ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Логарифмическое дифференцирование.
2. Дифференцирование функций, заданных неявно.
3. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
4. Производные высших порядков.

Вопрос 1. Логарифмическое дифференцирование

Пусть y = lnu, где u = φ(x) - дифференцируемая функция.

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y'_x = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{u'_x}{u}.$$

Таким образом, имеем

$$(\ln u)'_x = \frac{u'}{u} \quad \text{или} \quad \boxed{(\ln \varphi(x))'_x = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} \qquad \textbf{(1)}$$

Производная $(\ln \varphi(x))'_x$ называется **логарифмической производной** функции $u = \varphi(x)$.

О.1.1. Операция, состоящая в последовательном применении к функции сначала логарифмирования (по основанию e), а затем дифференцирования, называется **логарифмическим дифференцированием**, а ее результат - **логарифмической производной** данной функции.

О.1.2. **Степенно-показательной функцией** (**показательно-степенной** или **сложной показательной**) называется функция вида $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - заданные дифференцируемые функции от x.

Найдем производную данной функции логарифмическим дифференцированием:

$$\ln y = v \ln u.$$

Отсюда по формуле (1) получим

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = (v \ln u)' = v' \ln u + v \frac{u'}{u},$$

откуда

$$y' = y\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right).$$

Подставив y = u^v, получим

$$y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v(v'\ln u + vu^{-1}u')$$

или

$$\boxed{(u^v)' = u^v(v'\ln u + vu^{-1}u')}$$

<u>Замечание</u>

Производная степенно-показательной функции состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое получается, если функцию дифференцировать как степенную функцию, считая v = const, а u - переменной; а второе слагаемое – если функцию дифференцировать как показательную функцию, считая u = const, а v - переменной от x.

Логарифмическое дифференцирование может быть применено для отыскания производных не только степенно-показательных функций, но и таких, непосредственное дифференцирование которых громоздко (произведение большого числа сомножителей, радикалы, дроби и т. д.).

Пример 1. Найти y', если $y = (x)^{\sin x}$.

Решение

Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = y(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}) = (x)^{\sin x}(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}) =$$

$$= (x)^{\sin x} \cos x \ln x + (x)^{\sin x - 1} \sin x.$$

Если воспользоваться выражением (1), то получится такой же результат.

Пример 2. Найти y', если $y = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$

Решение

Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Умножая на y и подставляя его значение, получим:

$$y' = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right).$$

Вопрос 2. Дифференцирование функций, заданных неявно

2.1. Неявное задание функции

О.2.1.Если функция задана уравнением у = f(x), разрешенным относительно у, то говорят, что функция **задана в явном виде (явная функция).**

О.2.2.Под **неявным заданием** функции понимают задание функции у в виде уравнения

$$F(x,y) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением

$$y - f(x) = 0,$$

но не наоборот.

Чтобы выразить функцию y из уравнения (2), необходимо разрешить данное уравнение относительно y. В общем случае, при заданном x, уравнение (2) может иметь несколько корней y, т.е. неявная функция может быть многозначной.

Пример 3. $x^2 + y^2 = 1$ - неявная функция $\Rightarrow$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Не всегда легко, а иногда и невозможно, разрешить уравнение (2) относительно y.

Пример 4. $y + 2^y x = 0$ - нельзя явно выразить y через x.

2.2. Дифференцирование неявных функций

Пусть неявная функция у задана уравнением (2) $F(x,y) = 0$, не разрешенным относительно у.

Правило дифференцирования неявной функции

Для того чтобы найти производную неявной функции, заданной уравнением (2), нужно продифференцировать уравнение (2), помня, что у является функцией от х и его производная равна y'. Затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент х и функцию у, т.е. сама является функцией неявной.

Пример 5. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение

Дифференцируем данное уравнение по x, помня, что y есть функция от x, т.е. y = f(x). В результате получим:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0,$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0,$$

$$3x^2 - 3y + y'(3y^2 - 3x) = 0.$$

Откуда $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}.$

Вопрос 3. Дифференцирование функций, заданных параметрически

3.1. Параметрическое задание функции

О.3.1.**Параметрическим заданием** функции y = f(x) называется определение данной функции в виде системы двух уравнений относительно новой промежуточной переменной t, называемой **параметром:**

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}} \qquad \textbf{(3)}$$

Выражение непосредственной зависимости y от x (y = f(x)) может быть получено путем исключения параметра t из уравнений (3).

Пример 6.

1) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} -$ окружность $x^2 + y^2 = a^2;$

2) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} -$ эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Здесь $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.2. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде системы двух уравнений (3), где t - параметр.

<u>Т.3.1. (дифференцирование функции, заданной параметрически)</u>

Если функция y от аргумента x задана параметрически системой (3), где функции x(t) и y(t) дифференцируемы, причем $x'(t) \neq 0$, то производная этой функции выражается формулой

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \quad \text{или} \quad \boxed{y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

Пример 7. Пусть $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение

$$y'_t = 2t,\ \ x'_t = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \ \Rightarrow \ y'_x = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}.$$

Вопрос 4. Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть так же функция от x и называется **производной первого порядка** или **первой производной**. Возможно, что эта функция сама имеет производную.

О.4.1. Производная от первой производной функции $y = f(x)$ называется **производной второго порядка** или **второй производной** данной функции и обозначается одним из символов $y'', f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2f(x)}{dx^2}.$

Таким образом

$$\boxed{y'' = (y')' = [f'(x)]' = f''(x).}$$

<u>О.4.2.</u> Производная от второй производной функции y = f(x) называется **производной третьего порядка** или **третьей производной** данной функции и обозначается одним из символов

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3f(x)}{dx^3}.$$

Таким образом

$$\boxed{y''' = (y'')' = [f''(x)]' = f'''(x).}$$

Производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков.**

<u>О.4.3.</u> Производная от (n–1)-й производной функции y = f(x) называется **производной n-го порядка** или **n-й производной** данной функции и обозначается одним из символов

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Таким образом

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' = f^{(n)}(x).}$$

Начиная с производной 4-го порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках.

Пример 8. y^{V} или $y^{(5)}$ - производная 5-го порядка.

Для некоторых элементарных функций можно вывести формулы нахождения производных любого порядка.

Пример 9. Найти производную n-го порядка функции $y = a^x$.

Решение

$$y' = a^x \ln a,$$

$$y'' = a^x \ln^2 a,$$

$$y''' = a^x \ln^3 a,$$

....

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Механический (физический) смысл второй производной

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону S = S(t). Известно, что $\upsilon = S'(t)$ - скорость точки в данный момент времени t.

Можно показать, что вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки, т.е.

$$\boxed{a = S''(t) = \frac{d^2S}{dt^2}}$$

4.2. Производные высших порядков неявных функций

Пусть неявная функция y задана уравнением (2), т. е. $F(x,y) = 0$.

Продифференцировав уравнение (2) по x и разрешив полученное уравнение относительно y′, найдем первую производную.
Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную y″ от неявной функции. В нее войдут x, y и y′. Подставляя уже найденное значение y′ в выражение второй производной, выразим y″ через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения третьей производной и т.д.

Пример 10. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение

$F(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0.$

$$y':\ 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

$$y'':\ y'' = -\frac{1\cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{y^3}.$$

$$y''':\ y''' = -(-3y^{-4})y' = \frac{3y'}{y^4} = \frac{3\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^4} = -\frac{3x}{y^5} \quad \Rightarrow \quad y''' = -\frac{3x}{y^5}.$$

4.3. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция y = f(x) задана параметрически в виде системы уравнений (3):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Первая производная y'_x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (4)$$

Найдем вторую производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

Из определения второй производной и равенства (4) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}}$$

Аналогично получаются формулы:

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \ldots\ldots$$

Пример 11. Найти вторую производную функции

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Решение

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\mathrm{ctg} t,$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\mathrm{ctg} t)'}{-\sin t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$