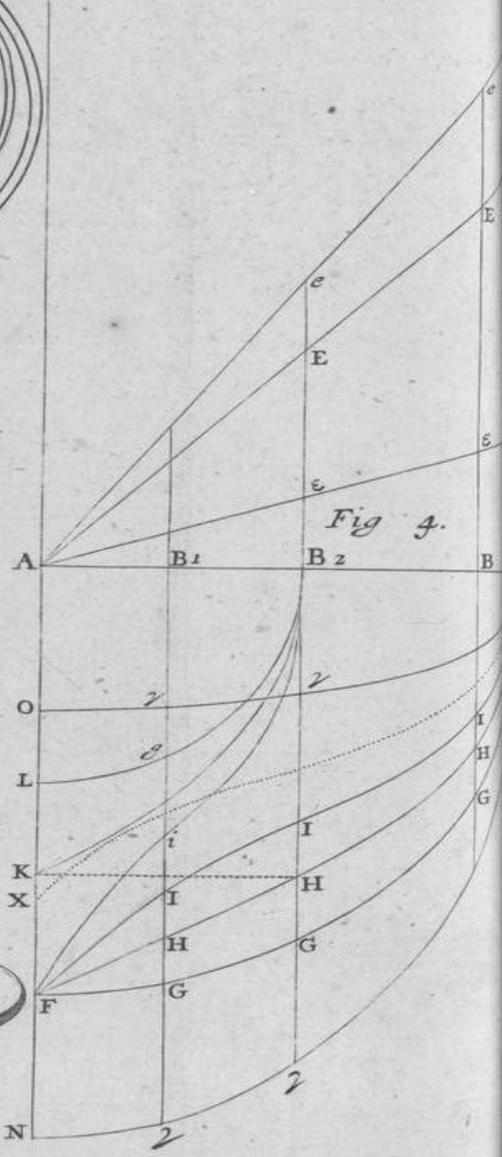


Fig 3.

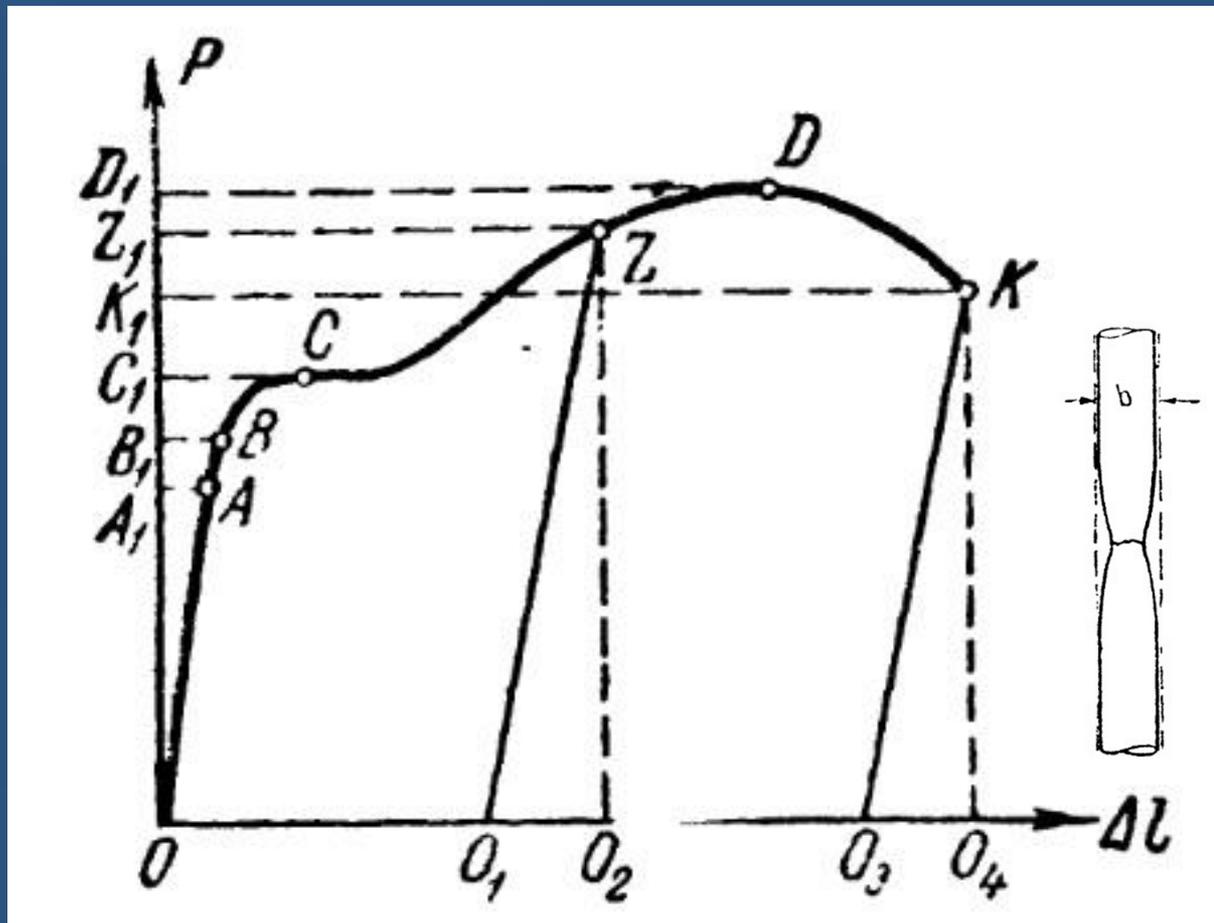


Закон Гука

Модуль упругости: $E = \sigma/\varepsilon$

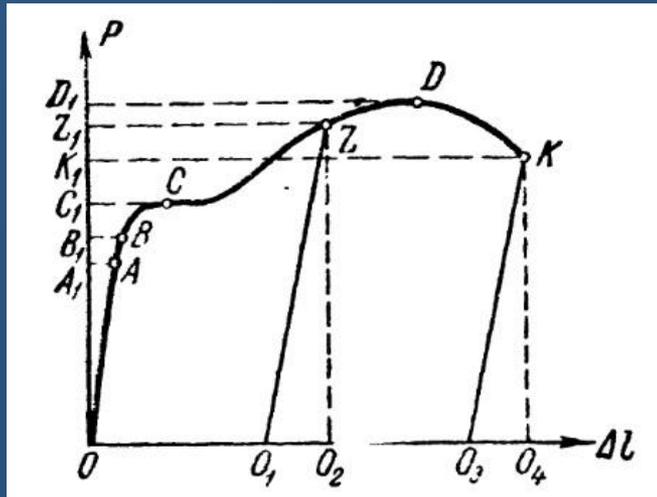
Наименование материала	E в миллионах кг/см ²
Сталь	2,0
Чугун (серый, белый)	1,15 ÷ 1,60
Медь и её сплавы (латунь, бронза)	1,0
Алюминий и дуралюмин	0,7
Каменная кладка:	
из гранита	0,09
› известняка	0,06
› кирпича	0,03
Бетон	0,10 ÷ 0,30
Дерево:	
вдоль волокон	0,1
поперёк волокон	0,005
Каучук	0,00008
Целлулоид	0,0193 ÷ 0,0174

Диаграмма растяжения



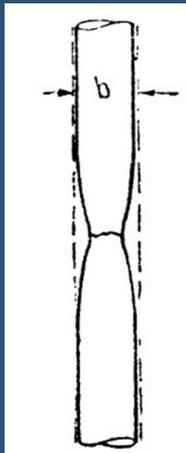
A1 – п.проп
B1 – п.упр
C1 – п.тек
K – разруш
Z1: OO_1 –
пласт. деф
D1 – п.проч

Диаграмма растяжения



O_3O_4 – упр разруш
 $OO_3 = \Delta l_0$ – пласт деф
 $\Delta l_0 / l$ – мера пласт
 $\delta = (\Delta l_0 / l) \cdot 100\%$ –
остат относит удлин

Эффект наклёпа



F_0 – первоначальная пл, F_1 – в разрыве

$$\psi = ((F_0 - F_1) / F_0) \cdot 100\%$$

– относительное сужение

Разрушение материала

Разрушение – заключительная стадия деформирования материала:

разделение материала на составные части.

С точки зрения структуры – разрыв межмолекулярных связей. Разрушение хрупкое и вязкое. При вязком – значительная пластическая деформация материала перед разрушением (глина, пластилин и др). При хрупком – пластическая деформация мала, а разрыв связей происходит сколом или отрывом (стекло, бетон и др). Реальные материалы сочетают одновременно оба вида разрушения, а подразделение на хрупкие или вязкие осуществляется по преобладающему механизму разрушения

Пример

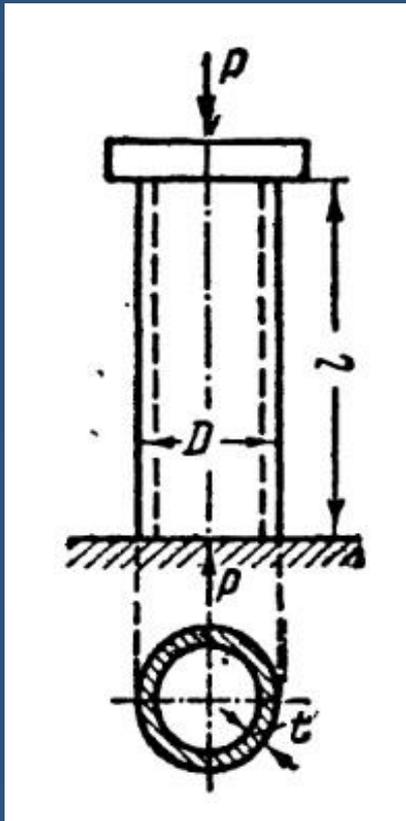
Трубчатая чугунная колонна (труба) с диаметром $D = 25 \text{ см}$ сжата силой $P = 50 \text{ т}$. Модуль упругости чугуна

$$E = 1\,200\,000 \text{ кг/см}^2$$

Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma] = 300 \text{ кг/см}^2$, длина колонны $l = 3,5 \text{ м}$

Определить:

- 1) толщину стенок колонны
- 2) её абсолютное укорочение

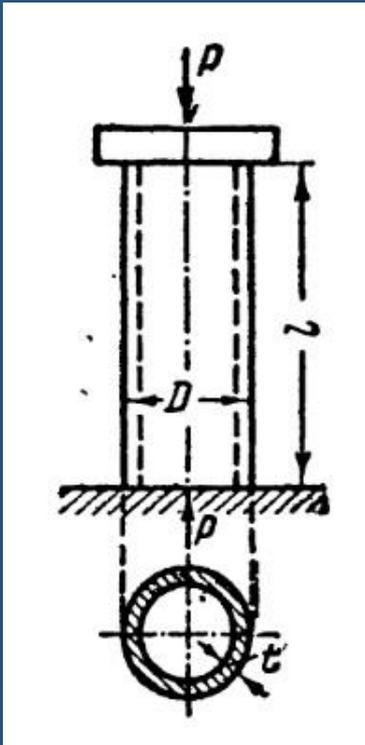


$$F \geq P / [\sigma] = 50\,000 / 300 \approx 167 \text{ cm}^2$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi}} \approx 20,2 \text{ cm}$$

$$h = (D - d) / 2 = 2,5 \text{ cm}$$



$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi}} \approx 20,2 \text{ cm}$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2) \approx 177 \text{ cm}^2$$

$$\Delta l = Pl / EF = 50\,000 \cdot 350 / (177 \cdot 120\,000\,000) \approx 0,8 \text{ (mm)}$$

Коэффициент

поперечной деформации

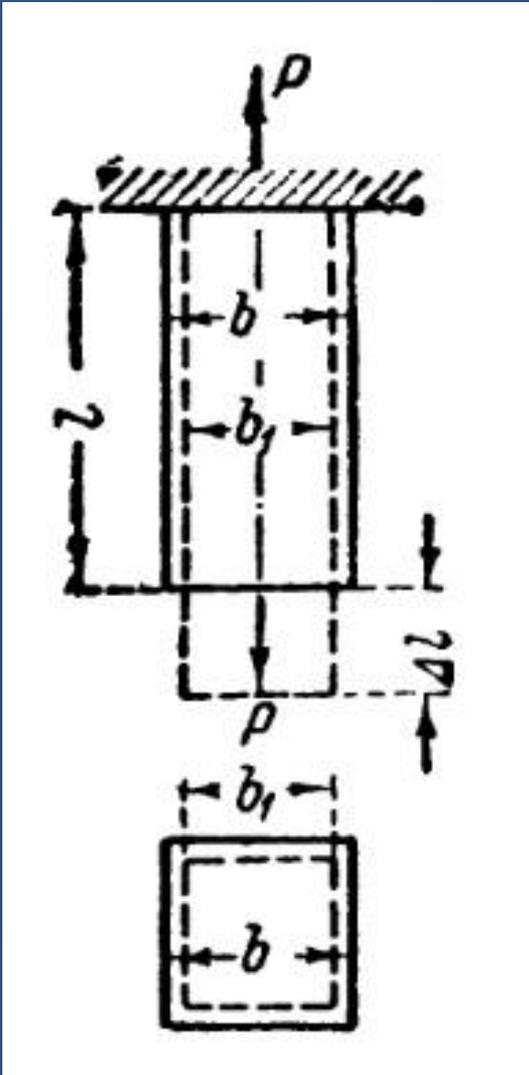
$$\varepsilon = \Delta l / l$$

$$\varepsilon_1 = \Delta b / b$$

$$\mu = \varepsilon_1 / \varepsilon \quad \varepsilon_1 = \mu \varepsilon$$

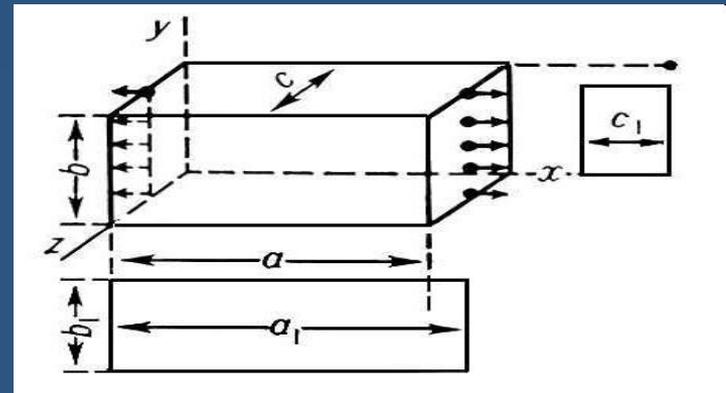
μ – коэффициент

поперечной деформации,
коэффициент Пуассона



Симеон Дени Пуассон

Poisson, 1781- 1840



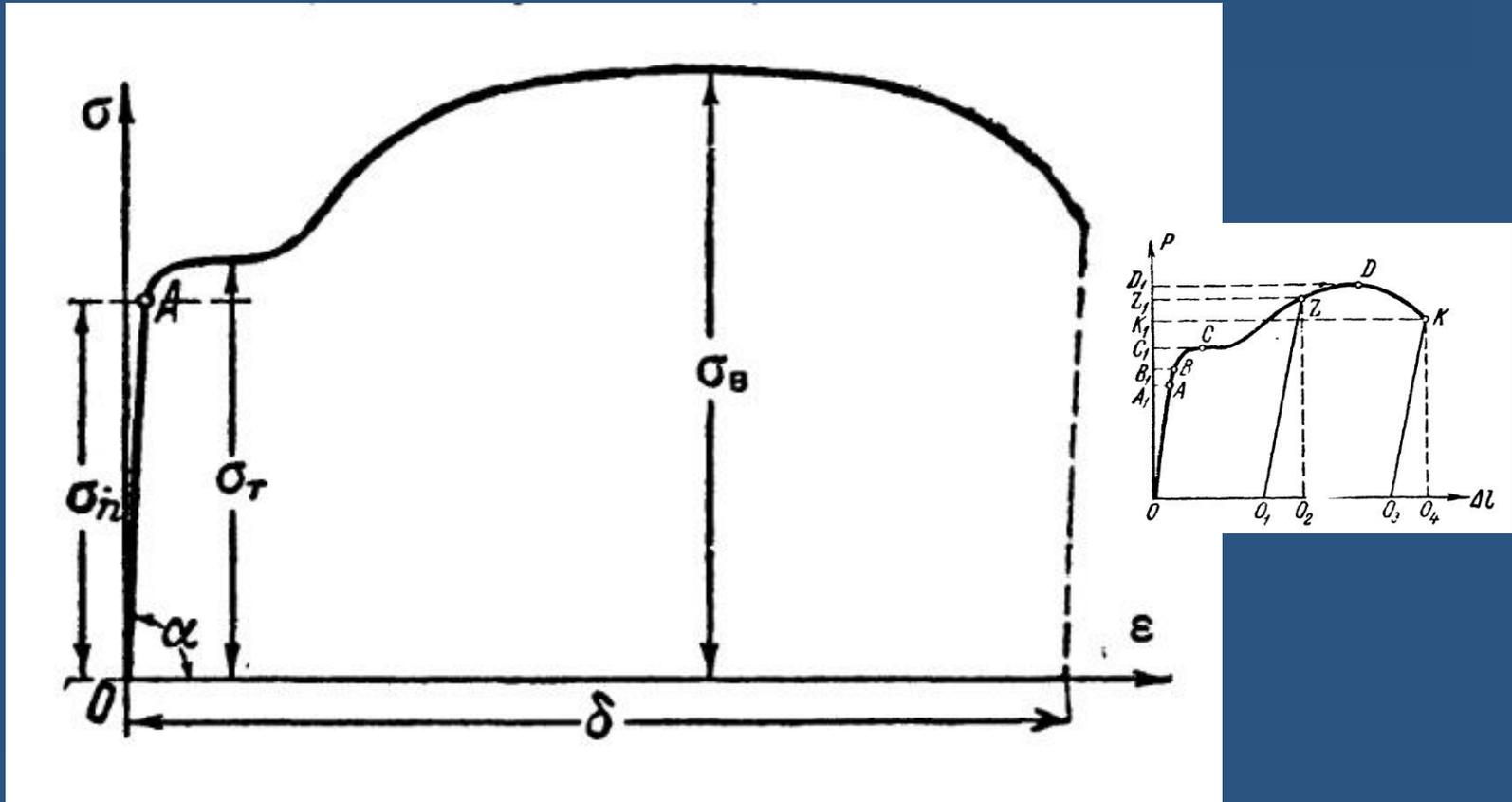
$$n = - e_{\text{trans}} / e_{\text{longitudinal}}$$

Коэффициент поперечной деформации

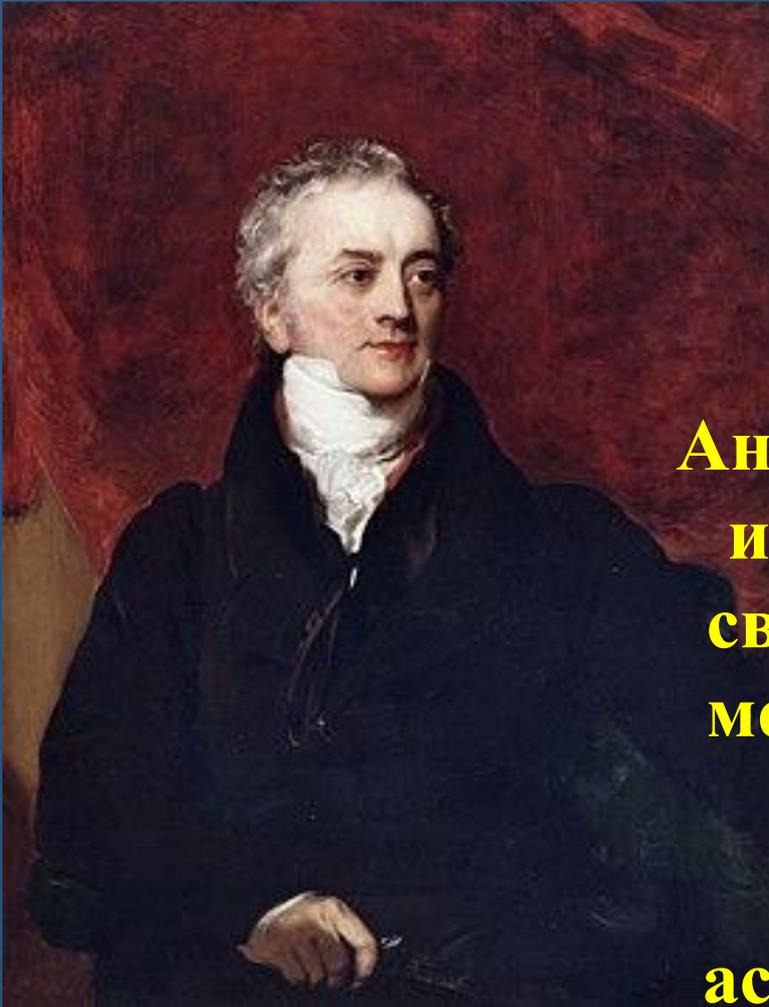
Значения коэффициента поперечной деформации.

Название материала	μ	Название материала	μ
Сталь	0,25 — 0,33	Золото	0,42
Медь	0,31 — 0,34	Серебро	0,39
Бронза	0,32 — 0,35	Стекло	0,25
Чугун	0,23 — 0,27	Камни	0,16 — 0,34
Свинец	0,45	Бетон	0,08 — 0,18
Латунь	0,32 — 0,42	Каучук	0,47
Алюминий	0,32 — 0,36	Пробка	0,00
Цинк	0,21	Фанера	0,07
		Целлулоид	0,39

Диаграмма напряжения–деформации



$$E = \operatorname{tg} \alpha = \sigma / \varepsilon \text{ – модуль Юнга}$$



Томас Юнг

1773-1829

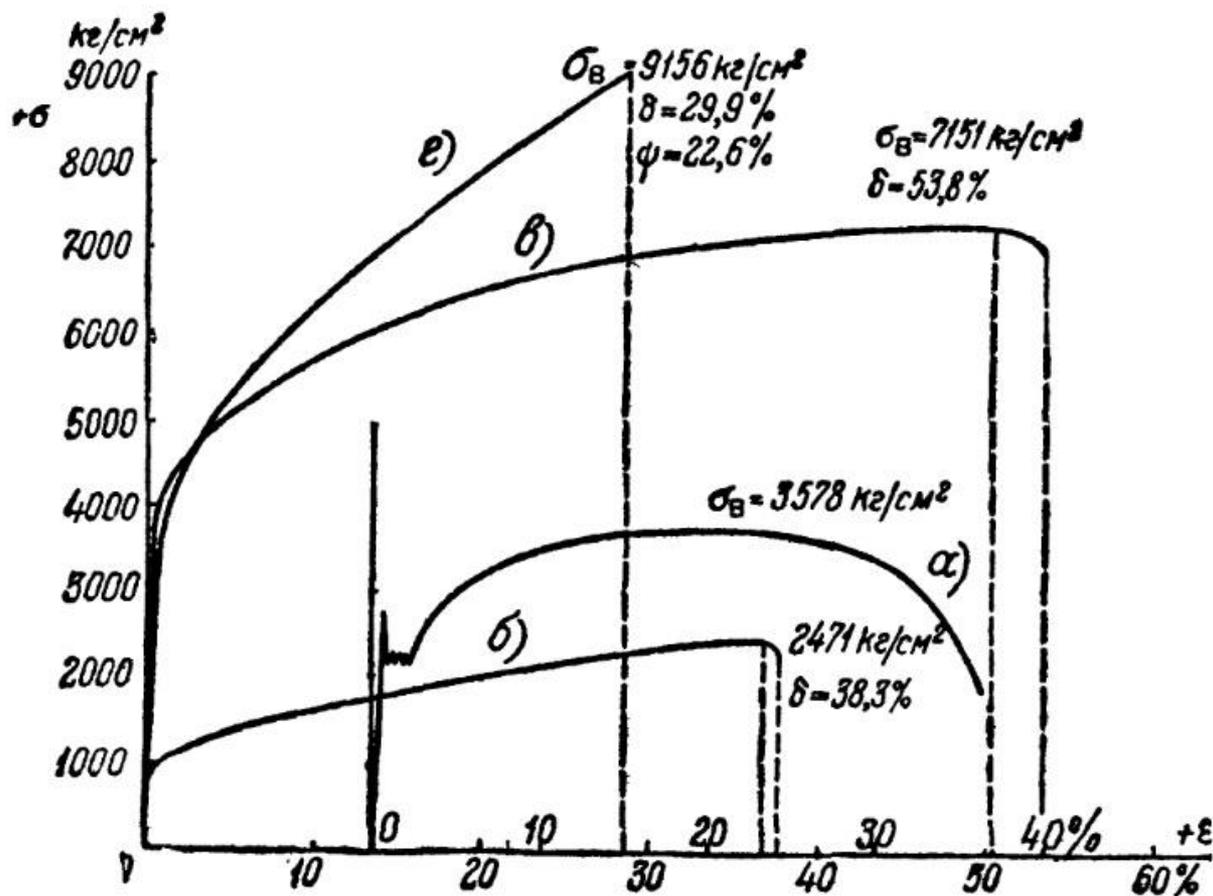
Английский учёный, физик (один из создателей волновой теории света, механик (вводит понятия механической энергии и модуля упругости), врач (впервые описывает астигматизм), астроном, филолог и востоковед (вводит понятие «индоевропейские языки»).

Полиглот – владеет 13 языками

$$E = \sigma / \varepsilon$$

Диаграммы материалов

Некоторые сорта стали (специальные), медь, бронза не имеют площадки текучести. Прямая часть диаграммы переходит непосредственно в криволинейную. Для примера диаграммы напряжений литой стали (а), бронзы (б), никелевой стали (в) и марганцевой стали (г) показаны на фиг. 24.



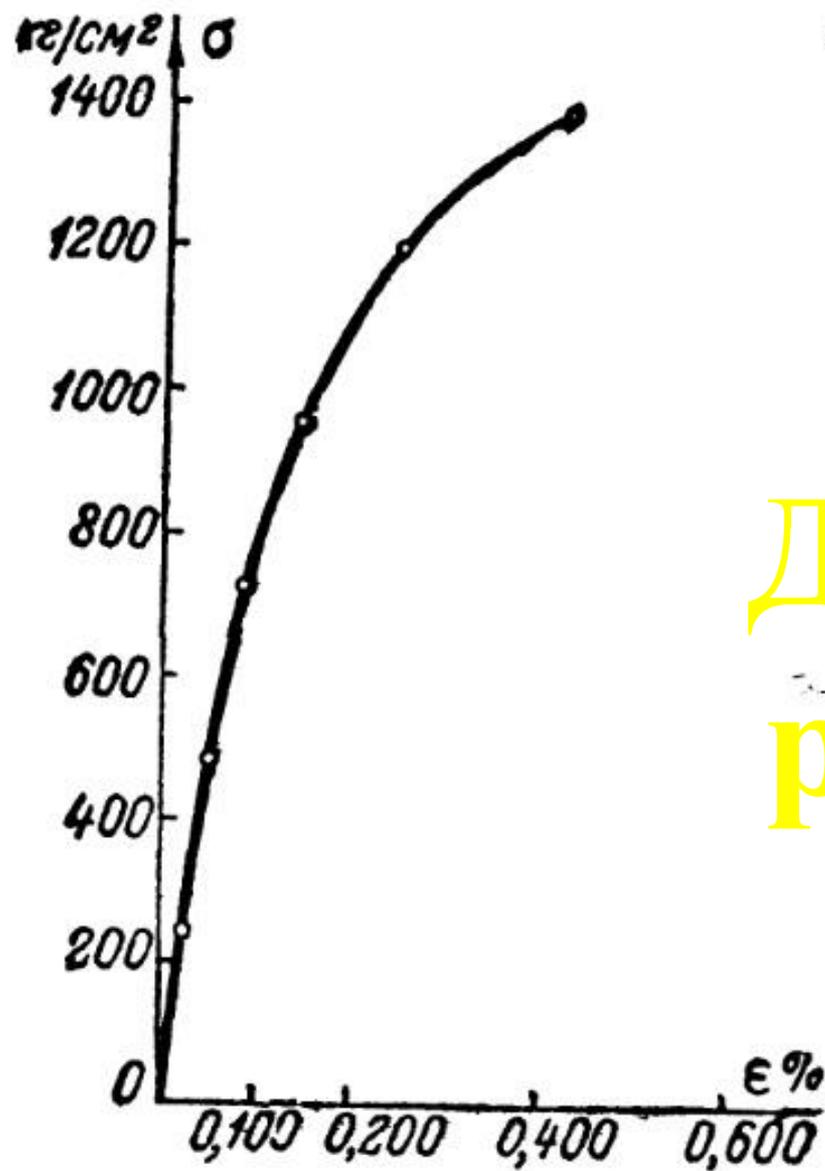


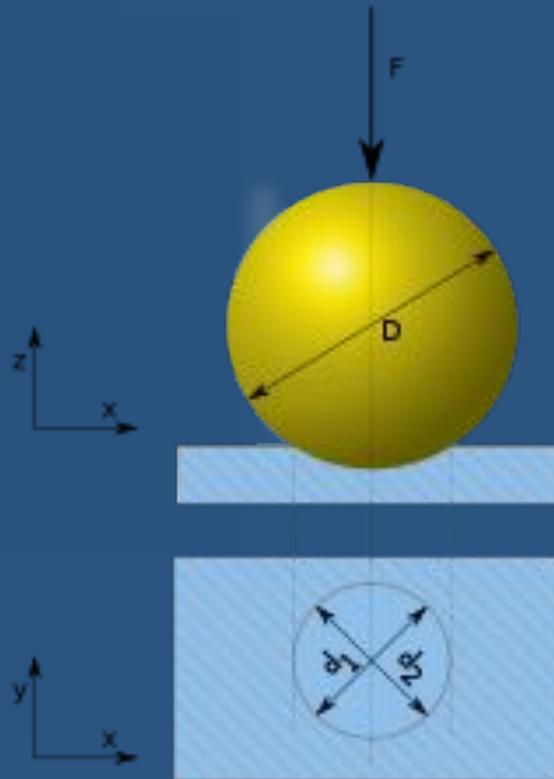
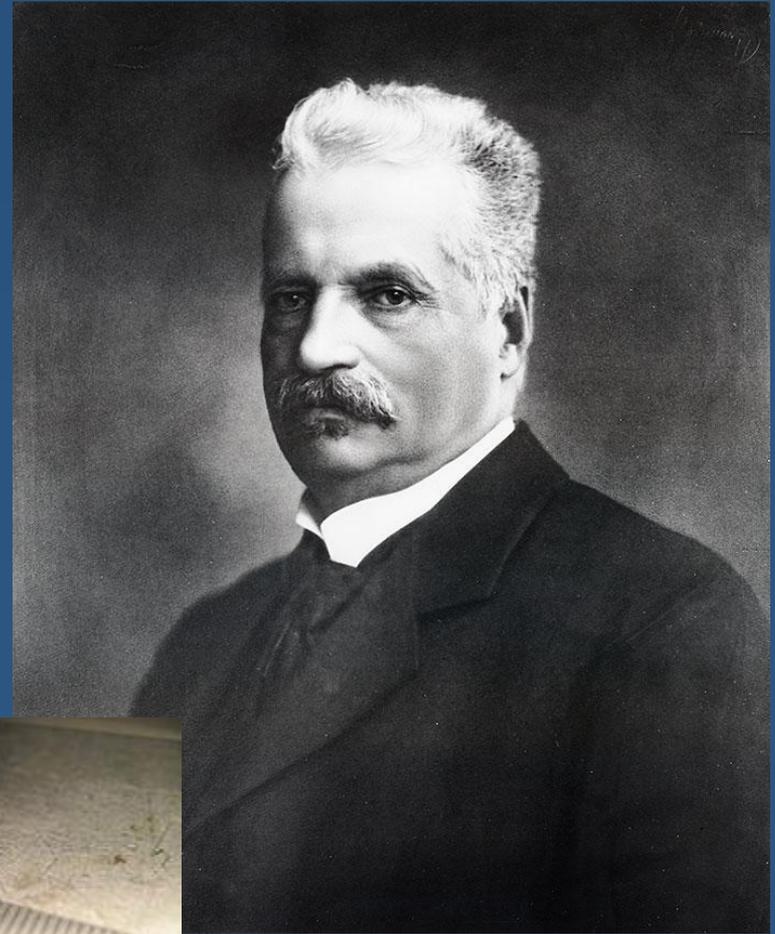
Диаграмма
растяжения
чугуна

Предел прочности

Пределы прочности в кг/см².

Наименование материала	При растяжении	При сжатии
Сталь для конструкций (в мостах, зданиях)	3 800 — 4 200	—
Сталь машиноподелочная (углеродистая) .	3 200 — 8 000	—
Рельсовая сталь	7 000 — 8 000	—
Специальные стали для машиностроения .	7 500 — 19 000	—
Чугун (серый)	1 700 — 2 500	6 000 — 10 000
Сплавы меди (латунь, бронза)	2 200 — 5 000	—
Дерево (сосна)	800	400
Естественные камни	—	100 — 5 000
Бетон	—	50 — 350

Юхан Август
Бринелль
1849-1925
Шведский инженер



Металлург,
автор метода (1900)
определения твёрдости

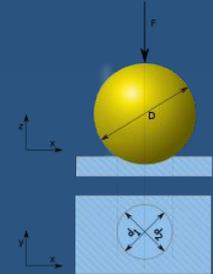
Предел прочности

Число твёрдости по Бринеллю

$$F \geq F / [\sigma] = 50\,000 / 300 \approx 167 \text{ см}^2$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi}} \approx 20,2 \text{ см}$$



$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2) \approx 177 \text{ см}^2$$

$H_B = HBW$ – число твёрдости по Бринеллю

P – вдавливающая сила

D – диаметр индентора, d – диаметр отпечатка, h – глубина отпечатка

Для малоуглеродистой стали

$$\sigma_B \approx 0,36 H_B$$

σ_B – предел прочности

Допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \sigma_v / k$$

$[\sigma]$ – допускаемые напряжения,
 k – коэффициент запаса
прочности,

σ_v – предел прочности

Допускаемые напряжения

Наименование материала	Допускаемое напряжение в кг/см ²	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках	280—800	1200—1500
Сталь ОС и ст. 2		1400
Сталь ст. 3		1600
Сталь ст. 3 в мостах		1400
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении		600—2500
Сталь легированная конструкционная в машиностроении		1000—4000 и выше
Медь		300—1200
Латунь		700—1400
Бронза		600—1200
Алюминий		300— 800
Алюминиевая бронза		800—1200
Дюралюмин		800—1500
Текстолит		300— 400
Гетинакс		500— 700
Бакелизованная фанера		400— 500
Сосна вдоль волокон	70—100	100—120
Сосна поперёк волокон	—	15— 20
Дуб вдоль волокон	90—130	130—150
Дуб поперёк волокон	—	20— 35
Каменная кладка	до 3	4— 40
Кирпичная кладка	до 2	6— 25
Бетон	1—7	10— 90

Выбор коэффициента запаса

Коэффициенты запаса.

Характер нагрузки	Состояние материала	k_B
1. Статическая нагрузка } 2. Ударная нагрузка 3. Переменная нагрузка (растяжение-сжатие одинаковой величины)	Пластичный материал Хрупкий материал Пластичный материал Пластичный материал (сталь)	$2,4 \div 2,6$ $3,0 \div 9,0$ $2,8 \div 5,0$ $5,0 \div 15,0$

k – коэффициент запаса прочности

Для справки:

Сталь ОС: Сталь для рельсового транспорта (оси локомотивов, вагонов и т.п.)

Сталь ст2: углеродистая сталь обыкновенного качества для неответственных деталей повышенной пластичности или глубокой вытяжки, малонагруженных элементов сварных конструкций

Сталь ст3: углеродистая сталь обыкновенного качества (трубы и т.п.)

Сталь легированная содержит элементы, обеспечивающие требуемые свойства. Добавки повышают прочность, коррозионную стойкость, снижают опасность хрупкого разрушения: хром, никель, медь, ванадий, титан, азот и др.

Сложные случаи растяжения-сжатия

- Составные стержни
 - из различных материалов
- Динамическое нагружение
- Температурные напряжения
- Циклическое нагружение
- Учёт собственного веса
- Учёт пластической деформации и ползучести
 - Учёт эффектов разрушения

Виды напряжённого состояния

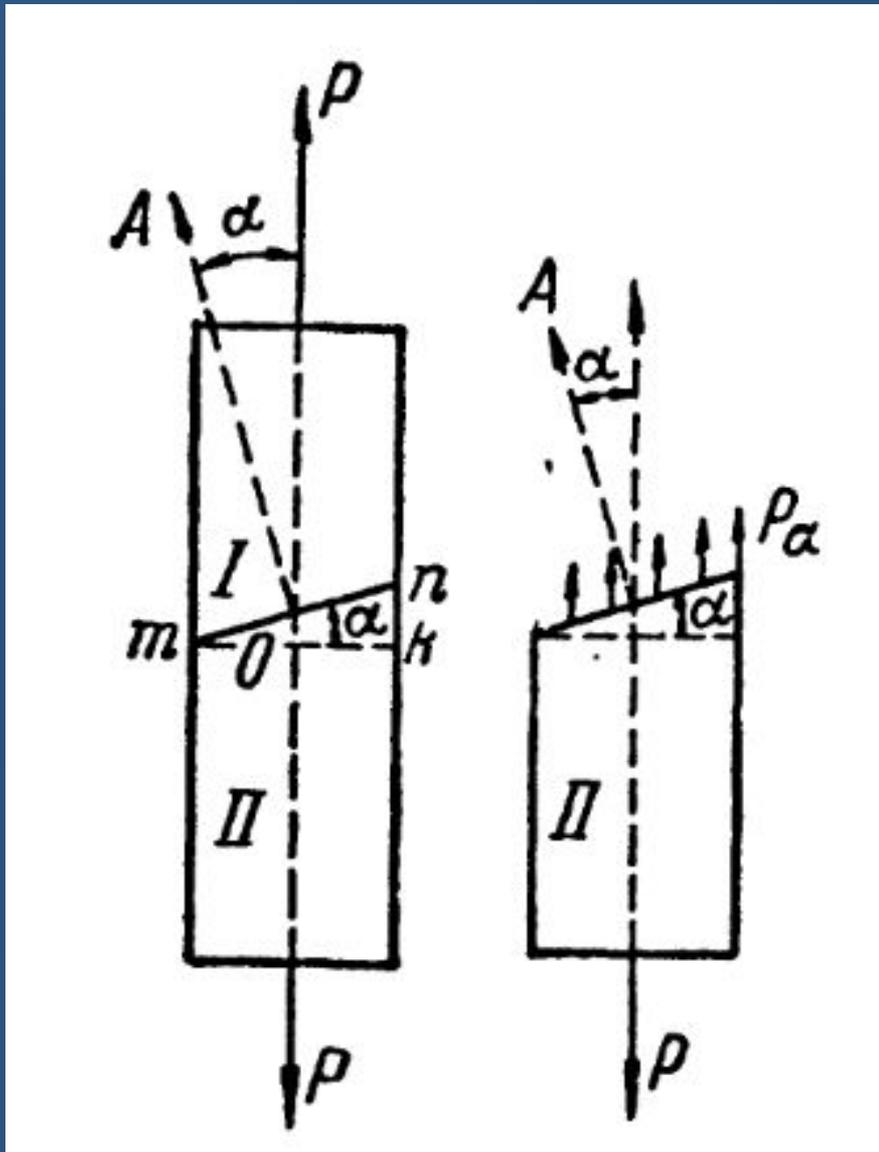
1) *объёмное напряжённое состояние* — когда все три главных напряжения *не равны* нулю (например, случай растяжения или сжатия по трём взаимно перпендикулярным направлениям);

2) *плоское напряжённое состояние* — когда одно главное напряжение равно нулю (случай растяжения или сжатия по двум направлениям);

3) *линейное напряжённое состояние* — когда два главных напряжения равны нулю (случай растяжения или сжатия в одном направлении).

**Напряжения
по наклонным
сечениям**

Напряжения



по наклонным
сечениям

σ_0 – в сечении mk

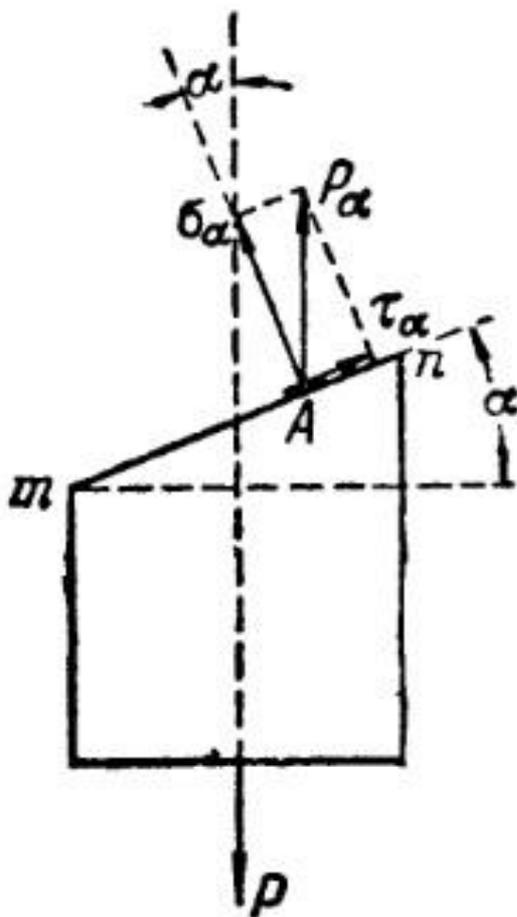
$$\sigma_0 = P / F_0$$

$$P_\alpha = P / F_\alpha$$

$$F_\alpha = F_0 / \cos \alpha$$

$$P_\alpha = P \cdot \cos \alpha / F_0 = \\ = \sigma_0 \cos \alpha$$

Нормальные и касательные напряжения



$$\vec{P}_\alpha = \vec{\sigma}_\alpha + \vec{\tau}_\alpha$$

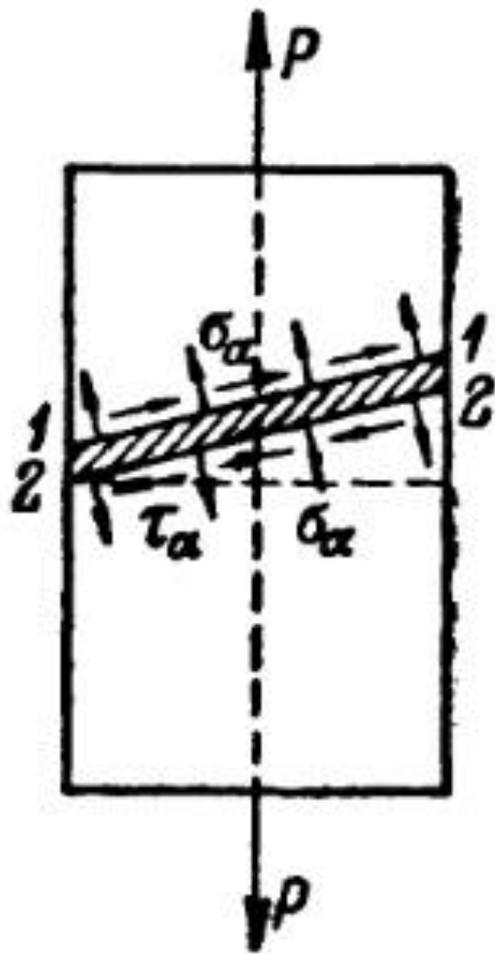
$$P_\alpha = \sigma_0 \cos \alpha$$

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= P_\alpha \sin \alpha = \\ &= \sigma_0 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= 0,5 \sigma_0 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

(1)

Максимальные нормальные и касательные напряжения



Соотношения (1):

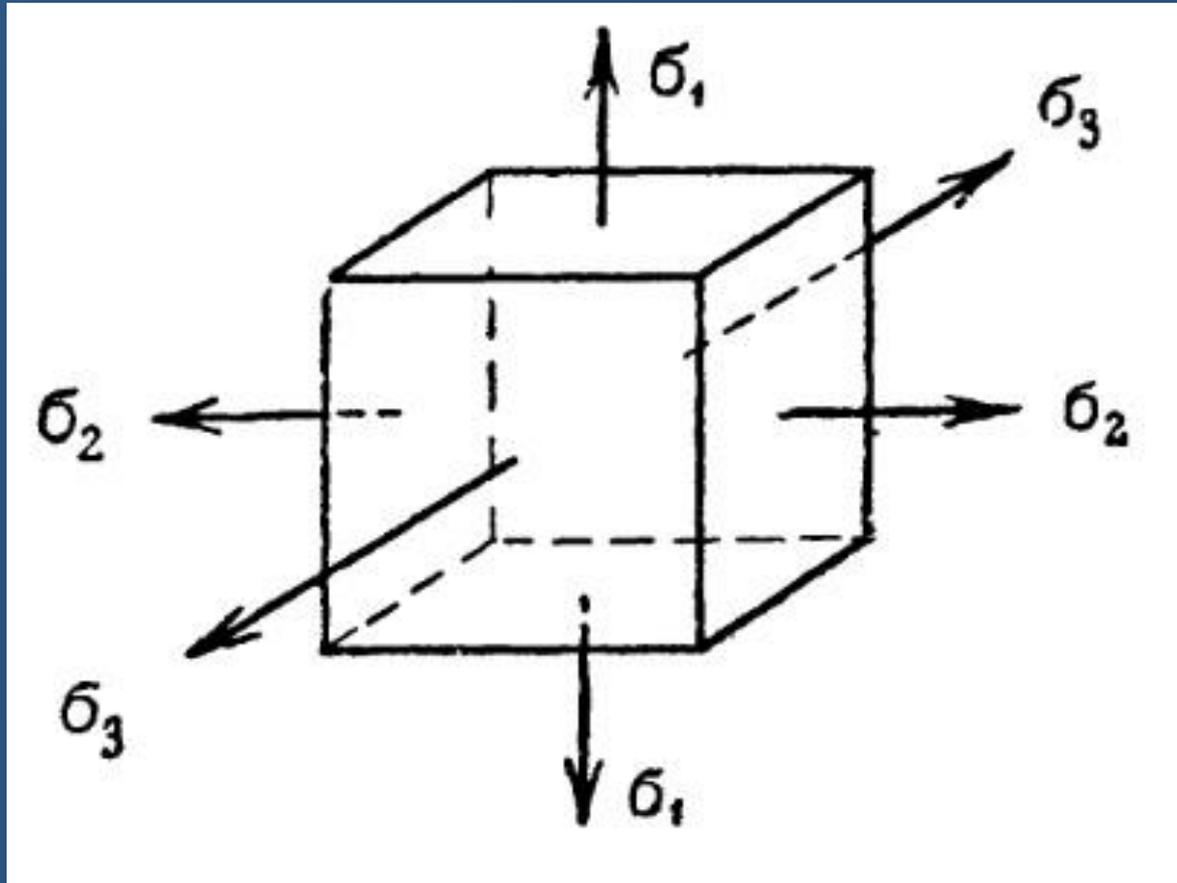
$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = 0,5 \sigma_0 \sin 2\alpha$$

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_0 = P/F_0$$

$$\max \tau_\alpha = 0,5 \sigma_0$$

Главные напряжения

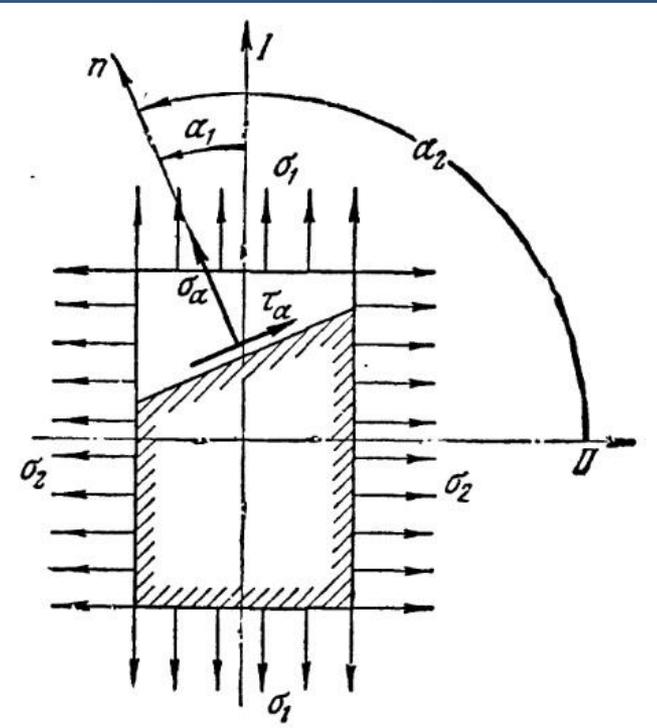


Главные
нормальные
напряжения
на площадках,
если
отсутствуют все
касательные
напряжения

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

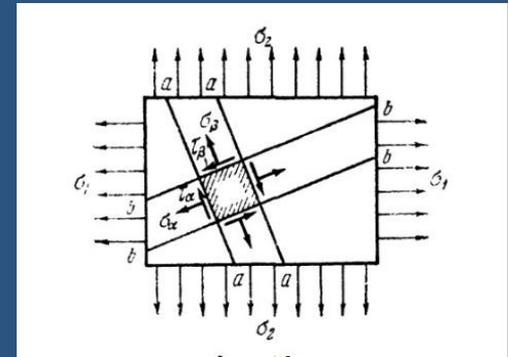
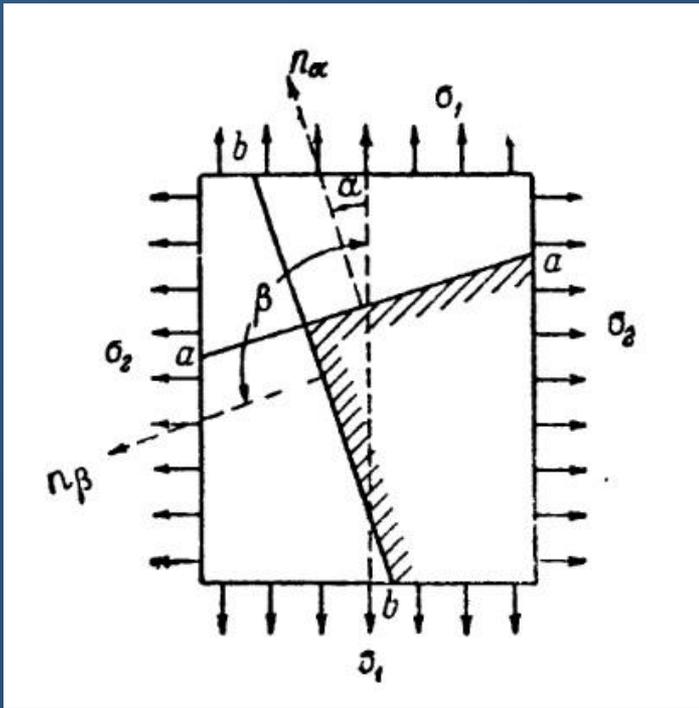
Плоское напряжённое состояние

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad \sigma_3 = 0$$


$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 (\alpha_1 + 90^\circ)$$
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1 \quad (2.1)$$

$$\tau_\alpha = 0,5 (\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2\alpha_2)$$
$$\tau_\alpha = 0,5 (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha_1 \quad (2.2)$$

Плоское напряжённое состояние



$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_3 = 0$$

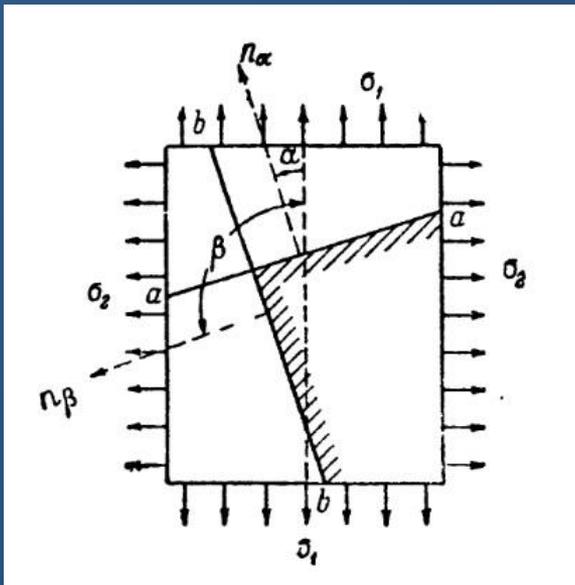
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \beta_1 + \sigma_2 \cos^2 \beta_2 = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^\circ)$$

$$\boxed{\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha} \quad (3.1)$$

$$\tau_\beta = 0,5 (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\beta = 0,5 (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin(2\alpha + 180^\circ)$$

$$\boxed{\tau_\beta = -0,5 (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha} \quad (3.2)$$

Плоское напряжённое состояние



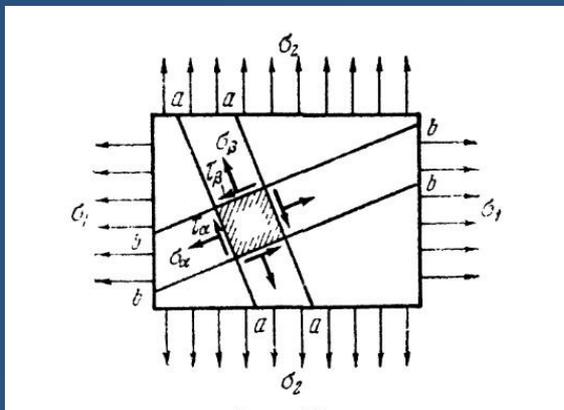
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad \sigma_3 = 0$$

Сумма нормальных напряжений по любым двум ортогональным площадкам постоянна и равна сумме главных напряжений (2.1)+(3.1):

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const} \quad (4.1)$$

Закон парности касательных напряжений (2.2)+(3.2):

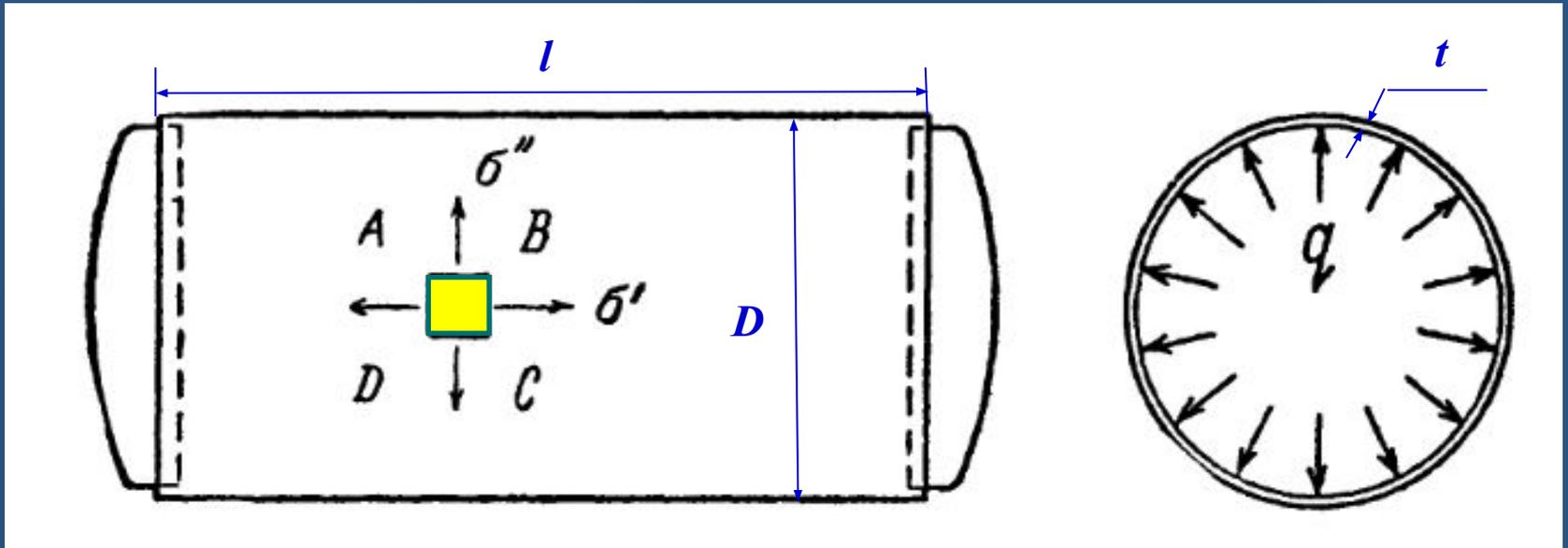
$$\tau_\beta = -\tau_\alpha \quad (4.2)$$



Задача

Котёл под давлением

Пример. Котёл под давлением



q [кг/см²], σ' и σ'' – ?

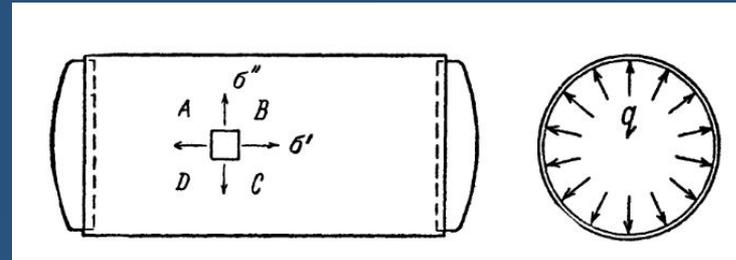
D – диаметр цилиндрической части,

l – длина, t – толщина стенок

(t мало по сравнению с D)

Пример

1) σ' - ?



Силы, действующие на торцевые крышки (днища) и растягивающие цилиндрическую часть вдоль образующей:

$$P = q \cdot \pi D^2 / 4$$

Кольцо толщиной t и длиной πD (t малò по сравнению с D)

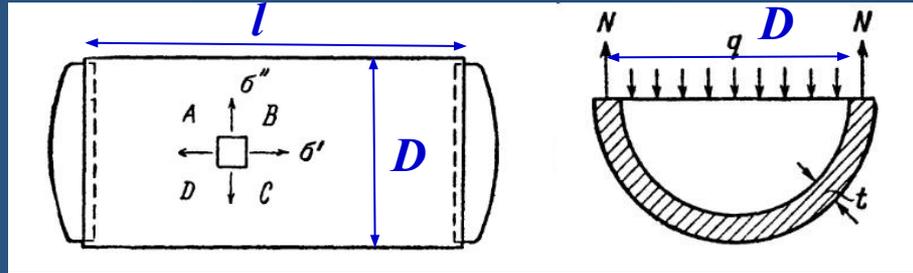
Площадь кольца:

$$F = t \cdot \pi D$$

$$\sigma' = P/F = q\pi D^2 / (4 \cdot \pi D \cdot t) = qD / (4t)$$

Пример

2) σ'' - ?



Половина
торца
цилиндра

Площадь прямоугольного сечения, проходящего через ось симметрии котла: $D \cdot l$. Равновесие:

$$q \cdot D l = 2N \Rightarrow N = q \cdot D l / 2$$

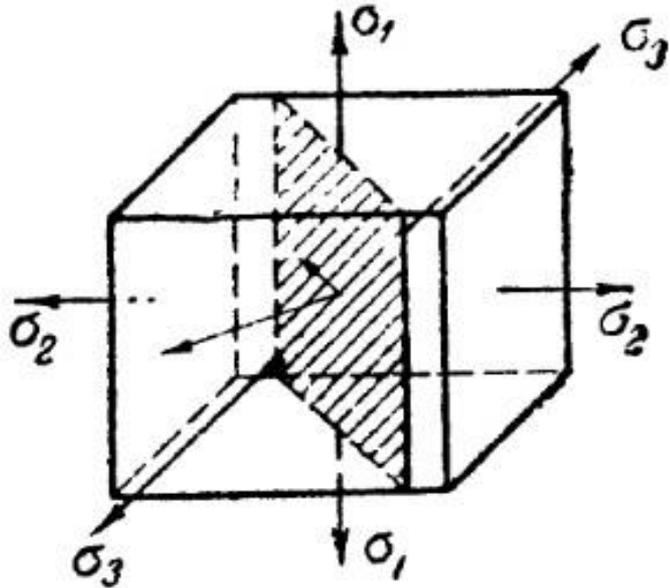
Площадь прямоугольного сечения цилиндра

по образующей: $t \cdot l$

$$\begin{aligned} \sigma'' &= N / (t \cdot l) = q \cdot D l / (2t \cdot l) = \\ &= q \cdot D / (2t) \end{aligned}$$

$$3) \boxed{\sigma_1 = q \cdot D / (2t), \quad \sigma_2 = q \cdot D / (4t), \quad \sigma_3 = 0}$$

Общий случай 3-мерного напряжённого состояния



$$F = 300 \approx 167 \text{ cm}^2$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$$

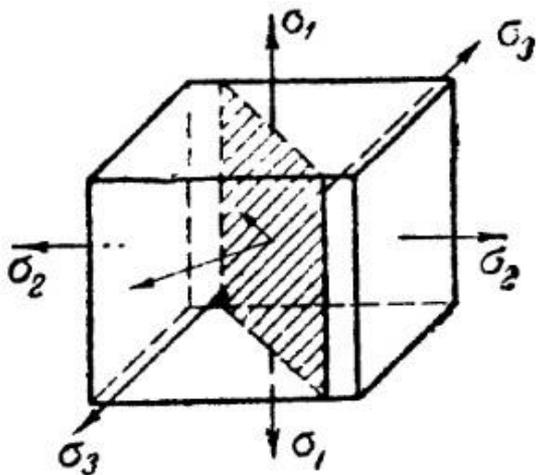
$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi}} \approx 20,2 \text{ cm}$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2) \approx 177 \text{ cm}^2$$

$$\Delta l = Pl/EF = 50\,000 \cdot 350 / (177 \cdot 120\,000\,000) \approx 0.8 \text{ (мм)}$$

Деформированное состояние

Деформированное состояние



$\vec{\varepsilon}_1$ по первому ребру $\parallel \vec{\sigma}_1$

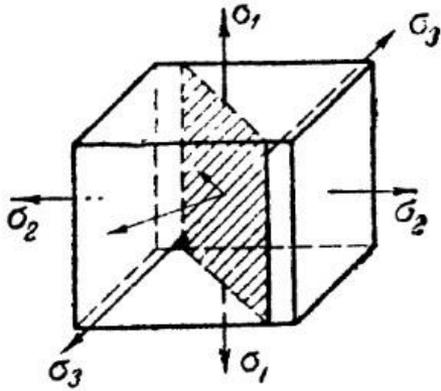
$$\varepsilon_1' = \sigma_1 / E,$$

μ – коэффициент поперечной деформации,
коэффициент Пуассона

$$\varepsilon_1'' = -\mu \sigma_2 / E, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \sigma_3 / E$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$$

$$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \mu \sigma_2 - \mu \sigma_3) / E$$



Деформированное состояние

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E - \mu(\sigma_2/E + \sigma_3/E)$$

$$\varepsilon_2 = \sigma_2/E - \mu(\sigma_1/E + \sigma_3/E)$$

$$\varepsilon_3 = \sigma_3/E - \mu(\sigma_1/E + \sigma_2/E)$$

Относительное изменение объёма

$$\begin{aligned}\theta &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \\ &= (1-2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / E\end{aligned}$$

Частный случай. Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$,

$$\theta = 3\sigma (1-2\mu)/E$$

$K = E / (3(1-2\mu))$ – коэфф. объёмной деформации

$$\theta = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3K$$

Относительное изменение объёма

Объем параллелепипеда до деформации

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Объем в деформированном состоянии

$$V = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1,$$

$$a_1 = a + \Delta a = a + a\varepsilon_1 = a(1 + \varepsilon_1);$$

где $b_1 = b + \Delta b = b + b\varepsilon_2 = b(1 + \varepsilon_2);$

$$c_1 = c + \Delta c = c + c\varepsilon_3 = c(1 + \varepsilon_3).$$

Изменение объема тела

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - abc}{a \cdot b \cdot c} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1.\end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и третьего порядка малости (произведения ε_i), получим

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

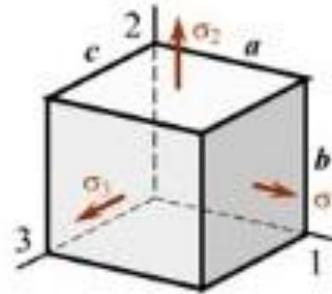
Относительное изменение объема равно сумме трех главных деформаций.

Подставив ε_i из обобщенного закона Гука, получим

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Для произвольно ориентированных площадок

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$



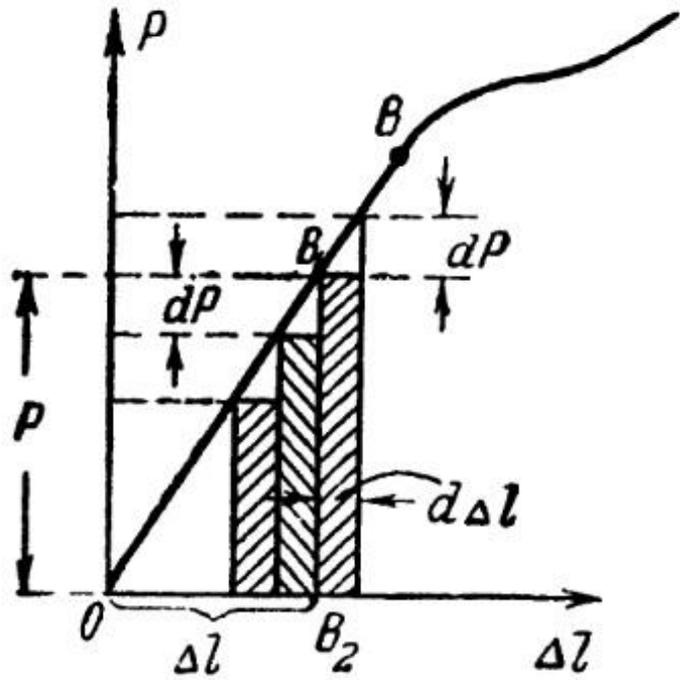
Пояснение к
 $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

Работа и энергия

Работа силы при упругом деформировании

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \Delta l / l$$

$$\Delta l = Pl / EF$$



$$d'A = (P + 0,5 \cdot dP) \cdot d(\Delta l)$$

$$d'A = P \cdot d(\Delta l)$$

$$A = 0,5 \cdot P \cdot \Delta l$$

Потенциальная энергия упругой деформации

– это энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации

$$A = 0,5 P \cdot \Delta l \quad \Delta l = Pl / EF$$

$$U = A = P^2 \cdot l / (2EF)$$

$$U = \sigma^2 \cdot Fl / (2E), \text{ т.к. } \sigma = P/F$$

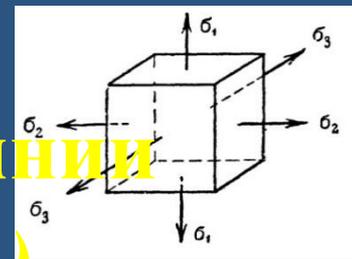
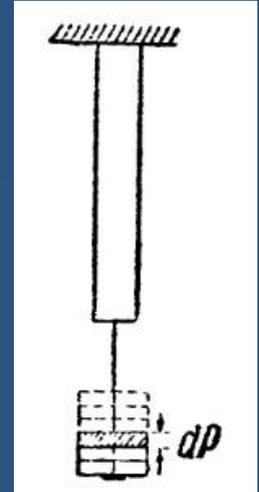
Т.к. $\varepsilon = \sigma/E$, то удельная $U = 0,5 \sigma \cdot \varepsilon$

Удельная – энергия единицы объёма

U при объёмном напряжённом состоянии

$$U = 0,5 (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

$$U = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)) / 2E$$



Теории (гипотезы) прочности

Проверка прочности

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \text{ (или } \sigma_3 \leq [\sigma])$$

σ_1 (или σ_3) – наибольшее по модулю
главное напряжение,

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \sigma^0 / k$$

σ^0 – опасное напряжение,

k – коэффициент запаса

1. Теория наибольших нормальных напряжений

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_3 \neq 0$$

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

«+» для растяжения
хрупких материалов

«-» для сжатия

плохо согласуется с практикой

2. Гипотеза наибольшего относительного удлинения (укорочения), по наибольшим относительным деформациям

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = 1/E \cdot (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon]$$

ε_{max} – максимальная деформация

$[\varepsilon]$ – допускаемая деформация

3. Теория наибольших касательных напряжений

$$\tau_{max} = 0,5 (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\tau_{max} \leq [\tau], \quad (1): \quad [\tau] = 0,5 [\sigma]$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

+ на объёмное сжатие

+ для пластических материалов, не учит. σ_2

– плохо согласуется с практикой
в случае объёмного растяжения

4. Энергетическая теория

прочности

$$U_{\phi} \leq [U_{\phi}]$$

U_{ϕ} – часть потенциальной энергии деформации, вызванной изменением формы

$$U_{\phi} = A = (1+\mu)\sigma^2/(3E)$$

Потенциальная энергия деформации при объёмном напряжённом состоянии

$$U = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3))/2E$$

Расчётное напряжение

$$R \geq R/[K] = 50\,000/300 \approx 167 \text{ МПа}$$

$$R = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4R}{\pi}} = 20,2 \text{ см}$$

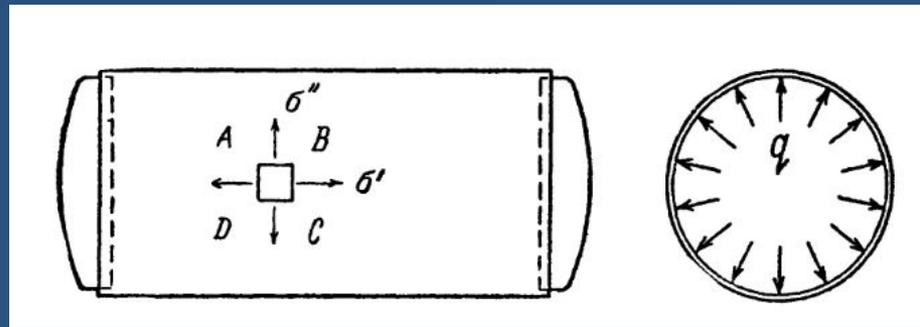
$$R = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2) = 177 \text{ МПа}$$

$$A = R/EF = 50\,000 \cdot 350 / (177 \cdot 120\,000) \approx 0,8 \text{ мм}$$

Пример

Котёл

под давлением



q [кг/см²], D – диаметр цилиндрической части,
 l – длина, t – толщина стенок

$$\sigma_1 = qD / (2t), \quad \sigma_2 = qD / (4t), \quad \sigma_3 = 0$$

1) Т. наибольших нормальных напряжений:

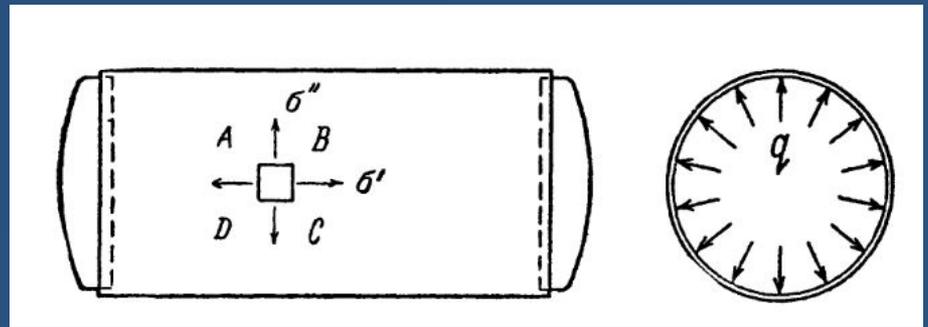
$$\sigma_1 \leq [\sigma],$$

3) Т. наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = qD / (2t) \leq [\sigma]$$

Пример



4) Энергетическая теория прочности:

$$F \geq P/[\sigma] = 50\,000/300 = 167 \text{ см}^2$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$$

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi}} = 20,2 \text{ см}$$

$$\leq [\sigma],$$

$$F = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2) = 177 \text{ см}^2$$

$$\Delta l = P/EF = 50\,000 \cdot 350 / (177 \cdot 120\,000) = 0,8 \text{ мм}$$

$$3qD / (4t) \leq [\sigma]$$

Результаты по расчётам толщины стенок

по 1) = 3) и 4) различаются на 14%.

$$4): \quad 0,86qD / (2t) \leq [\sigma] \quad 1)=3): \quad qD / (2t) \leq [\sigma]$$

Для пластической стали лучше 4)

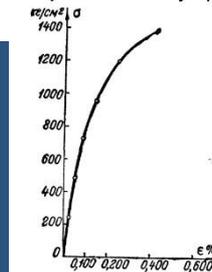
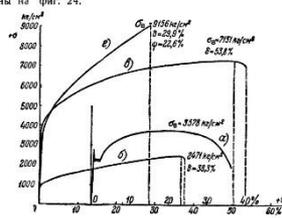
Проблемы прочности

в связи с процессами разрушения

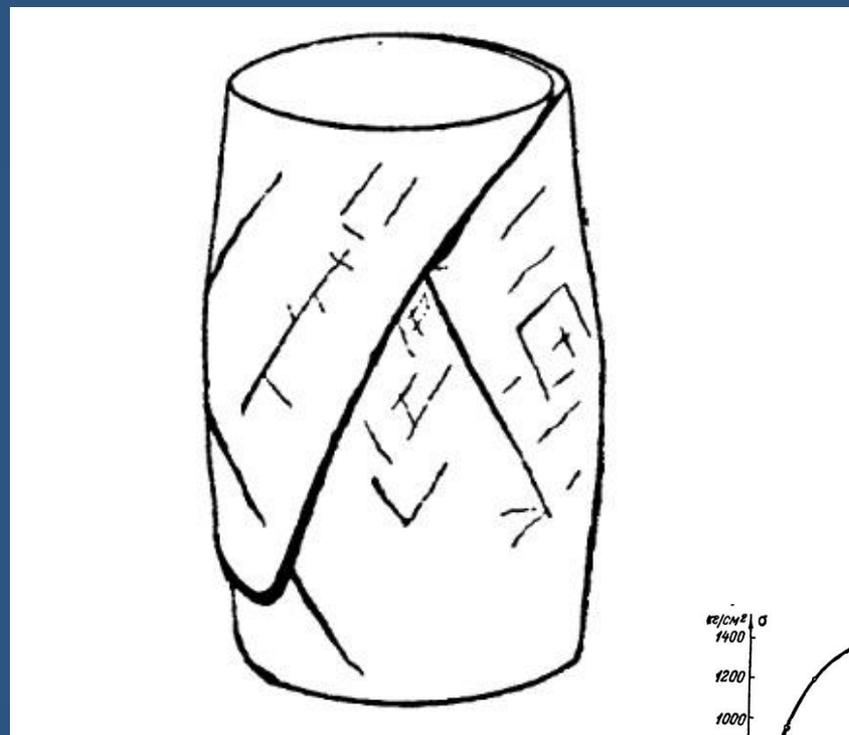
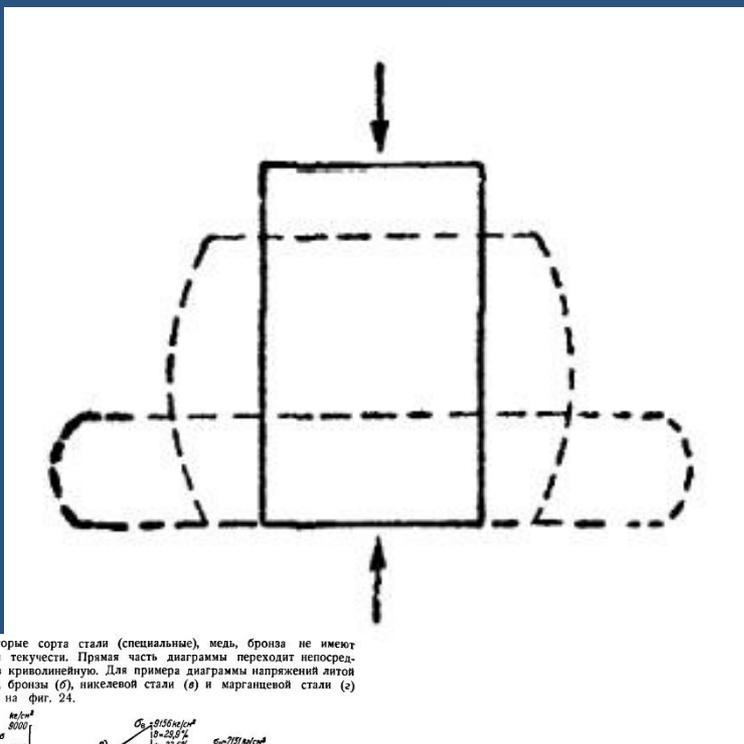
Под прочностью материала или детали сооружения понимается их способность сопротивляться действию усилий, вызывающих ту или иную деформацию. Деформация детали при достаточном её развитии приводит к разрушению — разделению детали на части. При этом в одних случаях разрушение наступает после стадии малых деформаций, более или менее точно следующих закону Гука (хрупкое состояние материала); в других — между стадией малых деформаций и окончательным разрушением материал проходит через стадию значительных остаточных деформаций (вязкое или пластическое состояние материала).

Для суждения о прочности материала, находящегося в хрупком состоянии, требуется изучение только одного предельного (опасного) состояния — перехода от упругой деформации к разрушению материала. Для суждения о прочности материала, находящегося в пластичном состоянии, необходимо изучение двух предельных состояний — перехода упругой деформации в пластическую и перехода от пластической деформации к разрушению материала; очень важно при этом знать, как протекает деформация после достижения предела текучести.

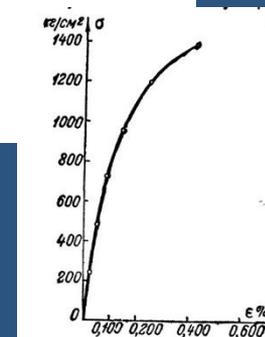
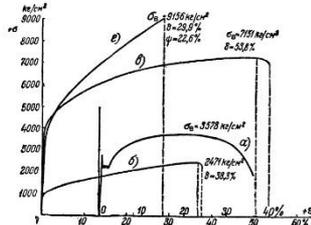
Некоторые сорта стали (специальные), медь, бронза не имеют площадок текучести. Прямая часть диаграммы переходит непосредственно в криволинейную. Для примера диаграммы напряжений литейной стали (а), бронзы (б), никелевой стали (в) и марганцевой стали (г) показаны на фиг. 24.



Пластические деформации и разрушение хрупкого тела



Некоторые сорта стали (специальные), медь, бронза не имеют площадки текучести. Правая часть диаграммы переходит непосредственно в криволинейную. Для примера диаграммы напряжений литой стали (а), бронзы (б), никелевой стали (в) и марганцевой стали (г) показаны на фиг. 24.



5. Объединённая теория прочности Давиденкова-Фридрихмана

Теория рассматривает процессы появления и развития пластических деформаций и процессы разрушения как ключевые в определении прочности материала.

Эта теория – синтез теории наибольших касательных напряжений
и теории наибольших удлинений

Расчёты на прочность

В зависимости от цели различают три вида расчётов на прочность:

- 1) проверочный (контрольный),
- 2) проектный,
- 3) определение допускаемой нагрузки.

1) При *проверочном расчёте* нагрузка бруса, его материал (а, следовательно, допускаемое напряжение) и размеры известны. Определению подлежит наибольшее расчётное напряжение, которое сравнивают с допускаемым.

С проверочными расчётами встречаются, в частности, при экспертизе выполненных проектов

Расчёты на прочность

2) При *проектном расчёте* нагрузки и материал (допускаемые напряжения) известны, и определяют требуемую площадь сечения бруса и размеры.

3) В некоторых случаях проверочный расчёт удобнее вести в форме *определения допускаемой нагрузки.*

В частности, при изменении режимов технологических процессов, при необходимости повышении нагрузок и, следовательно, необходимости знать их допускаемое значение.

При этом расчёте размеры бруса и его материал (допускаемое напряжение) известны.

Из условия прочности определяют допускаемое значение продольной силы

Некоторые задачи

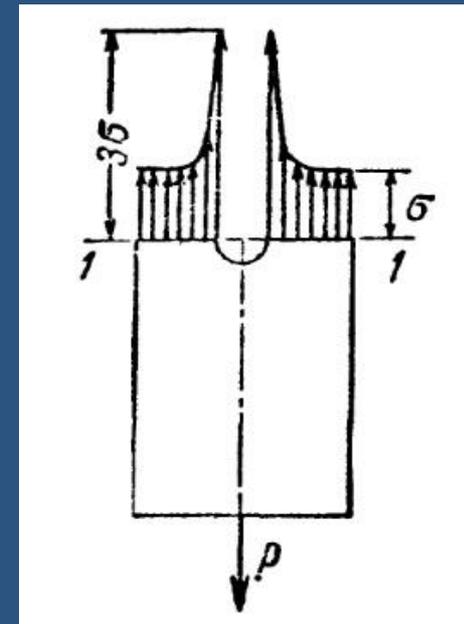
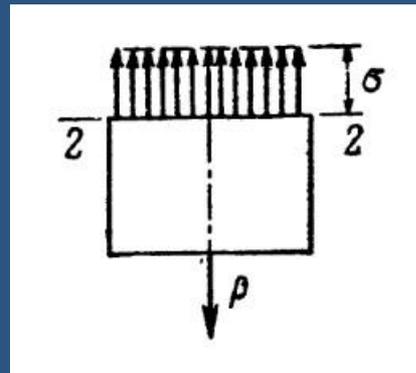
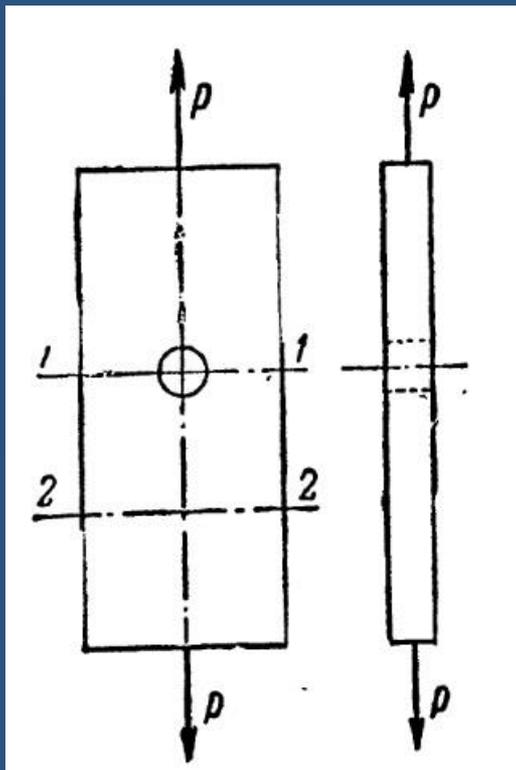
механики деформируемого твёрдого тела

Местные напряжения

Концентрация напряжений

Местные напряжения

Концентрация напряжений



$$a_k = \sigma_{max} / \sigma$$

Усталость материала

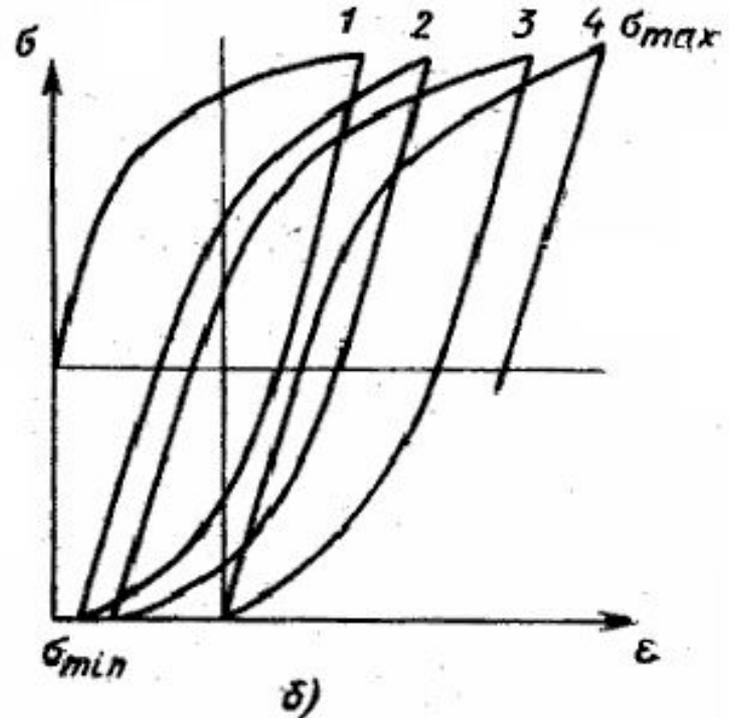
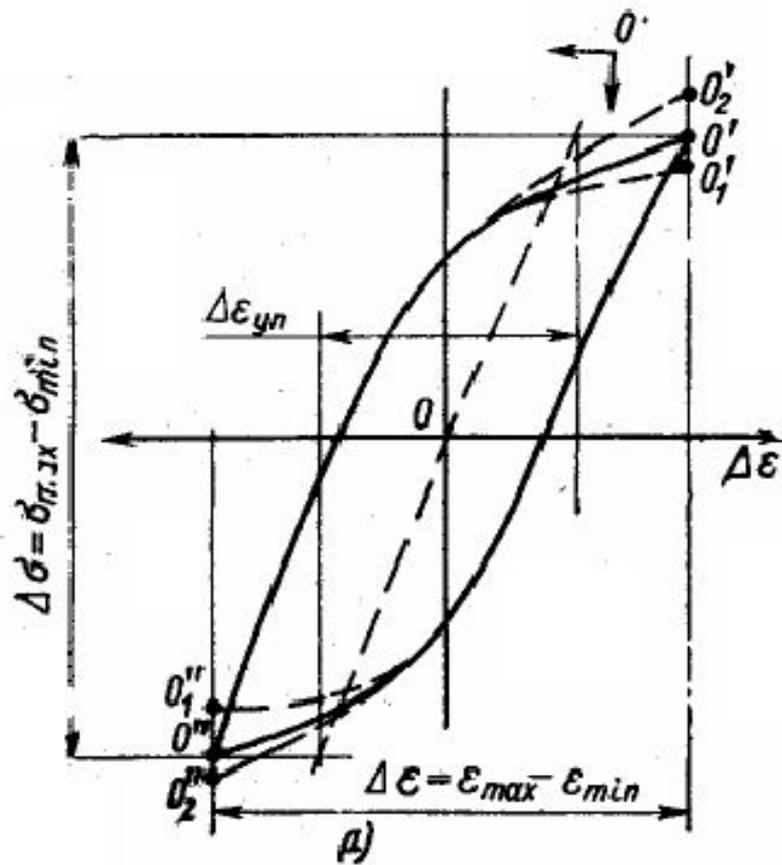
Циклическое нагружение

ЯВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

- **Усталостное разрушение** – разрушение материала под действием повторно-переменных напряжений.
- **Усталость материала** – постепенное накопление повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к образованию трещин в материале и разрушению.
- **Выносливость** – способность материала сопротивляться усталостному разрушению.
- **Предел выносливости (усталости)** – наибольшее (предельное) напряжение цикла, при котором не происходит усталостного разрушения образца после произвольно большого числа циклов.

Механизм усталостного разрушения во многом связан с неоднородностью реальной структуры материалов (различие размеров, очертаний, ориентации соседних зерен металла; наличие различных включений – шлаков, примесей; дефекты кристаллической решетки, дефекты поверхности материала – царапины, коррозия и т. д.).

Циклическое нагружение



Схематические диаграммы циклического деформирования

Усталость материала

Разупрочнение металлов при циклических нагрузках, приводящее к разрушению.

Накопление усталости = смещение дислокаций (микроскопических несплошностей) на гранях кристаллов при их раскачивании, объединение дислокаций и образование за счёт этого микротрещин.

Микротрещины – в макротрещины:
уменьшение живого сечения детали,
а фактические напряжения возрастают
и достигают предела прочности – разрушение

Циклическое напряжение



Циклическое нагружение

Число циклов напряжений в элементах конструкций.

Название частей конструкции или машины	Число циклов
Элементы главных ферм железнодорожных мостов	$2 \cdot 10^6$
Балки проезжей части	$40 \cdot 10^6$
Рельсы	$15 \cdot 10^6$
Валы авиамоторов	$18 \cdot 10^6$
Оси вагонов	$50 \cdot 10^6$
Валы автомобильных двигателей	$120 \cdot 10^6$
Штоки и шатуны паровых двигателей	$1\ 000 \cdot 10^6$
Валы паровых турбин	$15\ 000 \cdot 10^6$
Лопатки паровых турбин	$250\ 000 \cdot 10^6$

Пределом выносливости называется максимальное напряжение цикла, при котором образец выдерживает неограниченное число циклов нагружения, не разрушаясь

Скорость деформации

$$\xi = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Скорость деформации – это относительная деформация, отнесённая ко времени процесса

При прокатке средняя скорость деформации

$$\xi = \frac{\Delta h \cdot V}{h_0 \cdot l_d}$$

Δh - абсолютное обжатие;

h_0 - высота сечения заготовки;

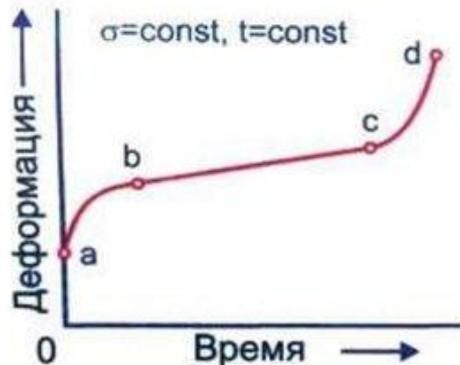
l_d - длина очага деформации;

V - скорость прокатки

Ползучесть

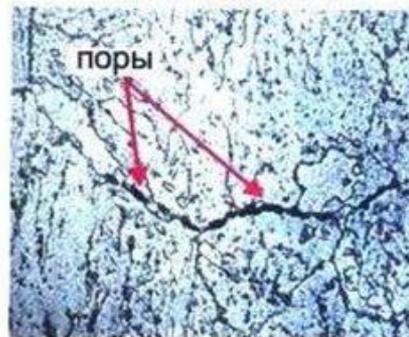
- процесс медленного и непрерывного нарастания остаточной деформации при постоянной температуре и постоянном напряжении, меньшем предела текучести.

Кривая ползучести



- 0a* - деформация в момент приложения нагрузки;
- ab* - стадия *неустановившейся ползучести*;
- bc* - стадия *установившейся ползучести*;
- cd* - стадия *ускоренной ползучести*.

Повреждаемость стали 15X1M1Ф при ползучести



x800

Разрушение при ползучести начинается с появления пор или клиновидных трещин на границах зерен. Они растут и объединяются, образуя макротрещины.

Скорость ползучести:

$$V_{\text{пол}} = \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \text{tg}\alpha$$

ε — деформация (ось ординат);

τ — время (ось абсцисс);

α — угол наклона кривой

- Традиционно для определения ползучести строят кривые ползучести

Задача

Пример выполнения домашней работы

Задача

Брус (стержень) переменного поперечного сечения находится под действием нескольких продольных сил.

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа (Н/мм²)

Определить: 1) внутренние усилия N

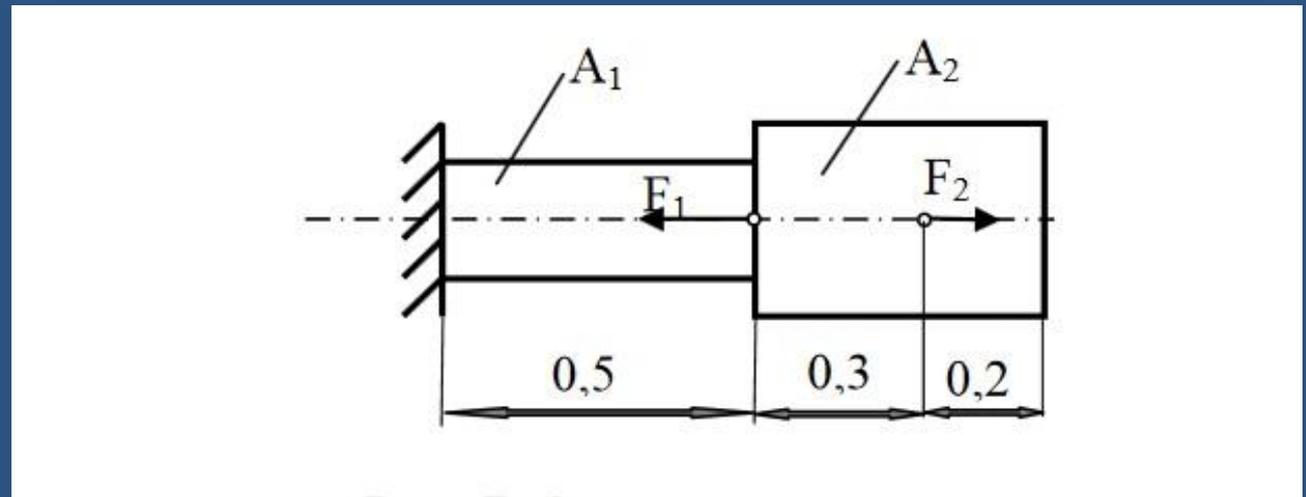
2) нормальные напряжения σ ,
возникающие в стержне,

3) вычислить абсолютные удлинения (укорочения) участков стержня и общее изменение длины стержня.

4) Построить эпюры продольных усилий и нормальных напряжений.

Пример решения задачи

Схема нагружения



$$F_1 = 20 \text{ кН,}$$

$$A_1 = 100 \text{ мм}^2$$

$$F_2 = 15 \text{ кН,}$$

$$A_2 = 200 \text{ мм}^2,$$

длина участков указана в метрах

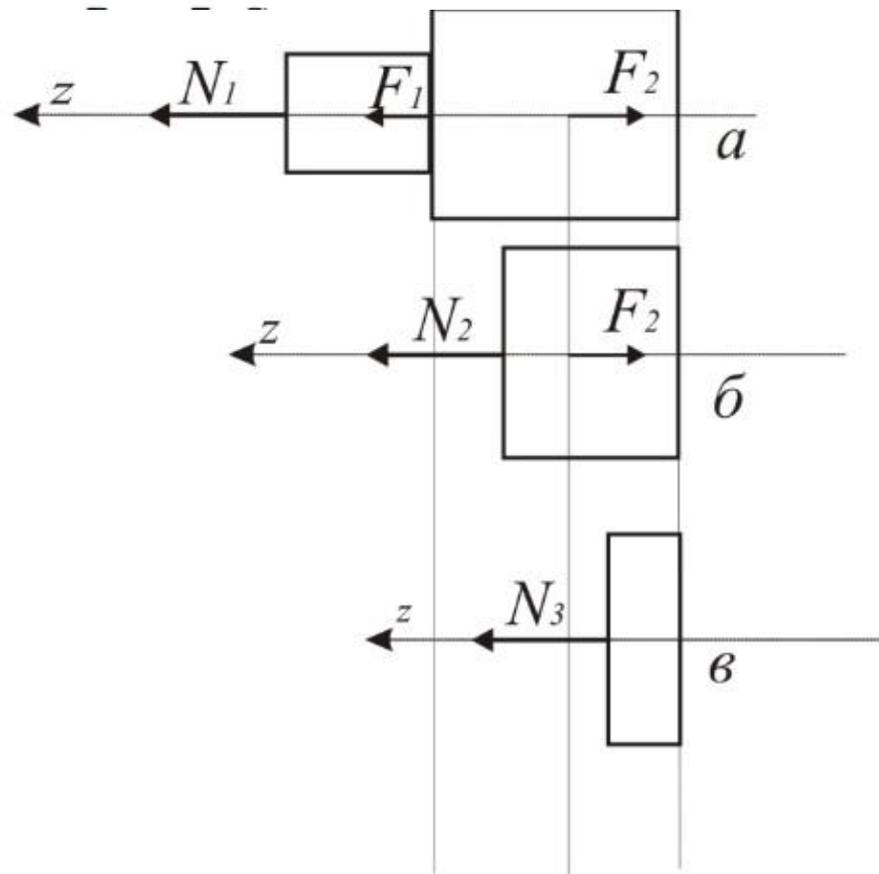
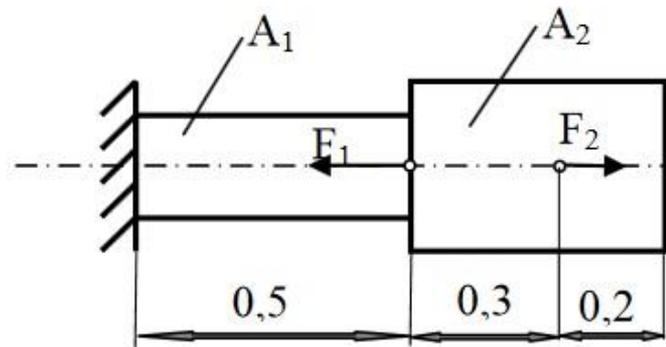
Алгоритм решения задачи

- разбить стержень на участки в продольном направлении, границами которых будут точки приложения внешних сил, границы стержня и места изменения размеров в поперечном сечении;
- на каждом из участков, используя метод сечений, определить величину внутренней продольной силы и напряжение;
- построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений;
- вычислить удлинение (укорочение) стержня на каждом из участков и определить общее удлинение (укорочение) как алгебраическую сумму изменений длины на отдельных участках

Пример решения задачи

$$F_1 = 20 \text{ кН},$$
$$A_1 = 100 \text{ мм}^2$$

$$F_2 = 15 \text{ кН},$$
$$A_2 = 200 \text{ мм}^2$$



Задача

Разбиваем стержень на 3 участка.

Используя метод сечений,

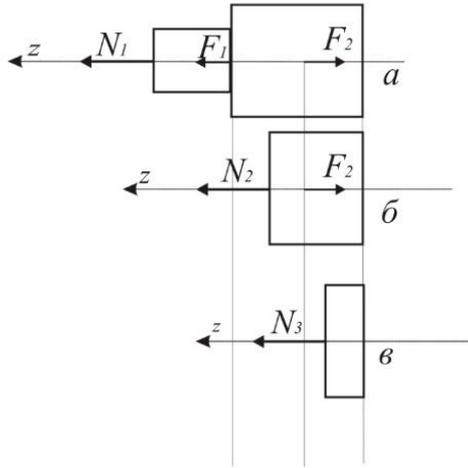
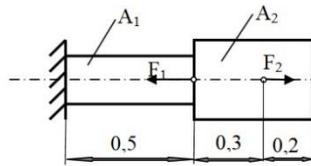
в пределах каждого участка определяем величину и знак

внутреннего продольного усилия N .

При этом реакцию опоры можно

не определять, отсекая часть

стержня с опорой.



Продольная сила в произвольном поперечном сечении

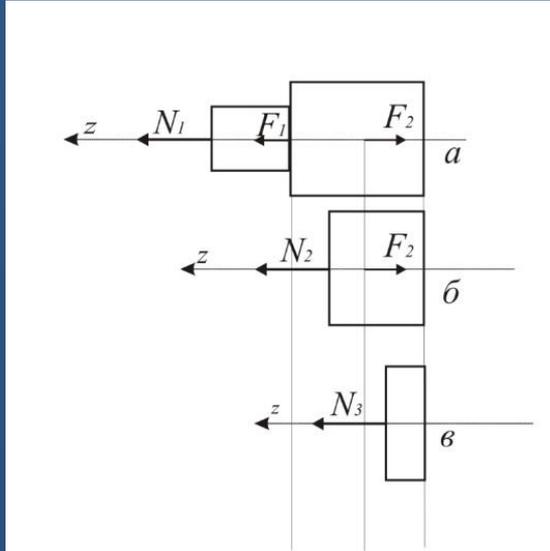
стержня численно равна алгебраической сумме

проекций на его продольную ось

всех внешних сил, приложенных

по одну сторону от проведённого сечения

Задача



Для первого участка (длиной 0,5 м) проводим сечение и отбрасываем часть с опорой (левую часть стержня).

Продольную силу N_1 определяем, составив уравнение равновесия:

$$N_1 + F_1 - F_2 = 0,$$

откуда

$$N_1 = F_2 - F_1 = 15 - 20 = -5 \text{ кН}$$

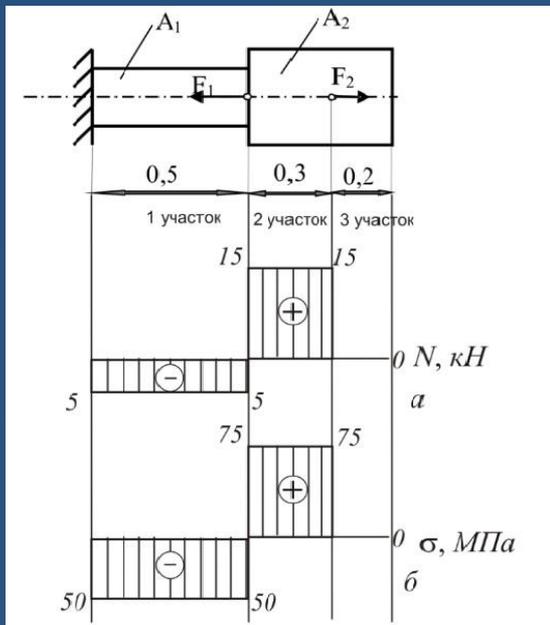
На эпюре величину N_1 указываем со знаком «минус», так как она

соответствует сжатию

и направлена к сечению,

противоположно показанному

направлению



Задача

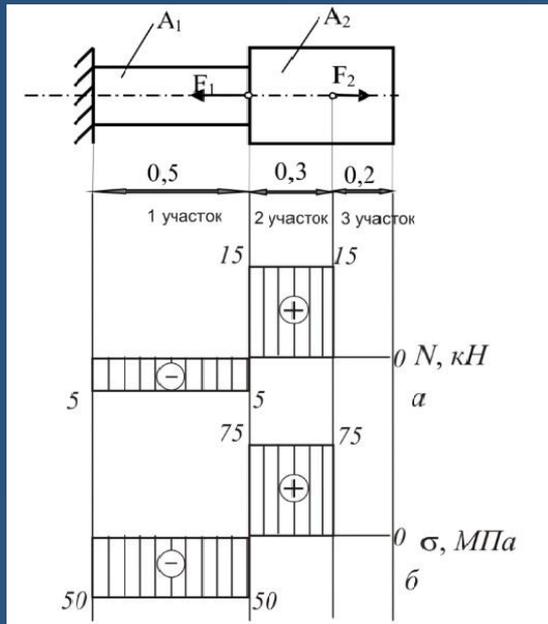
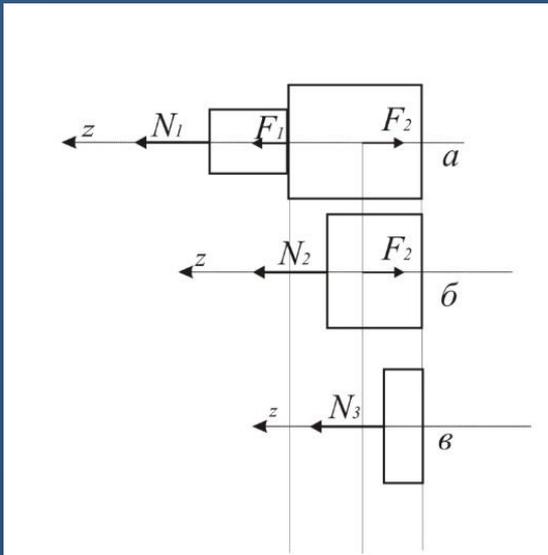
На втором участке продольную силу N_2 определяем из уравнения:

$$N_2 - F_2 = 0,$$

откуда

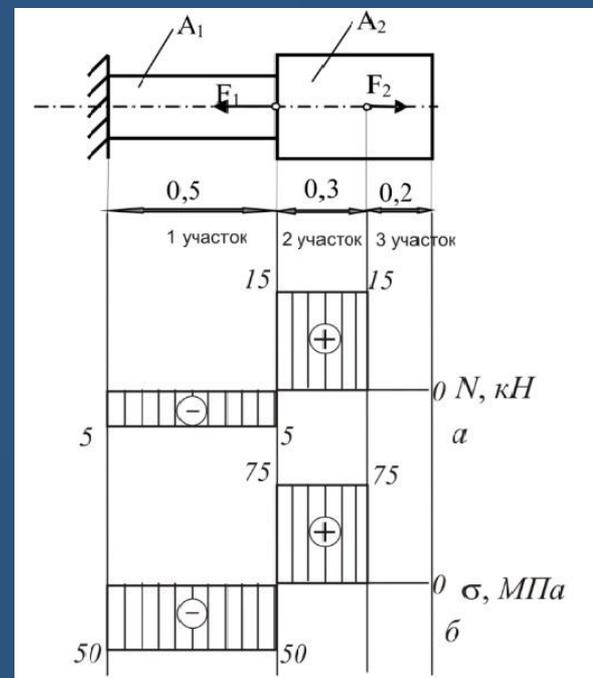
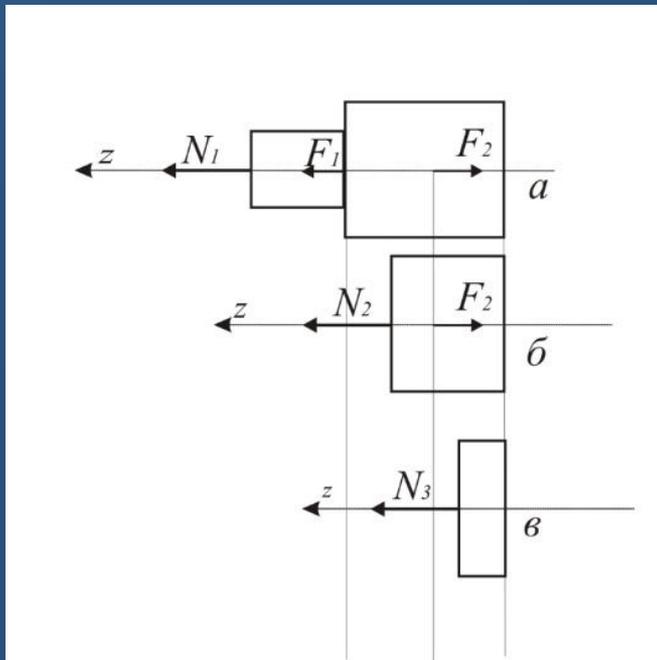
$$N_2 = F_2 = 15 \text{ кН}$$

Величина N_2 положительна (соответствует деформации растяжения, направлена от сечения), на эпюре её показываем со знаком «плюс»

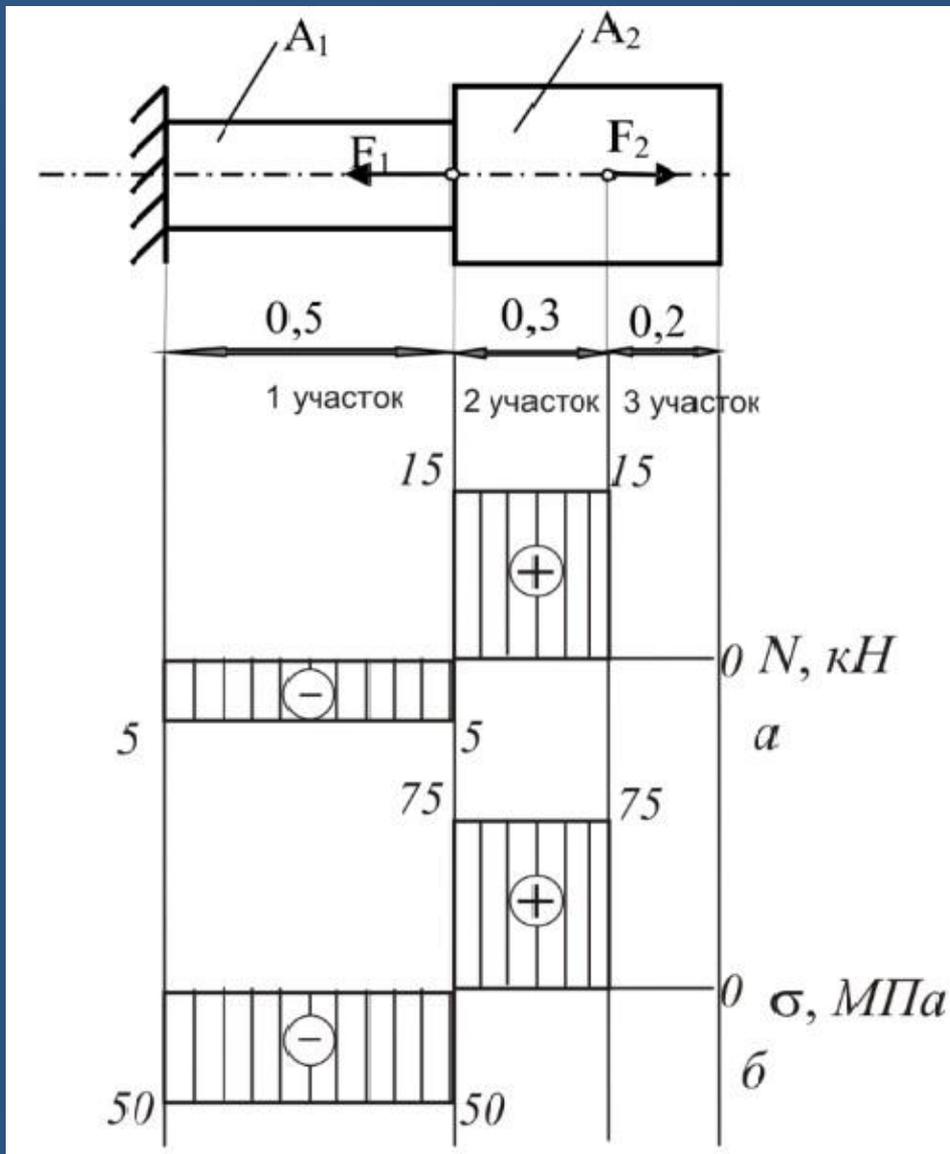


Задача

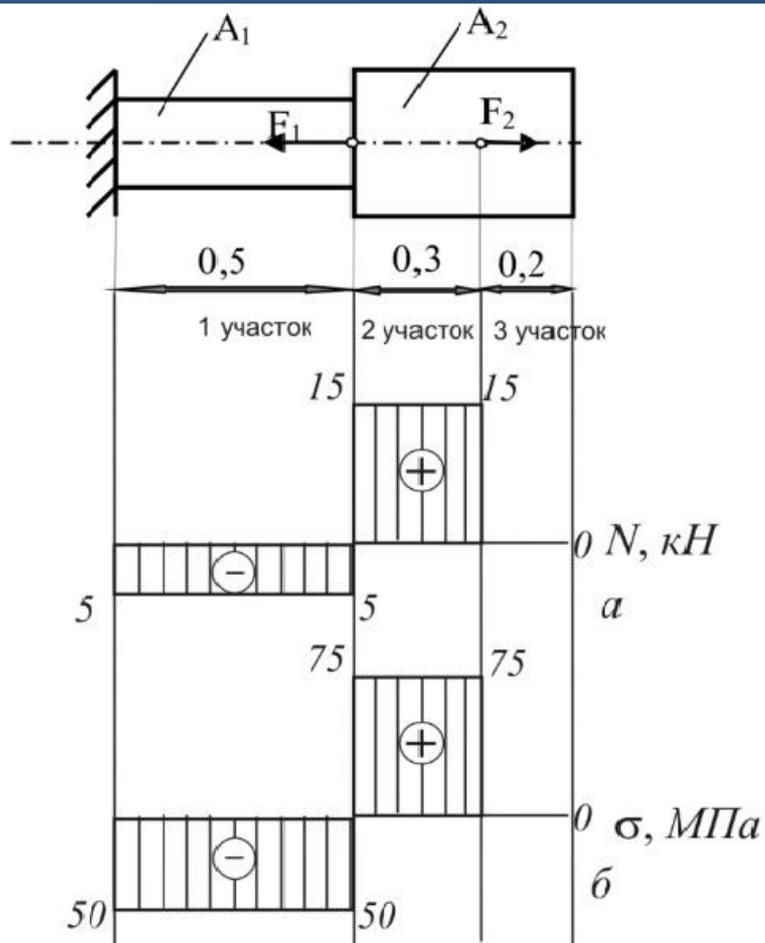
Для третьего участка
продольная сила N_3 равна
нулю:
 $N_3 = 0$
на этом участке стержень
не имеет деформации



Задача



При построении эпюр продольные силы, соответствующие деформации растяжения положительны, а при деформации сжатия отрицательны. При деформации растяжения продольные силы направлены от сечения, при деформации сжатия – к сечению



Задача

$$N_1 = -5 \text{ кН}$$

$$N_2 = 15 \text{ кН}$$

$$N_3 = 0$$

Напряжения
на каждом участке

$$F_1 = 20 \text{ кН},$$

$$A_1 = 100 \text{ мм}^2$$

$$F_2 = 15 \text{ кН},$$

$$A_2 = 200 \text{ мм}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-5 \cdot 10^3}{100} = -50 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{15 \cdot 10^3}{200} = 75 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = 0$$

Задача

Определим для каждого участка величину абсолютной деформации (удлинения или укорочения)

$$\varepsilon = \Delta l / l = P / EF = \sigma / E$$

$$\Delta l = Pl / EF = \sigma \cdot l / E$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E} = \sigma_1 \cdot \frac{l_1}{E} = -50 \frac{0,5}{2 \cdot 10^5} = -12,5 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{A_2 E} = \sigma_2 \cdot \frac{l_2}{E} = 75 \frac{0,3}{2 \cdot 10^5} = 11,25 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{A_3 E} = 0.$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Сопротивление материалов