Теоретическая (техническая) механика

Пирогов Сергей Петрович

Лекция 1

- Механика - наука о движении материальных тел и взаимодействии между ними.

Принципы и законы механики использовались с самого начала истории человечества. Развитие механики можно разделить на два этапа: существование механики как ремесла и как науки.

Механика как ремесло подразумевала устную передачу полученных в результате практической деятельности знаний от учителя к ученикам.

Механика как наука появилась с возникновением первых научных трудов, а основоположниками механики считаются Архимед, Пифагор, Галилей, Ньютон и другие.

- Теоретическая (классическая механика) - это наука, в которой изучаются общие свойства движения и равновесия материальных тел.

- Общие – значит, те свойства, которые присущи любому телу - жидкому, газообразному, твердому, механизму и т.д. и отражаются одними и теми же законами. На основе общих законов движения и равновесия тел развиваются науки, в которых изучаются закономерности движения конкретных тел. Например, движение газов изучается в аэродинамике, движение жидкостей - в гидродинамике.

- Основные разделы теоретической механики - статика, кинематика и динамика. В статике (от слова "статус"-покой) изучаются силы и законы равновесия материальных тел. Кинематика ("кинема" - движение) изучает движение тел без учета действия сил, а динамика ("динамо"- сила в движении)- движение тел под действием сил.

- Таким образом, с одной стороны статика и кинематика нужны для изучения динамики, а с другой - на основе этих разделов изучаются такие науки, как сопротивление материалов и теория машин и механизмов.

- В сопротивлении материалов излагаются инженерные методы расчета элементов сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость. Теория механизмов представляет собой науку, в которой изучают структуру, кинематику и динамику механизмов независимо от их конкретного применения. Детали машин рассматривают основы расчета и конструирования деталей и узлов общего назначения, встречающихся в различных механизмах и машинах.

- Все разделы прикладной механики тесно связаны между собой и с курсом теоретической механики: так курс сопротивления материалов основан на статике, кинематический расчет механизмов возможен после изучения кинематики, прочностной расчет деталей - на сопротивлении материалов и т.д. Теоретическая механика является базовой дисциплиной для изучения тех объектов, с которыми придется иметь дело современным специалистам в различных областях техники.

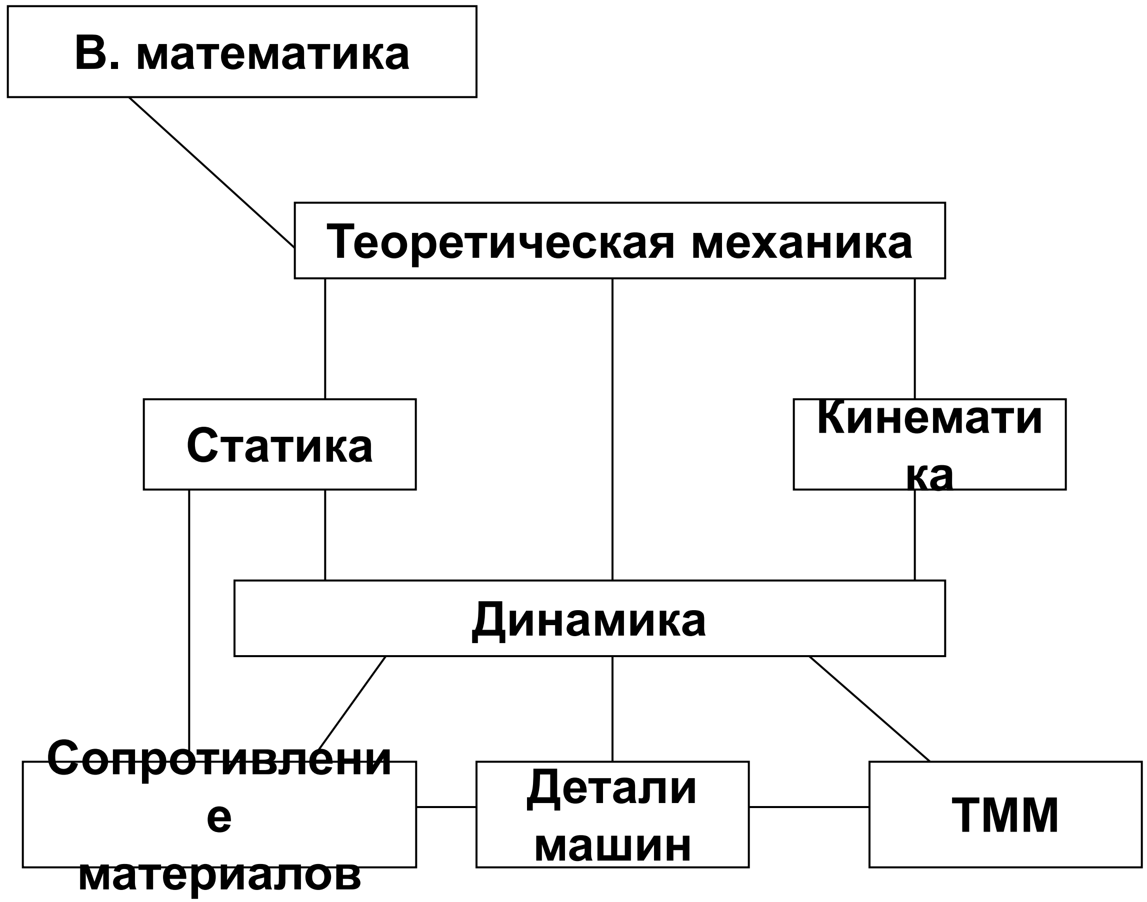


Рис.1.1. Структура курса теоретической механики и связь ее с другими дисциплинами

СТАТИКА

1. Основные понятия и определения

- Основным объектом исследования статики является сила.

Сила - это количественная мера взаимодействия материальных тел.

Действие силы определяется тремя факторами: величиной (модулем), направлением и точкой приложения, то есть сила является векторной величиной и изображается в виде отрезка, на конце которого ставится стрелка (рис.1.2).

Рис.1.2. Изображение вектора силы

Величина силы в масштабе равна длине отрезка. В тексте вектор силы обозначается буквой со стрелкой наверху, а модуль силы - теми же буквами, но без стрелки, либо обозначением вектора силы, заключенным в скобки, обозначающие абсолютную величину вектора - F

Модуль силы в общепринятой в настоящее время системе единиц СИ измеряется в ньютонах (Н), применяются и более крупные единицы - килоньютон (1кН = 10^3 Н), меганьютон (1мН=10^6Н).

- Прямая, совпадающая с вектором силы, называется линией действия силы.

- Система сил - это любая совокупность сил. Как правило, система сил характеризуется каким-либо признаком.

- Различают сходящуюся систему сил (линии действия которых пересекаются в одной точке), плоскую (лежат в одной плоскости), пространственную, систему параллельных сил и т.д.

Основными задачами статики являются:

1. Приведение данной системы сил к простейшему виду (упрощение).

2. Исследование условий равновесия данной системы сил.

Равновесие (покой) является частным случаем движения, то есть изменения положения одних тел по отношению к другим телам.

Эквивалентными системами сил называются такие системы, которые оказывают на тело одно и то же действие.

– Уравновешенной называется система сил, действие которой эквивалентно нулю.

– Равнодействующая - это сила, действие которой эквивалентно действию данной системы сил.

В статике рассматриваются, как правило, абсолютно твердые тела, расстояние между двумя любыми точками которых остается постоянным. На самом деле это является абстракцией, так как любое твердое тело под действием нагрузки деформируется, однако во многих случаях величиной деформаций можно пренебречь.

2. Аксиомы статики

1. Если на свободное твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии, если эти силы равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (рис.1.3).

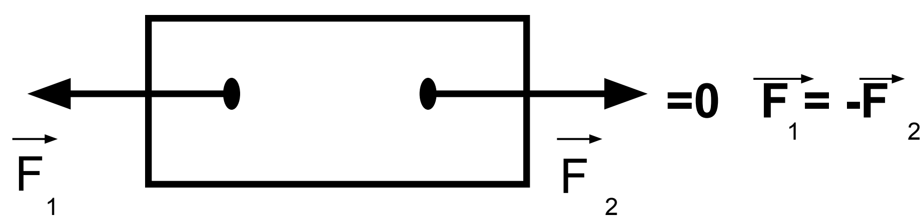
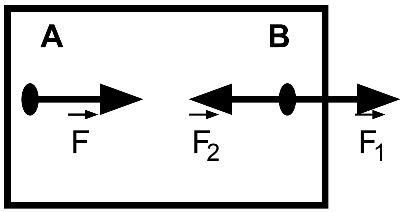


Рис.1.3. Первая аксиома статики

2. Действие данной системы сил не изменится, если к ней добавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие: не изменяя действие силы, ее можно переносить вдоль линии действия. Доказательство приведено на рис.1.4.



$$|\vec{F}| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$$

Рис.1.4. Следствие второй аксиомы статики

Итак, имеем силу , приложенную в точке А. Приложим в произвольной точке В, лежащей на линии действия силы , уравновешенную систему сил, модули которых равны модулю силы .

Затем уберем уравновешенную систему сил и таким образом, на тело останется действовать одна сила , равная по модулю силе , но приложенная в точке В, то есть, не изменяя действия силы , ее перенесли из точки А в точку В.

3. Аксиома параллелограмма.

Две силы, приложенные в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке, по величине и направлению равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис.1.5).

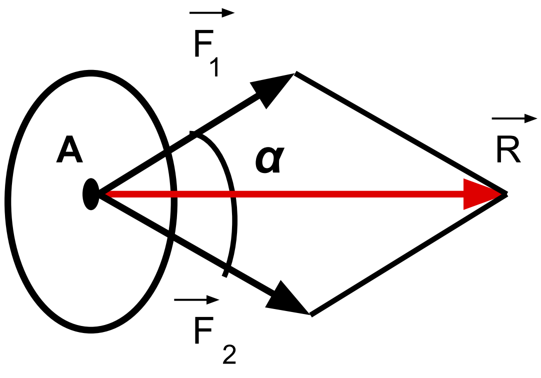


Рис.1.5. Аксиома параллелограмма

- Вектор R называется геометрической суммой этих сил.

Модуль его можно найти, применяя теорему косинусов

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha)}.$$

Аксиома 4

Два тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению (рис.1.6.).

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

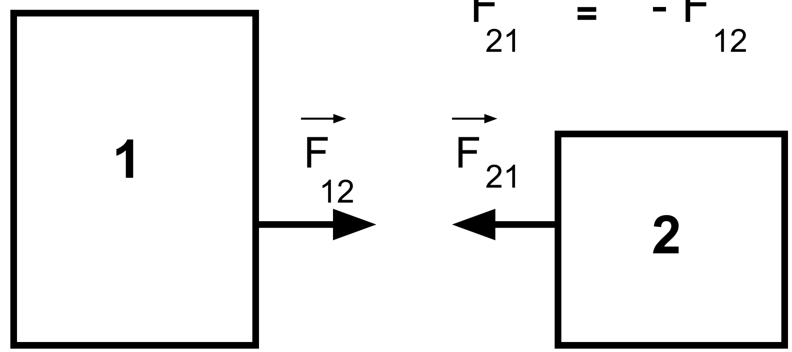


Рис.1.6. Аксиома равенства действия и противодействия

3. Связи и их реакции

Рассматриваемые в механике тела могут быть свободными и несвободными.

- Свободным называется тело, которое не связано с другими телами и может совершить из данного положения любое перемещение в пространстве.
- Тело, перемещение которого хотя бы в одном направлении ограничивается в пространстве другими телами, называется несвободным.
- Тела, которые препятствуют перемещению данного тела , называются связями, а силы, с которыми связи действуют на это тело, - реакциями связей.

Реакция связи всегда направлена противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению тела.

Простейшие виды связей.

1. Гибкая связь (нить, трос, цепь и т.д.).
   Поскольку нить ограничивает перемещение подвешенного к ней тела только в одном направлении (вдоль нити от точки подвеса), то реакция нити направлена вдоль нити, к точке подвеса (рис.1.7). Нить может только растягиваться.

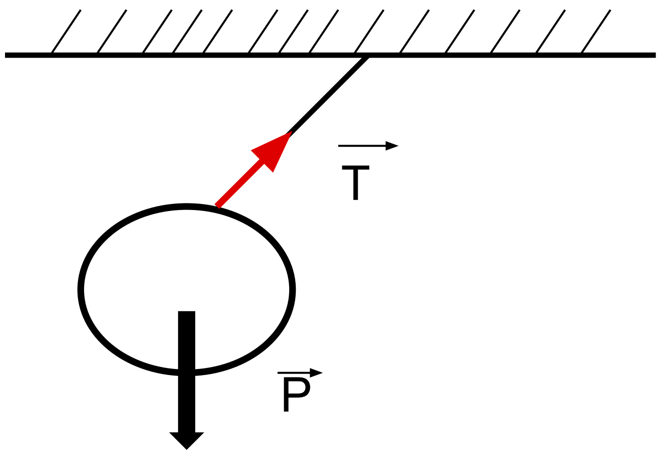


Рис.1.7.Гибкая связь

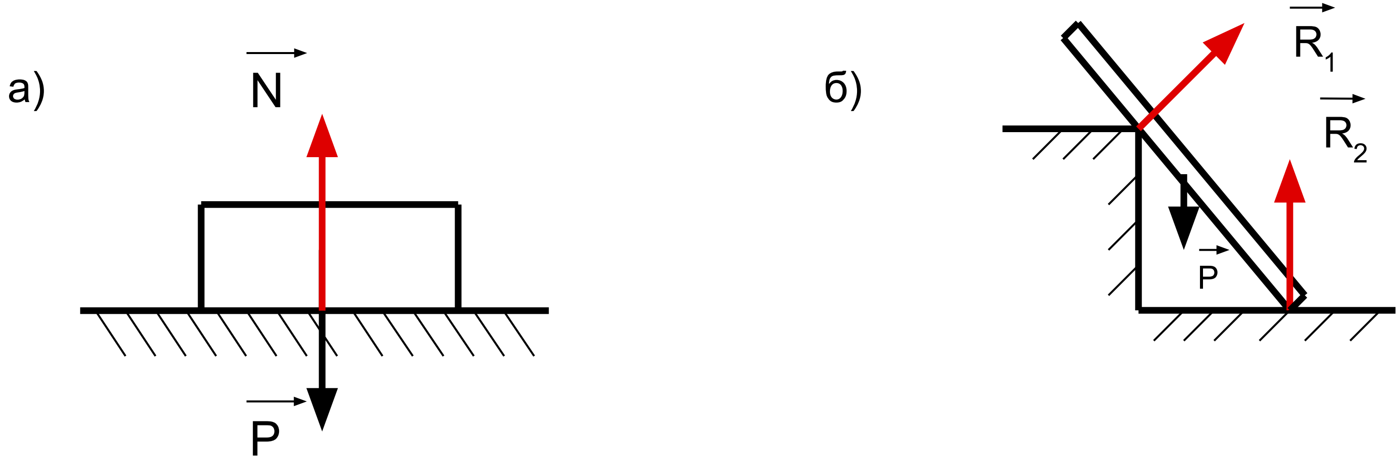


Рис.1.8. Гладкая поверхность

2. Гладкая (без трения) поверхность (опора).

В этом случае реакция направлена по нормали к поверхности (рис.1.8,а).

Если одно из тел касается другого в точке, то реакция направлена по нормали к другому телу (рис.1.8,б).

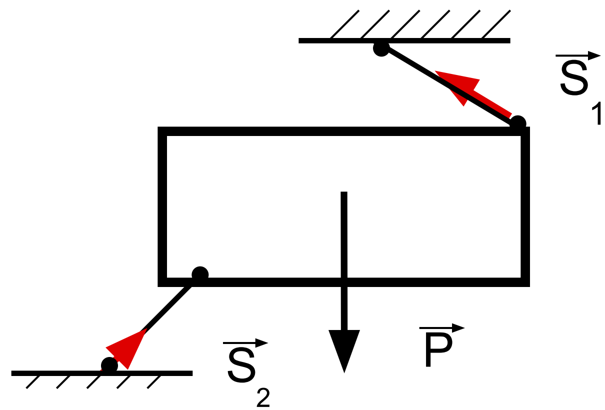


Рис.1.9. Тонкий невесомый

3. Тонкий невесомый стержень с шарнирным закреплением концов.

Поскольку стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных к его концам, то согласно первой аксиоме статики эти силы должны быть направлены по одной прямой, следовательно, реакция стержня на тело будет направлена вдоль стержня (рис.1.9).

В отличие от нити стержень может быть как сжат, так и растянут.

Одной из важных задач статики является определение реакций связей. Для этого используется принцип (аксиома) отбрасывания связей:

каждое несвободное тело можно считать свободным, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей (рис.1.10).

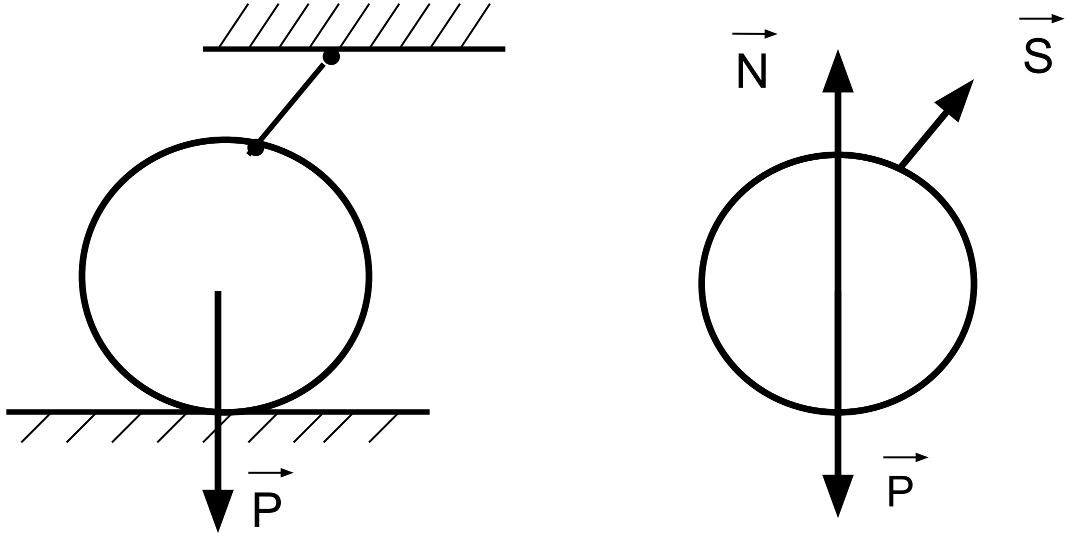
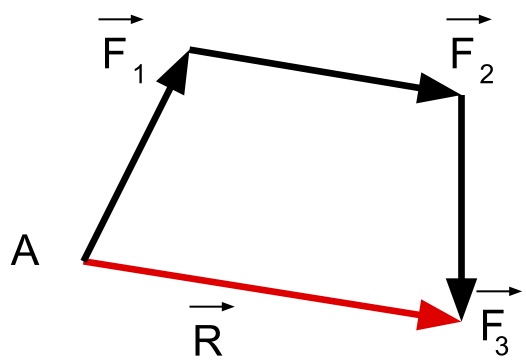


Рис.1.10. Аксиома отбрасывания связей

4. Действия с силами

С силами, как и с любыми векторами, можно проводить операции геометрического сложения и разложения. Сложить две силы можно, используя аксиому параллелограмма сил, строя диагональ параллелограмма на этих силах, как на сторонах.

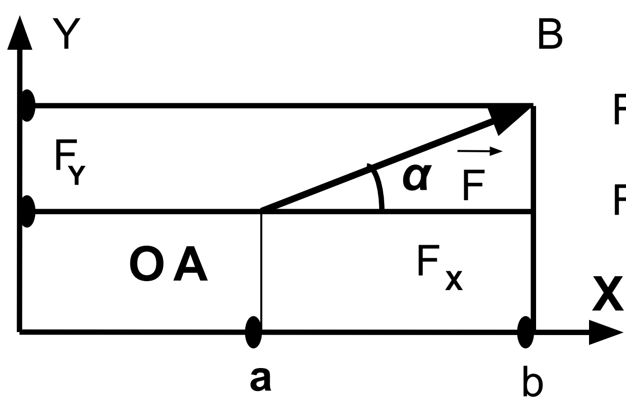
Если нужно сложить несколько сил, то следует построить силовой многоугольник, прикладывая каждую последующую силу к концу предыдущей. Замыкающая сторона силового многоугольника и будет равна геометрической сумме этих сил. Заметим, что этот вектор всегда направлен из начала первой силы к концу последней, а не наоборот (рис.1.11).



$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}_K$$

Рис.1.11. Сложение сил

- Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора силы.
- Проекция считается положительной, если направление от начала к концу проекции совпадает с положительным направлением оси (рис.1.12).



$$F_X = \pm ab$$

$$F_X = F\cos\alpha$$

Из рисунка видно, что проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Рис.1.12. Проекция силы на ось

Частные случаи проектирования.

1. Сила образует острый угол с положительным направлением оси (рис.1.12). В этом случае проекция положительна ($F_x>0$, $F_y>0$).

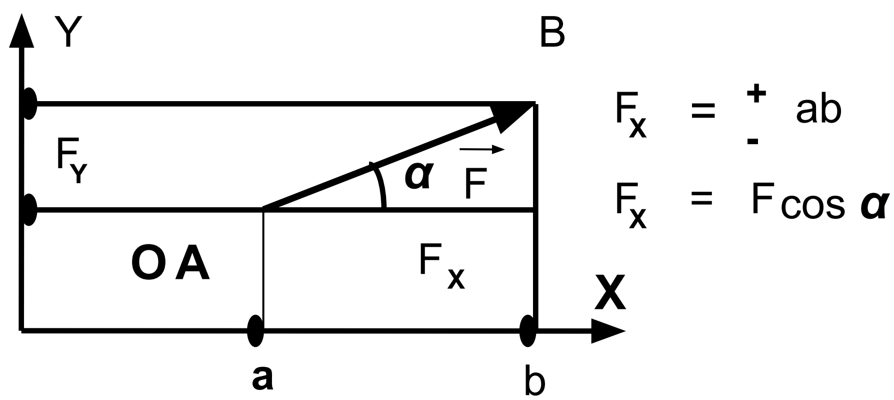


Рис.1.12. Проекция силы на ось

а)

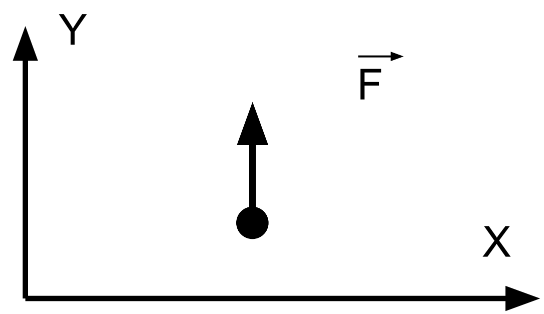


Рис.1.13. Частные случаи нахождения проекций сил

2. Сила перпендикулярна оси (рис.1.13,а). Поскольку в этом случае cos(α)=0, то и проекция силы на эту ось равна нулю: $F_x=0$.

3. Сила параллельна оси. Поскольку угол между силой и осью равен нулю, а косинус нуля равен единице, то проекция будет равна модулю силы: $F_y = F$.

4. Сила образует тупой угол с положительным направлением оси (рис.1.13,б).

б)

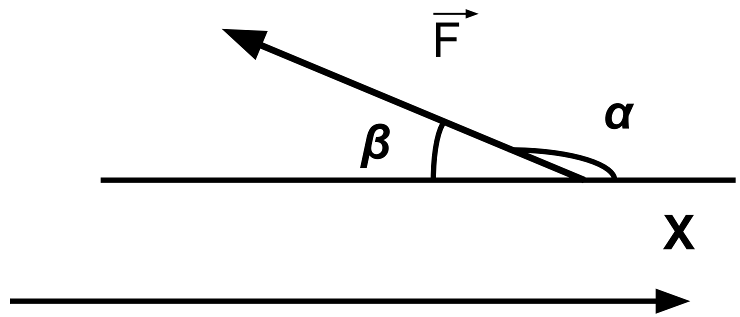


Рис.1.13. Частные случаи нахождения проекций сил

$$F_x = F\cos(\alpha) = F\cos(180-\beta) = -F\cos(\beta),$$

В этом случае проекция отрицательна.

Зная величины проекций силы на взаимно перпендикулярные оси X, У и Z, модуль силы можно вычислить с помощью теоремы Пифагора (рис.1.14).

- Так как $F = \sqrt{F_{xy}^2 + F_z^2}$. , а $F_{XY} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$. , то

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \qquad (1.2)$$

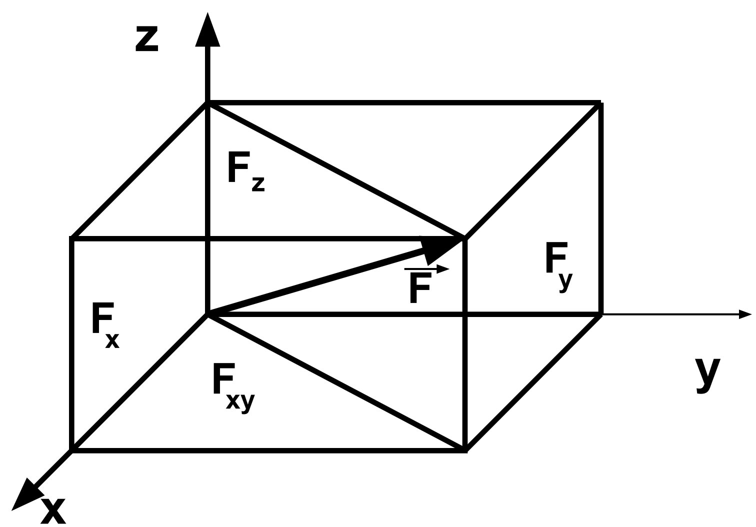
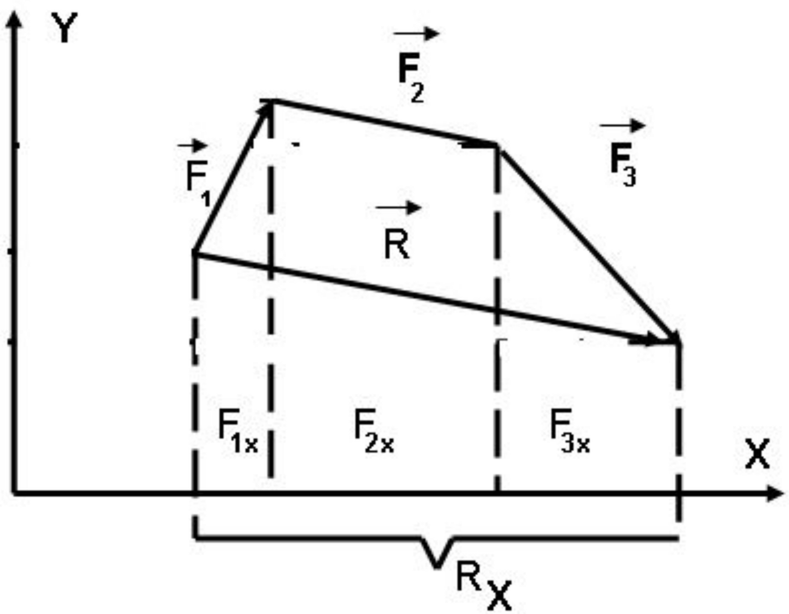


Рис.1.14. Разложение силы по осям координат

Аналитический способ сложения сил



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, или $R_x = \Sigma F_{\kappa x}$.

$Ry = \Sigma F\kappa y$ $Rz = \Sigma F\kappa z$

$$R = \sqrt{\sum F_{kx}^2 + \sum F_{ky}^2 + \sum F_{kz}^2}$$

5. Сходящаяся система сил

После переноса точек приложения сил в точку A можно последовательно сложить все силы, строя силовой многоугольник, таким образом заменяя все силы одной равнодействующей.

Следовательно, система сходящихся сил имеет равнодействующую, приложенную в точке пересечения сил и равную геометрической сумме всех сил данной системы.

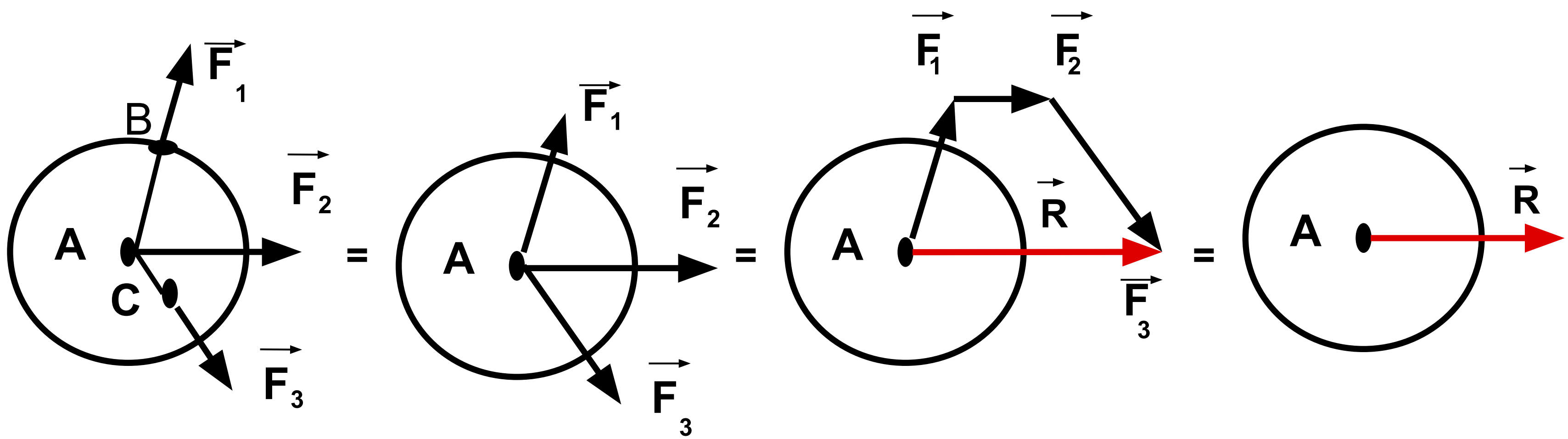


Рис.1.16. Приведение сходящейся системы сил к простейшему виду

Вторая задача статики - разработка условий равновесия.

Они могут быть получены в двух видах:

1. Геометрическое условие. Очевидно, что система сходящихся сил будет эквивалентна нулю, если силовой многоугольник, построенный из сил системы, будет замкнут.
2. Аналитическое условие. Из формулы (1.3) следует, что величина равнодействующей будет равна нулю, если выполняются условия:

$$\Sigma F_{\kappa x}=0; \ \Sigma F_{\kappa y}=0; \ \Sigma F_{\kappa z}=0. \qquad (1.4,a)$$

Выражения (1.4,а) являются уравнениями равновесия сходящейся системы сил: система сил находится в равновесии, когда алгебраическая сумма проекций всех сил системы на оси X, $У$ и Z равна нулю.

Если все силы лежат в одной плоскости (плоская сходящаяся система сил), то последнее из равенств (14,а) превращается в тождество и остаются два значащих уравнения

$$\Sigma F_{кx}=0;\ \Sigma F_{кy}=0. \qquad (1.4,б)$$

Это уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил

Лекция 2
Плоская произвольная система сип

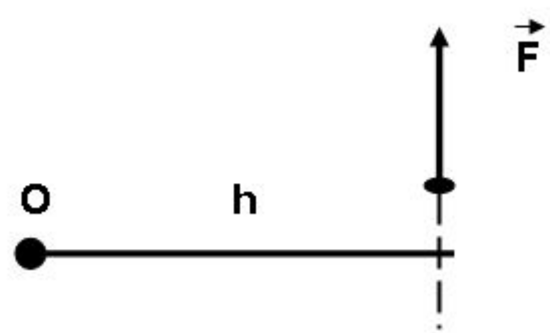
- Это система сил, как угодно расположенных в 1 плоскости
- Для данной системы нужно решить те-же задачи-упрощение и изучение условий равновесия

Для характеристики вращательного действия силы вводится понятие момента силы относительно точки.

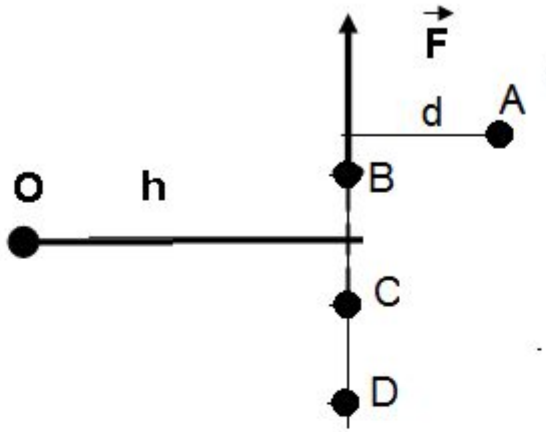
Моментом силы относительно точки называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на кратчайшее расстояние между точкой и линией действия силы (плечо)

$$m_0\left(\vec{F}\right) = \pm F \cdot h$$

.



Знак момента определяется следующим образом: если сила стремится повернуть тело вокруг данной точки против часовой стрелки, то он считается положительным, в противном случае - отрицательным



$$m_O(\vec{F}) = Fh$$

$$m_A(\vec{F}) = -Fd$$

$$m_B(\vec{F}) = 0$$

$$m_C(\vec{F}) = 0$$

$$m_D(\vec{F}) = 0$$

Момент силы относительно точки равен нулю только в том случае, если линия действия силы проходит через данную точку

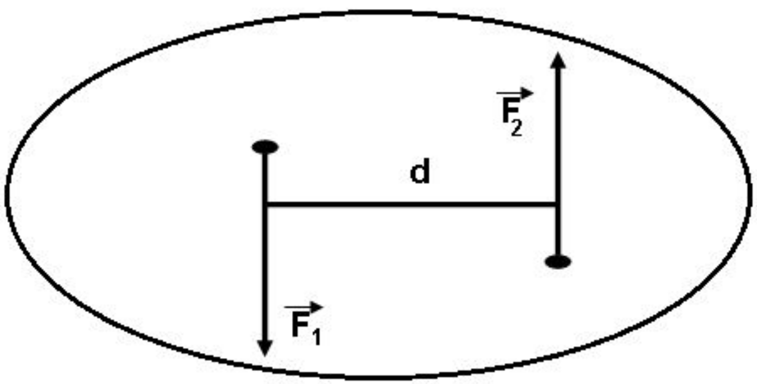
Теорема Вариньона:

момент равнодействующей плоской системы сил относительно точки равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки

$$m_0\left(\vec{R}\right)=\sum m_0\left(\vec{F}_k\right)$$

Пара сил и ее свойства

- Парой сил называется система, состоящая из двух сил, равных по модулю, противоположных по направлению и не лежащих на одной прямой .
- Плоскость, в которой лежат силы пары, называется плоскостью действия пары, а кратчайшее расстояние между силами пары называется плечом пары.



$\vec{F}_1 = - \vec{F}_2$

- Моментом пары называется алгебраическая величина, модуль которой равен произведению одной из сил на плечо пары

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2\, d.$$

- Момент пары считается положительным, если пара стремится повернуть тело против часовой стрелки, и отрицательным, если пара стремится повернуть тело по часовой стрелке.

Часто пары изображают в виде круговой стрелки и называют пару сосредоточенным моментом .

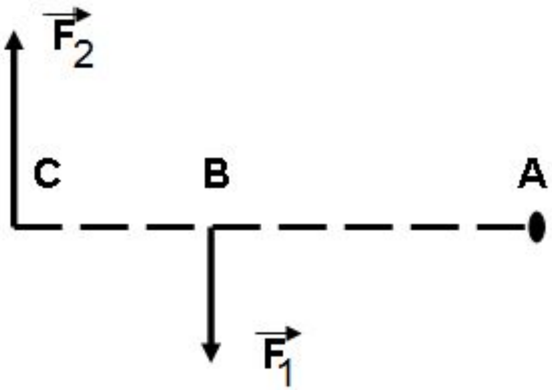
Поскольку действие пары определяется ее моментом, то если на тело действует несколько пар, лежащих в одной плоскости, то их можно заменить одной парой с моментом, равным сумме моментов слагаемых пар:

$$M=\Sigma Mk.$$

Отсюда следует условие равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости: для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов была равна нулю

$$\Sigma Mk=0.$$

Отметим еще одно важное свойство пары сил: *сумма моментов сил пары относительно любой точки равна моменту пары*. Возьмем пару сил F_1 и F_2 и произвольную точку A .

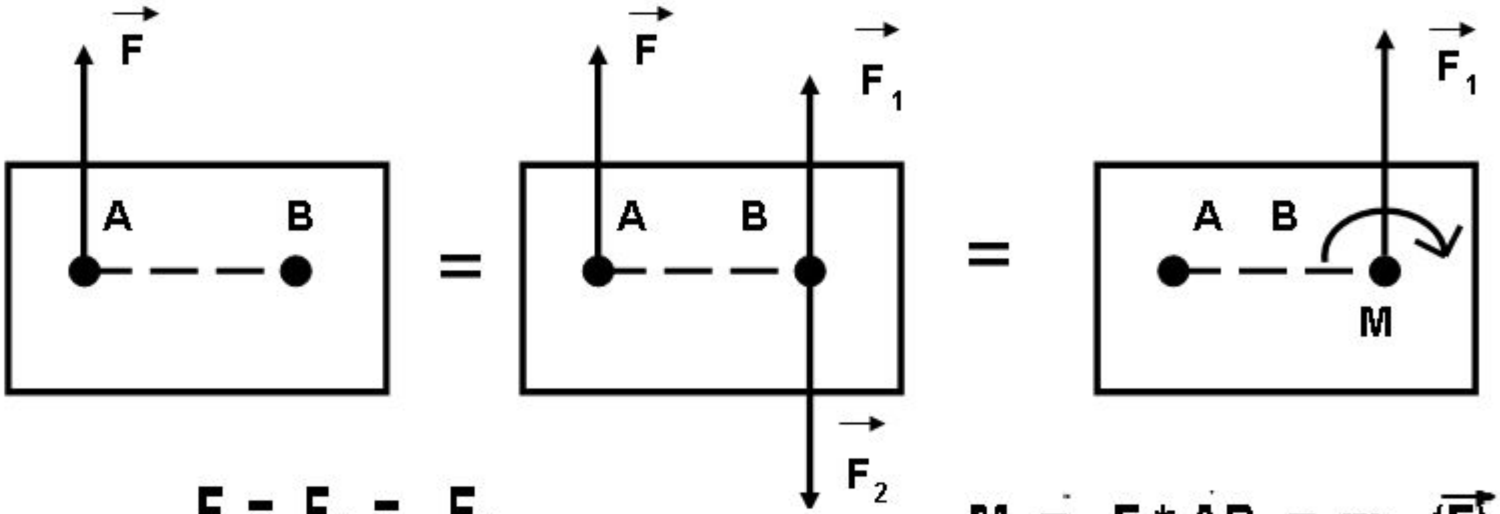


$$m_A\left(\vec{F}_1\right)+m_A\left(\vec{F}_2\right)=F_1AB-F_2\left(AB+BC\right)=$$

$$=F_1AB-F_1AB-F_2BC=-F_2BC=m.$$

Это значит, что вращательное действие пары относительно любой точки одинаковое

Теорема о параллельном переносе силы



$$F = F_1 = F_2 \qquad M = -F * \overline{AB} = m_B(\vec{F})$$

Приложим в произвольной точке B уравновешенную систему сил F_1 и F_2 по модулю равных F и параллельных к ней. Тогда силы F и F_2 образуют пару сил, которую отобразим в виде момента M.

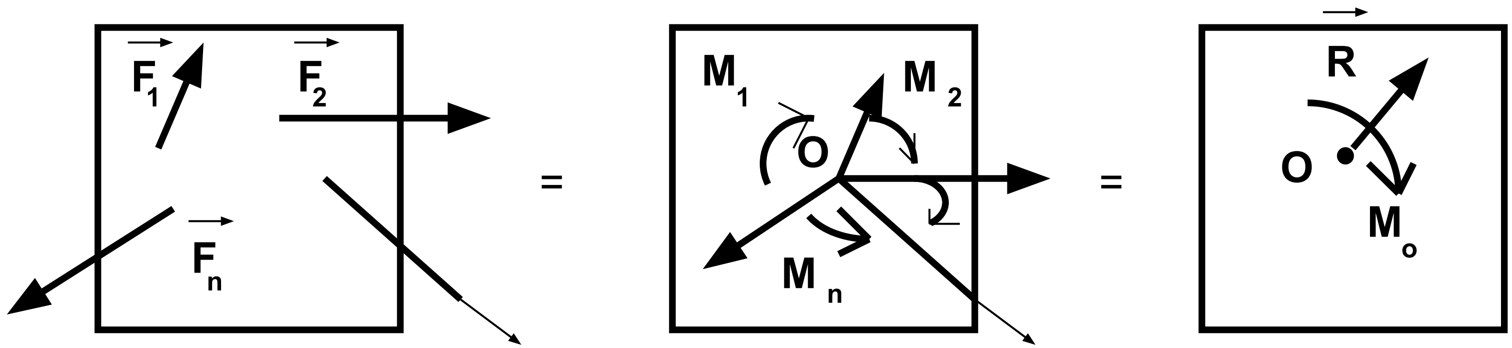
В результате имеем систему, состоящую из силы F, приложенной в точке B, и равную по модулю F_1, и пару сил с моментом M, равным моменту силы F относительно точки B.

Таким образом, мы доказали теорему:

не изменяя действия силы на тело ее можно перенести параллельно самой себе в любую точку, добавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту этой силы относительно точки, в которую она переносится.

Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Теорема о параллельном переносе силы позволяет решить задачу упрощения плоской системы сил. Допустим, на тело действует система сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_n$



$\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ $\quad$ $M_o = \sum m_0(\vec{F}_k)$

Выберем произвольную точку O, которая называется центром приведения, и, используя теорему о параллельном переносе силы, перенесем все силы в точку O, добавляя при этом пары сил с моментами, равными моментам сил относительно этой точки. Тогда получим в точке O сходящуюся систему сил и систему пар. Эти силы заменим одной силой, равной геометрической сумме всех сил, а пары - одной парой, с моментом, равным сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения (главному моменту системы относительно точки O).

Таким образом, приводя плоскую систему сил к центру, ее можно заменить системой, состоящей из одной силы и одной пары.

Отсюда следует, что данная система будет находиться в равновесии, если результирующая сила и момент результирующей пары будут равны нулю.

Аналитически сила будет равна нулю, если равны нулю ее проекции на оси X и $У$, то есть для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на оси X и $У$ и сумма моментов всех сил относительно произвольной точки были равны нулю

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum \mathrm{m}_0(\vec{F}_k) = 0$$

Эти формулы называются уравнениями равновесия плоской системы сил.

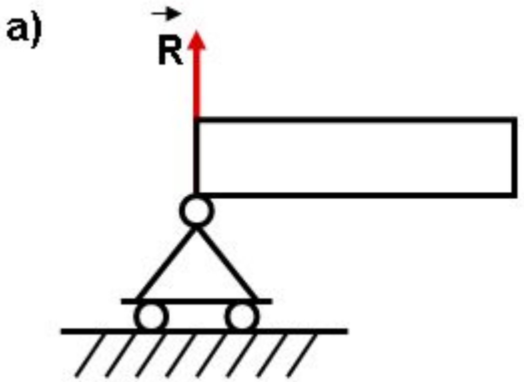
Опорные устройства балок

- Балкой называется тело, размерами сечения которого по сравнению с длиной можно пренебречь и которое предназначено, главным образом, для восприятия поперечных нагрузок.

  Связями для балок могут служить рассмотренные ранее гибкие связи, стержни и гладкие поверхности, но, как правило, применяются и специальные опорные устройства. Рассмотрим три вида опорных устройств.

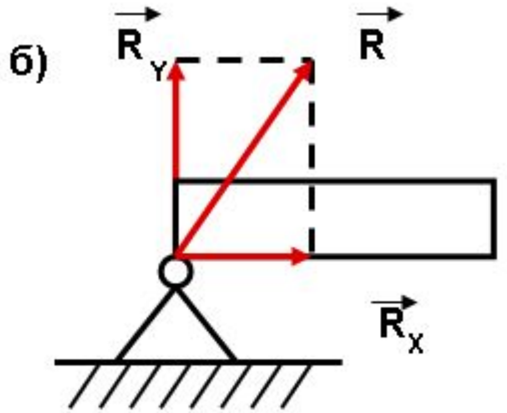
- .

1. Шарнирно подвижная опора



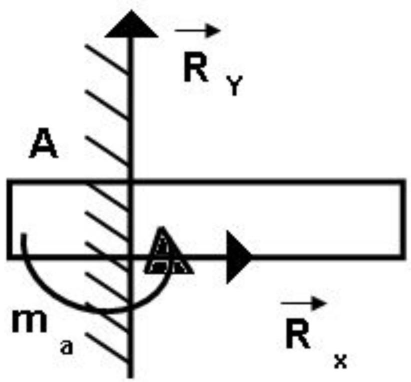
Такая опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение, параллельное опорной поверхности. Следовательно, реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности

2. Шарнирно неподвижная опора



- Эта опора допускает только поворот вокруг оси шарнира и препятствует перемещению закрепленного в ней тела в любом направлении, поэтому и направление реакции неизвестно. Обычно вместо определения полной реакции ее разлагают на две составляющих

3. Жесткая заделка



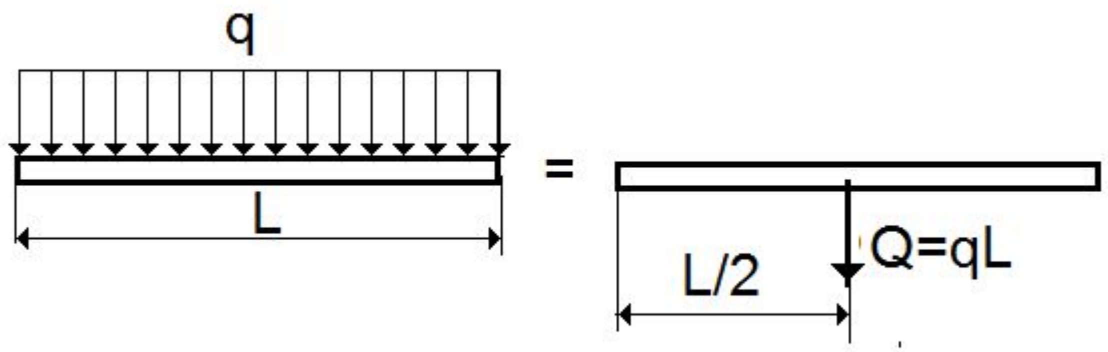
Заделка препятствует повороту и любому перемещению балки, поэтому неизвестна не только величина и направление реакции R, но и ее точка приложения. Приводя все реактивные силы к точке A, заменяем их реакцией , которую разлагаем на составляющие R_x и R_y и парой сил с моментом m_a, который называется реактивным моментом.

Если нагрузка распределяется по участку равномерно – то называется равномерно распределенной

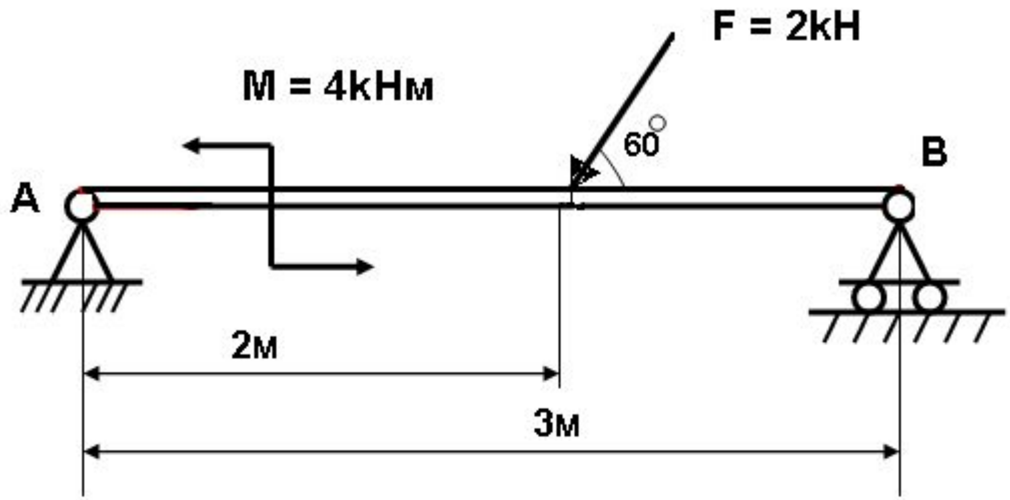
Такая нагрузка характеризуется интенсивностью *q*

Интенсивность – *это нагрузка на единицу длины, размерность q [н/м]*

При расчетах ее заменяют равнодействующей Q, величина которой равна произведению интенсивности на длину участка, где приложена распределенная нагрузка, и приложенной посередине этого участка



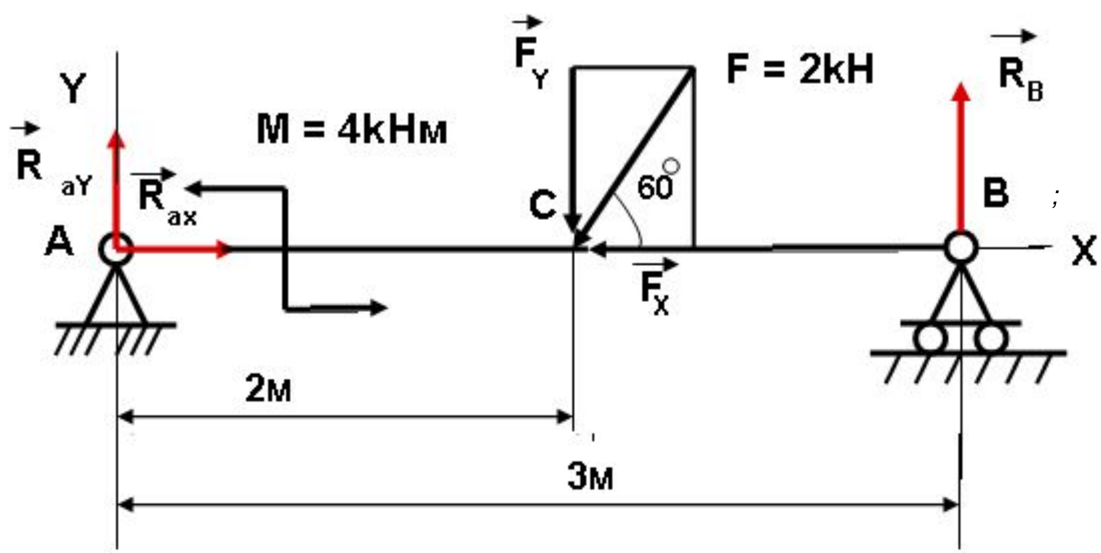
Пример . Определить реакции шарнирно опертой балки, нагруженной силой F и парой сил с моментом *M*.



Решение. Объектом равновесия является вся балка, нагрузка на которую показана на чертеже.

Отбросим связи - шарниры *A* и *B*. Реакцию неподвижного шарнира *A* разложим на две составляющих - и , а реакция подвижного шарнира *B* будет направлена перпендикулярно опорной плоскости.

Таким образом, на балку действует плоская произвольная система сил, для которой можно составить три уравнения равновесия. Выберем оси координат и составим эти уравнения.



Уравнения проекций

$$1.\ \Sigma F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} - F\cdot\cos(60) = 0;$$

$$2.\ \Sigma F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} + R_B - F\cdot\cos(30) = 0$$

(пара в уравнение проекций не входит, так как сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю).

Уравнение моментов составляем относительно точки А, поскольку в ней пересекаются две неизвестные силы. При нахождении момента пары относительно точки А помним, что сумма моментов сил пары относительно любой точки равна моменту пары, а знак момента будет положительным, поскольку пара стремится повернуть тело против часовой стрелки. Для нахождения момента силы F удобно разложить ее на вертикальную и горизонтальную составляющие $F_x = F\cos(60)$, $F_y = F\cos(30$

и воспользоваться теоремой Вариньона, причем следует учесть, что момент от силы относительно точки А равен нулю, поскольку ее линия действия проходит через эту точку. Тогда уравнение моментов примет вид:

3. $\sum m_a(\vec{F}_k) = 0 \quad R_B 3 - F \cdot cos(30) \cdot 2 + M = 0.$

Решая это уравнение, получим

$$R_B = \frac{F\cos(30)\cdot 2 - M}{3} = \frac{2\cdot 0{,}866\cdot 2 - 4}{3} = -0{,}177\ \ кН.$$

Из уравнения (2) находим

$$R_{Ay} = F \cdot cos(30) - R_B = 2 \cdot 0{,}866 - 4 = -2{,}67\ кН,$$

а из уравнения (1) $R_{Ax} = F \cdot cos(60) = 2 \cdot 0{,}5 = 1\ кН$

Расчет составных конструкций

- Твердые тела, равновесие которых рассматривается в статике, являются моделями реальных конструкций элементов сооружений и машин. Однако далеко не всякую конструкцию можно смоделировать как одно твердое тело. Чаще всего ее можно представить в виде нескольких тел, соединенных между собой.

- Составными называются конструкции, состоящие из нескольких твердых тел, соединенных какими - либо связями. Примером является конструкция моста, состоящего из двух половинок, связанных шарниром в точке С (рис.1.32,а).

Пример. Определить реакции жестко защемленной балки длиной 3 м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q=10кН/м (рис.1.31).

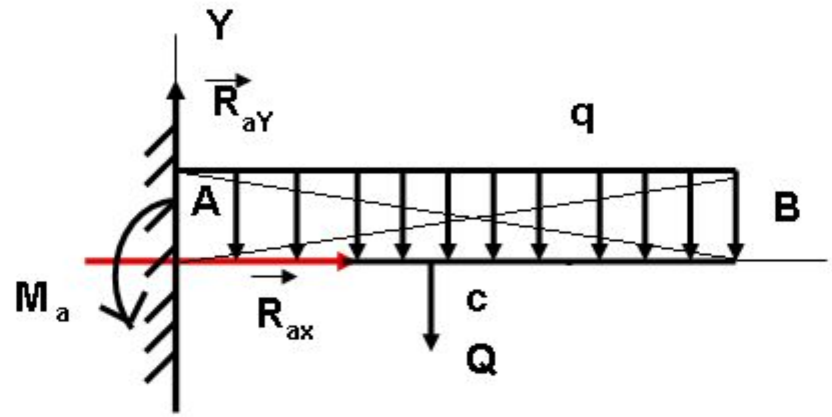


Рис.1.31. Рисунок к примеру

Решение. Заменим равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей $Q = 3 \cdot q = 3 \cdot 10 = 30$ кН. Она будет приложена в середине пролета, то есть на расстоянии АС = 1,5 м. Рассматриваем равновесие балки АВ. Отбрасываем связь - жесткую заделку, а вместо нее прикладываем две составляющие реакции R_{Ax} и R_{Ay} и реактивный момент M_A. На балку будет действовать плоская произвольная система сил, для которой можно составить три уравнения равновесия и из них можно найти искомые неизвестные:

$\Sigma F_{кx} = 0; \quad R_{Ax} = 0;$

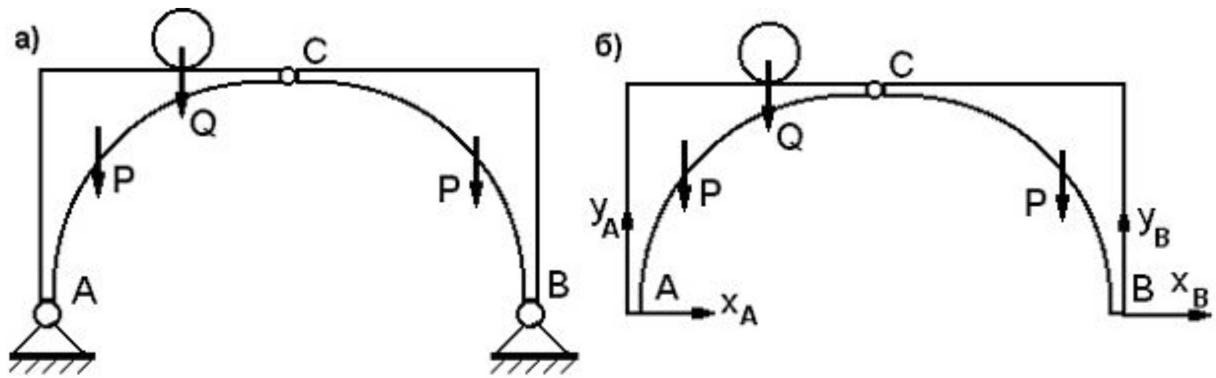
$\Sigma F_{кy} = 0; R_{Ay} - Q = 0; \; R_{Ay} = Q = 30 \text{ кН};$

$\Sigma M_A(F_к) = 0; \; M_A - 1{,}5 \cdot Q = 0; M_A = 1{,}5 \cdot Q = 1{,}5 \cdot 30 = 45 кН \cdot м.$

Расчет составных конструкций

- Твердые тела, равновесие которых рассматривается в статике, являются моделями реальных конструкций элементов сооружений и машин. Однако далеко не всякую конструкцию можно смоделировать как одно твердое тело. Чаще всего ее можно представить в виде нескольких тел, соединенных между собой.

- Составными называются конструкции, состоящие из нескольких твердых тел, соединенных какими - либо связями. Примером является конструкция моста, состоящего из двух половинок, связанных шарниром в точке С.

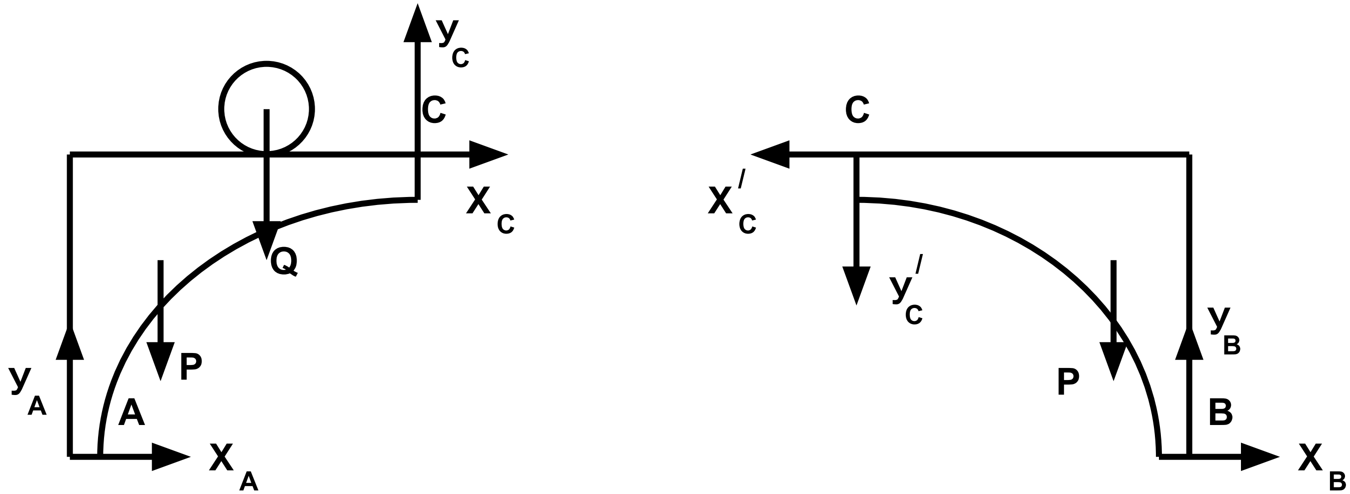


Если отбросить внешние связи – шарниры А и В , то полученная конструкция может деформироваться (поворачиваться вокруг точки С), то есть не является твердым телом.

Для составления уравнений равновесия используется аксиома отвердевания: равновесие деформируемого тела не изменится, если считать его абсолютно твердым. То есть можно составить для данной системы тел такие же уравнения равновесия, как и для абсолютно твердого тела.

Так как на конструкцию действует плоская произвольная система сил, то для нее можно составить три уравнения равновесия, а неизвестных в них будет четыре – X_A, $У_A$, X_B, $У_B$. Поэтому, чтобы найти эти неизвестные, а также реакции внутреннего шарнира X_C, $У_C$, можно использовать два способа.

1. Составить уравнения равновесия всей конструкции, а затем расчленить ее на части, прикладывая при этом реакции внутреннего шарнира С, и составить уравнения одной из ее частей, например левой Таким образом, всего будет шесть уравнений, в которых содержится столько же неизвестных – X_A, $У_A$, X_B, $У_B$, X_C, $У_C$.



Расчет составной конструкции по частям

2. Не составляя уравнения равновесия всей конструкции, рассмотреть равновесие каждой ее части отдельно (рис.1.33), учитывая, что силы взаимодействия между частями равны по величине и противоположны по направлению .$X_c = X'_c$ $Y_c = Y'_c$ Тогда полученная система из шести уравнений будет содержать столько же неизвестных.

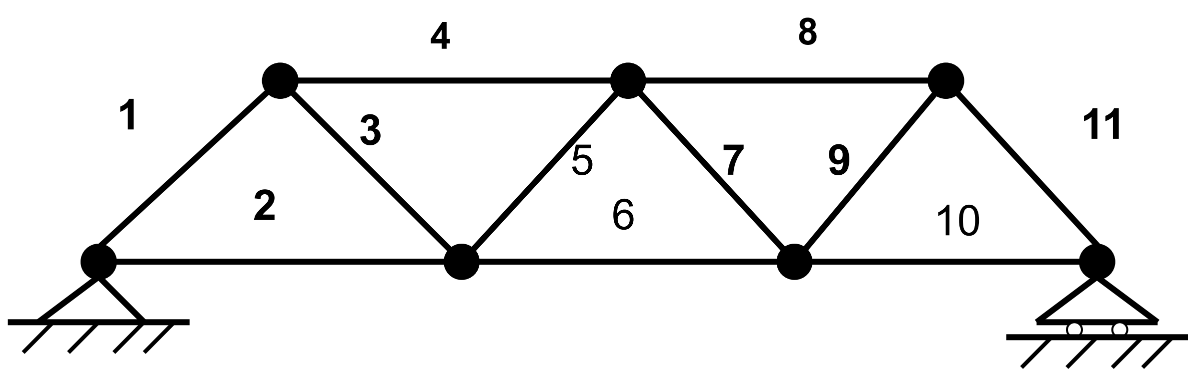
Расчет ферм

Фермой называется конструкция, состоящая из стержней, соединенных шарнирами .

Места соединения стержней называются узлами фермы.

Допущения при расчете ферм:

1. Стержни считаются невесомыми.
2. Нагрузка приложена в узлах фермы.
3. Трение в узлах отсутствует.



Для плоских статически определимых ферм число стержней S и число узлов n связаны уравнением $S=2n-3$. Если $S>2n-3$, то ферма статически неопределима, если $S<2n-3$, то конструкция кинематически изменяема.

Задача расчета ферм состоит в определении усилий в каждом стержне. Для этого вначале составляются уравнения равновесия всей фермы и определяются опорные реакции.

Затем можно использовать два метода.

1. Метод вырезания узлов. Рассматривается равновесие каждого узла начиная с того, в котором соединяются два стержня, поскольку на каждый узел действует плоская сходящаяся система сил, составляются два уравнения:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0$$

2. Метод сечений (Риттера). Делается сечение, проходящее через три стержня, и составляются уравнения равновесия отсеченной части, причем уравнения, как правило, составляются относительно точек, в которых пересекаются линии действия неизвестных усилий

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \sum m_C(\vec{F}_k) = 0$$

Пример. Найти усилия в стержнях фермы (рис.1.36), если $P_1=P_2=2$ кН, $F=1$ кН. Нумерация стержней показана на рис.1.35.

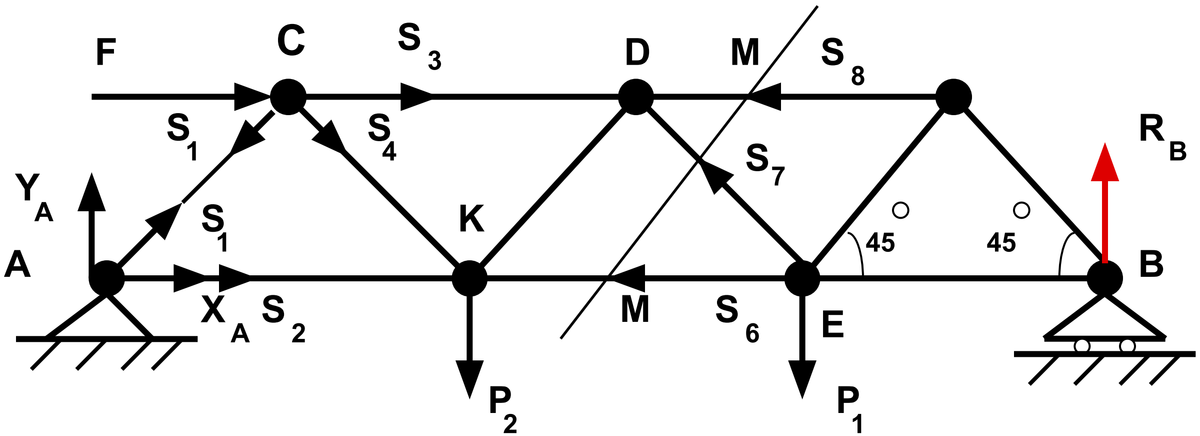


Рис.1.36. Рисунок к примеру

Решение. Составляя уравнения равновесия плоской системы сил, приложенной к ферме, находим опорные реакции:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P_1 - P_2 + R_B = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 3LR_B - 2LP_1 - LP_2 - LF \ / 2 = 0$$

(L – длина горизонтальных стержней).

Отсюда находим X_A=-1кН, Y_A=1,83 кН, R_B=2,17 кН.

Уравнения равновесия узла А:

$X_A+S_2+S_1\cos45=0$, $Y_A+S_1\cos45=0$,

откуда S_1=-2,59 кН, S_2= 2,73 кН.

Знак «минус» означает, что стержень 1 сжат.

Затем можно последовательно рассмотреть равновесие узлов C, K, D и т.д.

Для нахождения усилий в стержнях 6,7 и 8 используем метод Риттера. Для этого делаем сечение, проходящее через эти стержни, и составляем уравнения равновесия для правой части фермы:

$$\sum m_D(\vec{F})_k = R_B 1{,}5L - P_1 L/2 - S_6 L/2 = 0.$$

$$\sum m_E(\vec{F})_k = R_B L + S_8 L/2 = 0.$$

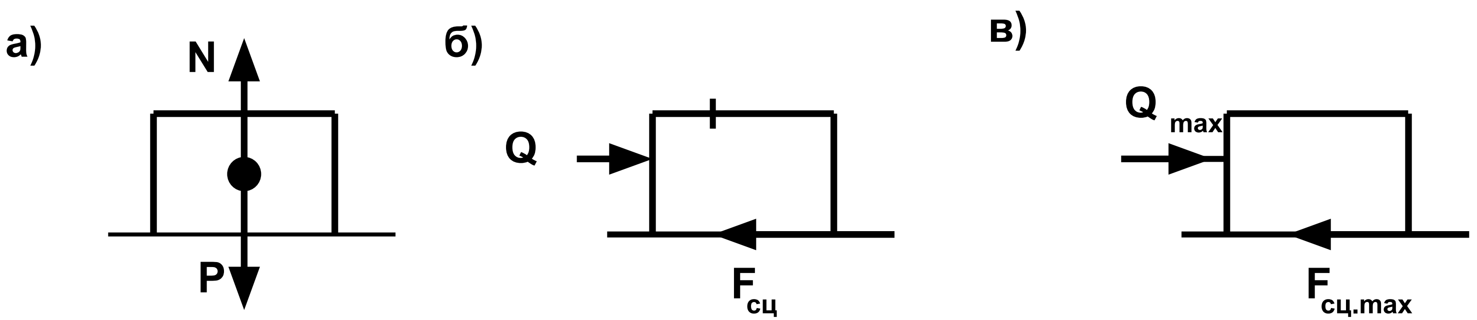
$$\sum F_{ky} = S_7 \cos 45 - P_1 + R_B = 0.$$

Заметим, что уравнения составлены таким образом, чтобы в каждом была только одна неизвестная величина.

ЛЕКЦИЯ 3
Силы сцепления и трения скольжения

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии на горизонтальной шероховатой поверхности .

Если сдвигающая нагрузка отсутствует, то на тело действуют сила тяжести и нормальная реакция .



$Q = F_{сц} = 0$

При приложении небольшой сдвигающей нагрузки в месте контакта поверхностей возникает сила сцепления, по модулю равная этой нагрузке и направленная в противоположную сторону.

При увеличении сдвигающей силы сила сцепления возрастает до тех пор, пока не достигнет максимальной величины, после чего тело срывается с места и начинает скользить.

При скольжении тел на них действует сила трения.

Возникновение сил сцепления объясняется шероховатостью поверхностей, а также силами молекулярного сцепления между частицами поверхностных слоев соприкасающихся тел.

Существуют различные теории сил сцепления и трения. Наиболее простой и распространенной из них является теория Амонтона-Кулона. Приведем основные положения этой теории.

1. Максимальная сила сцепления пропорциональна нормальному давлению и не зависит от площади соприкасающихся поверхностей

$$F_{сц.max} = f_0 N, \qquad (1)$$

где f_0 - коэффициент сцепления (трения покоя).

2. Сила трения при скольжении пропорциональна нормальному давлению

$$F_{тр} = fN, \qquad (2)$$

где f - коэффициент трения при скольжении.

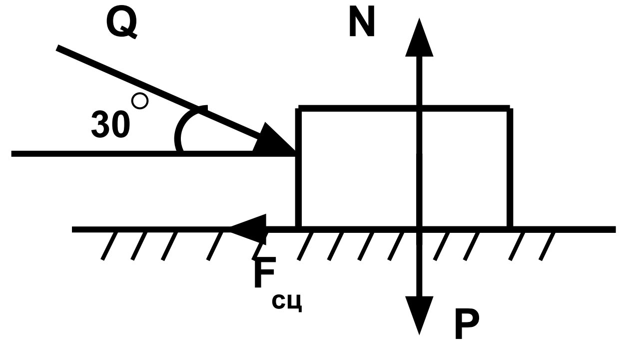
3. Сила трения при скольжении меньше максимальной силы сцепления.

Величина коэффициентов сцепления и трения зависит от вида материалов, степени шероховатости, наличия смазки, температуры и определяется опытным путем.

При наличии сил сцепления может возникнуть два вида задач.

1. Необходимо определить, будет тело двигаться или нет. При этом сила сцепления находится из уравнений предполагаемого равновесия. Если она окажется меньше, чем максимальная, найденная по формуле (1), то равновесие действительно будет, а если больше, то тело на самом деле будет двигаться.

- 2. Имеет место предельное состояние, то есть сила сцепления равна максимальной. В этом случае составляются обычные уравнения равновесия, и к ним добавляется уравнение (1).
- **Пример 1.** На тело весом P=100 H, находящееся на горизонтальной поверхности, действует сила Q=40 H. Будет ли тело находиться в покое, если коэффициент сцепления f=0,5 ?



Решение. Составим уравнения равновесия тела в виде проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси:

$$Q \cdot cos30 - F_{сц} = 0; \qquad N - P - Q \cdot sin30 = 0.$$

Из первого уравнения находим:

$$F_{сц} = Q \cdot cos30 = 40 \cdot 0{,}867 = 34{,}7\ Н,$$

из второго $N = P + Q \cdot sin30 = 120 Н.$

Максимальная сила сцепления

$$F_{сц\ max} = f \cdot N = 0{,}5 \cdot 120 = 60\ Н.$$

Так как $F_{сц} < F_{сц\ max}$, то тело будет находиться в покое.

Пример 2. Определить, какую минимальную силу Q нужно приложить, чтобы сдвинуть тело с места (рис.1.39).

Решение. Так как в этом случае имеет место предельное состояние, то

$F_{сц}=F_{сц\ max}=f\cdot N=f(P+Q\cdot sin30)$.

Подставляем в первое уравнение

$Q\cdot cos30-f(P+Q\cdot sin30)=0$.

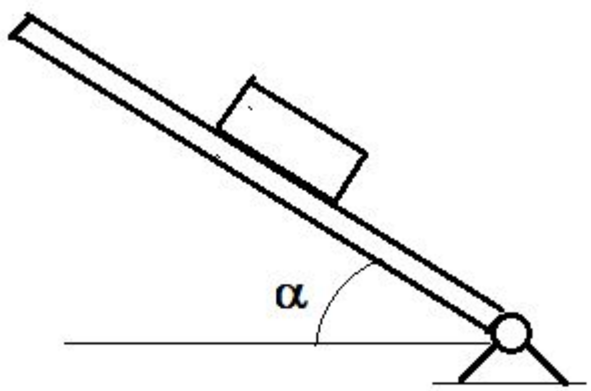
Отсюда

$Q=fP/(cos30-fsin30)$.

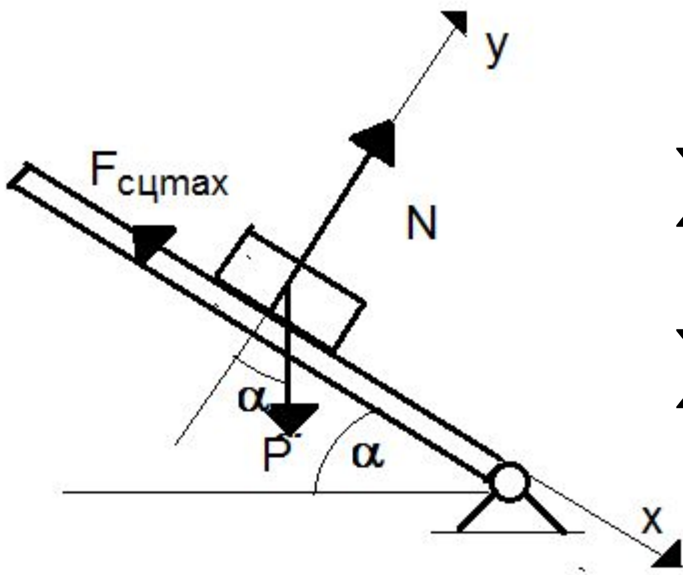
Подставляя значения, находим $Q = 81$ Н.

Опытное определение коэффициента сцепления

- Прибор для определения коэффициента сцепления



Плоскость поворачивают до тех пор, пока тело не начинает скользить и замеряется минимальный угол. Рассмотрим предельное состояние равновесия.



$$\sum F_{kx} = 0. \quad P\sin\alpha - F_{\text{сц}\max} = 0. \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0. \quad N - P\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

$$F_{\text{сц}\max} = f_0 N. \qquad (3)$$

•откуда находим

$$P\sin\alpha = F_{\text{сц}\max} \qquad N = P\cos\alpha \qquad P\sin\alpha = f_0 P\cos\alpha$$

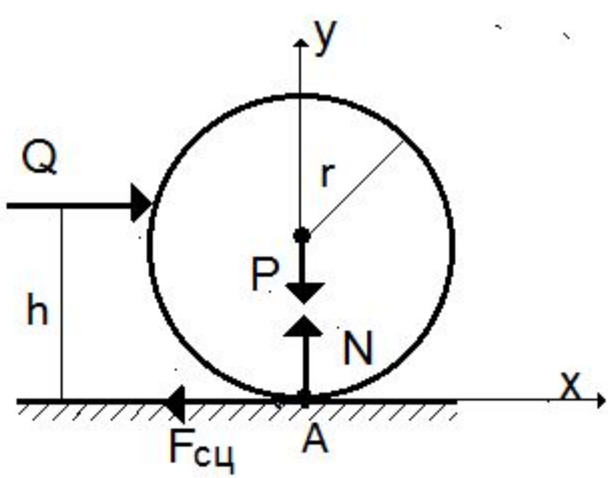
Окончательно получим

$$f_0 = tg\alpha$$

- То есть коэффициент сцепления равен тангенсу минимального угла наклона, при котором тело срывается с места

Трение качения

- Рассмотрим цилиндрическое тело на абсолютно твердой поверхности. Приложим небольшую силу Q и составим уравнения равновесия



$$\sum F_{kx} = 0. \quad Q - F_{\text{сц}} = 0. \qquad (1)$$

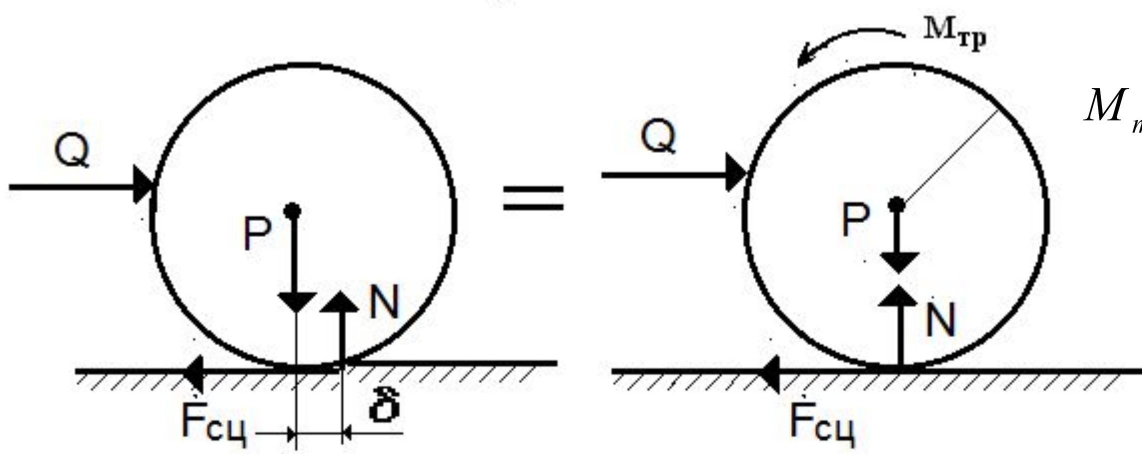
$$\sum F_{ky} = 0. \quad P - N = 0. \qquad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0. \quad -Qh \neq 0. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что тело должно покатиться при любом значении Q

Реальные поверхности являются деформируемыми и реакция N смещается на величину δ

- С увеличение силы Q это смещение возрастает, пока не достигнет максимального, после чего тело покатится.



$$M_{тр} = \delta * N,$$

Максимальное смещение называется коэффициентом трения качения. Размерность – единица длины.
Величина Мтр называется моментом трения качения

- Закон трения: $$M_{mp}^{max} = \delta * N,$$

- где δ – коэффициент трения качения, Условия равновесия: .

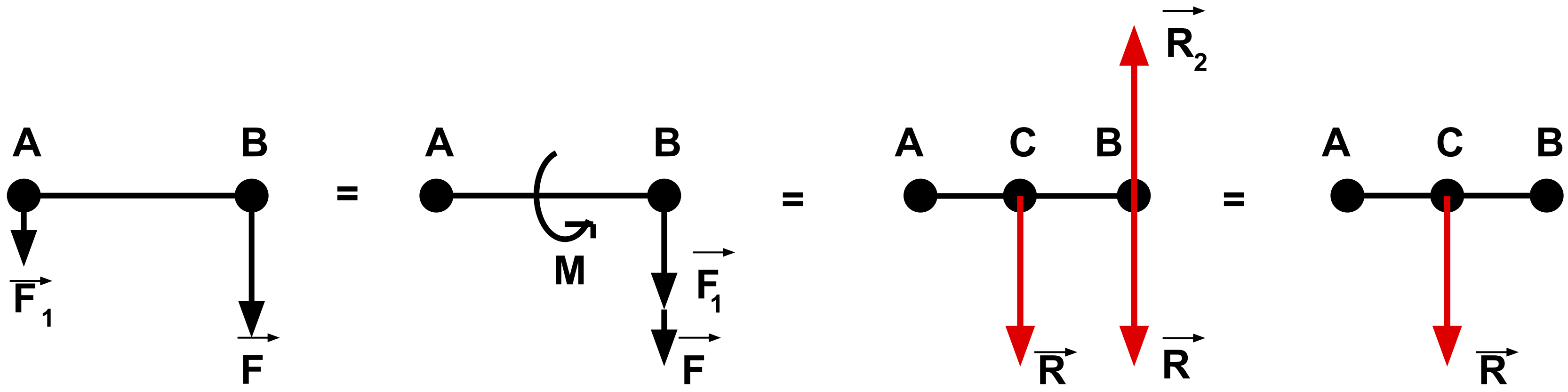
$$\mathbf{M_{вр} \leq M_{тр}^{max}}$$

Коэффициенты трения скольжения и качения для некоторых материалов

МАТЕРИАЛЫ	f	$\delta(см)$
Дерево по дереву	0,25-0,5	0,05-0,08
Кожаный ремень по сухому металлу	0,56	—
Подшипник скольжения при смазке.	0,02-0,08	—
Резина (шины колес)		
по твердому грунту	0,4-0,6	—
по сухому асфальту	0,7	—
по мокрому асфальту	0,4	—
по гололеду	0,1	—
Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)	0,18	0,005
Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник)		
Сталь (или чугун) по феродо		0,001 —
Сталь по льду (коньки)	0,25-0,45	—
Фторопласт по нерж. стали	0,02-0,03	—
Чугун по чугуну	0,064-0,08 0,16	—

Центр тяжести

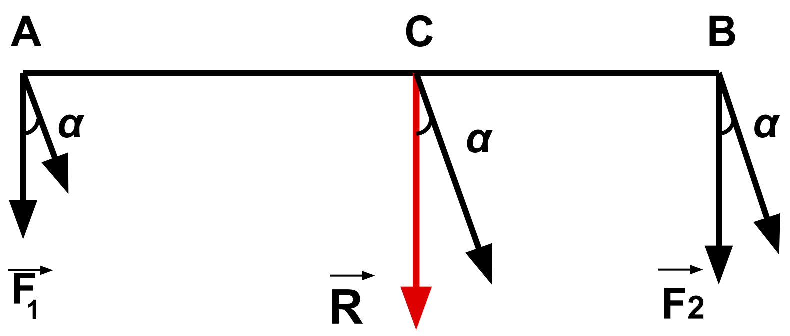
Рассмотрим тело, на которое действуют две параллельные силы



Используя теорему о параллельном переносе силы, перенесем силу в точку B, добавляя при этом момент $M=F_1AB$. Сложим силы F_1 и F_2, заменяя их равнодействующей $R=F_1+F_2$, а момент M отобразим парой, силы которой по модулю равны R, а плечо найдется из соотношения $M=R \cdot BC$. Отбрасывая уравновешенную систему сил R и R_2, приводим систему к равнодействующей, модуль которой равен сумме модулей составляющих сил и приложенной в точке C, расстояние до которой равно $BC=F_1AB/(F_1+F_2)$.

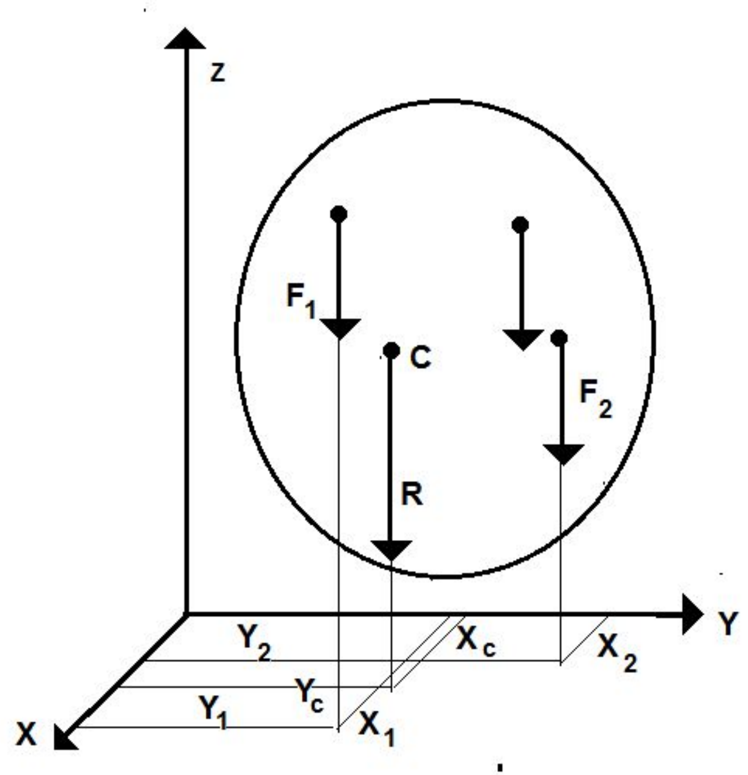
Проводя аналогичные построения и перенося силу в точку А, найдем расстояние $AC=F_2AB/(F_1+F_2)$. Отсюда $AC/BC=F_2/F_1$, то есть равнодействующая делит расстояние между силами на части, обратно пропорциональные силам.

Если обе силы повернуть на один и тот же угол, то равнодействующая их останется равной сумме этих сил и повернется на тот же самый угол, а линия ее действия поделит отрезок АВ на части, обратно пропорциональные величинам задаваемых сил.



Точка С, через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил при повороте их на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Для нахождения координат центра параллельных сил можно воспользоваться теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси У



$$m_y(\vec{R}) = \sum m_y(\vec{F}_k).$$

$$m_y(\vec{R}) = R \cdot X_c = \left(\sum F_k\right) X_c$$

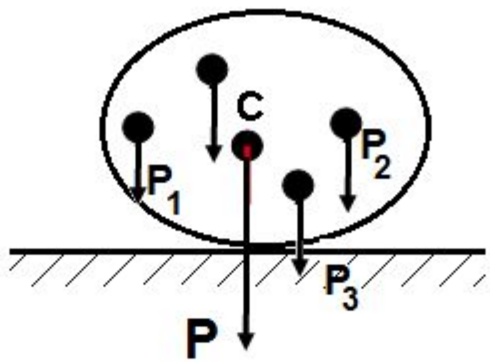
$$X_c = \frac{\sum (F_k X_k)}{\sum (F_k)}.$$

$$Y_c = \frac{\sum (F_k Y_k)}{\sum (F_k)}. \qquad (1)$$

$$Z_c = \frac{\sum (F_k Z_k)}{\sum (F_k)}.$$

Центр тяжести

На тело, находящееся вблизи поверхности Земли действует система параллельных сил тяжести



Равнодействующая этих сил называется **весом тела**.

Точка С, через которую проходит сила тяжести при любом повороте тела, называется **центром тяжести**.

Важной технической задачей при проектировании машин является определение положения центра тяжести.

Для нахождения координат центра тяжести можно воспользоваться формулами (1), если вместо произвольных сил F_k в них подставить вес отдельных частей тела P_k

$$X_c = \frac{\sum(P_k X_k)}{P}. \qquad Y_c = \frac{\sum(P_k Y_k)}{P}. \qquad Z_c = \frac{\sum(P_k Z_k)}{P}. \qquad (2)$$

где Р -вес тела, Рк- вес отдельных частиц, Хк, Ук, Zк – координаты этих частиц

Полученные формулы позволяют найти координаты центра тяжести тел, имеющих конечное количество частей правильной формы.

Центр тяжести симметричных тел всегда лежит в плоскости, на оси или в центре симметрии.

- Для однородного тела его вес, как и вес отдельных частей, можно найти как произведение объема на удельный вес

$$P = \gamma V\ ,\ P_k = \gamma V_k.$$

- Подставляя в формулы (1.17), получим

$$X_c = \frac{\sum (V_k X_k)}{V}, \quad Y_c = \frac{\sum (V_k Y_k)}{V}, \quad Z_c = \frac{\sum (V_k Z_k)}{V}. \qquad (3)$$

Здесь V - объем всего тела,
V_k - объем отдельных частиц.

Если однородное тело представляет собой **однородную линию**, то для него объем V=AcL, а объем отдельных частиц Vк=AcLк,

где Ac – площадь сечения,

L- длина линии,

Lк – длина отдельных частиц.

Подставляя в формулу (2) получим:

$$X_c = \frac{\sum(L_k X_k)}{L}, \quad Y_c = \frac{\sum(L_k Y_k)}{L}, \quad Z_c = \frac{\sum(L_k Z_k)}{L}. \qquad (4)$$

Для плоской фигуры координаты центра тяжести найдутся по формулам:

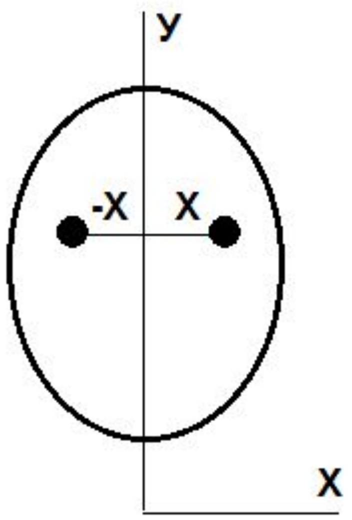
$$X_c = \frac{\sum \left(A_k X_k \right)}{A}. \qquad Y_c = \frac{\sum \left(A_k Y_k \right)}{A}, \qquad (5)$$

где A - площадь всей фигуры,

A_k - площади отдельных частиц фигуры.

Методы нахождения центра тяжести

1. Центр тяжести симметричных тел.



$$X_c = \frac{A_1 X_1 - A_2 X_2}{A_1 + A_2} = 0$$

То есть центр тяжести тел, имеющих ось, плоскость, или центр симметрии находится соответственно на оси, в плоскости или в центре симметрии

2. Метод разбиения.

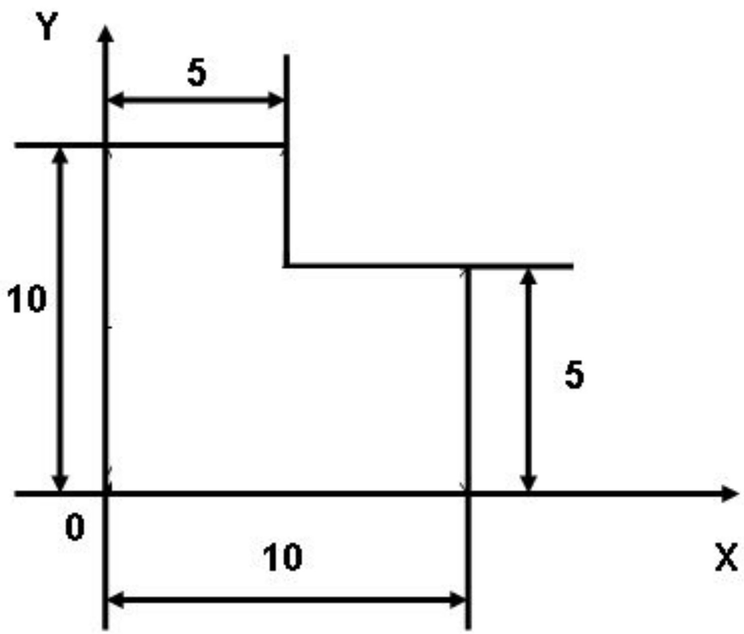
Тело разбивается на части, положение центров тяжести которых известно, а затем используются формулы (3)-(5)

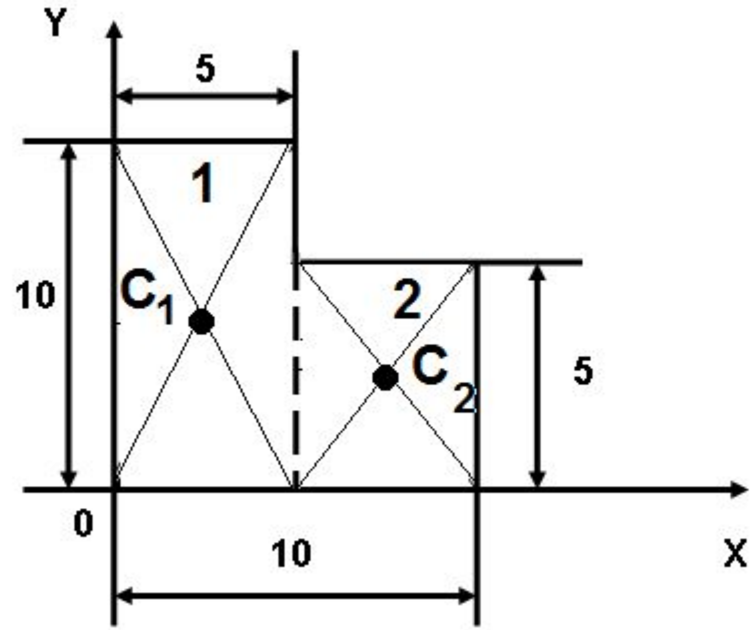
3. Метод дополнения.

Применяется для тел, имеющих вырезы или выемки.

При этом тело дополняется до целого, а вырезанная часть считается составной частью с отрицательным объемом или площадью.

Пример. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры.





Решение. Выберем оси координат с началом в нижнем левом углу фигуры. Разобьем фигуру на 2 части, положение центров тяжести которых С1 и С2 известно. Это прямоугольник 1 со сторонами 5 и 10 см и квадрат 2 со стороной 5 см.

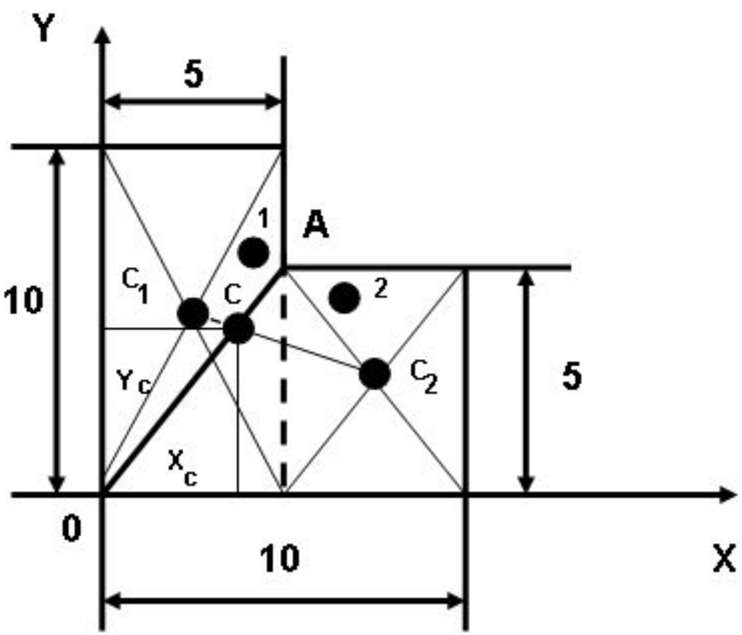
Тогда формула (5) для определения координаты *Xc* примет вид

$$X_c = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2}{A_1 + A_2},$$

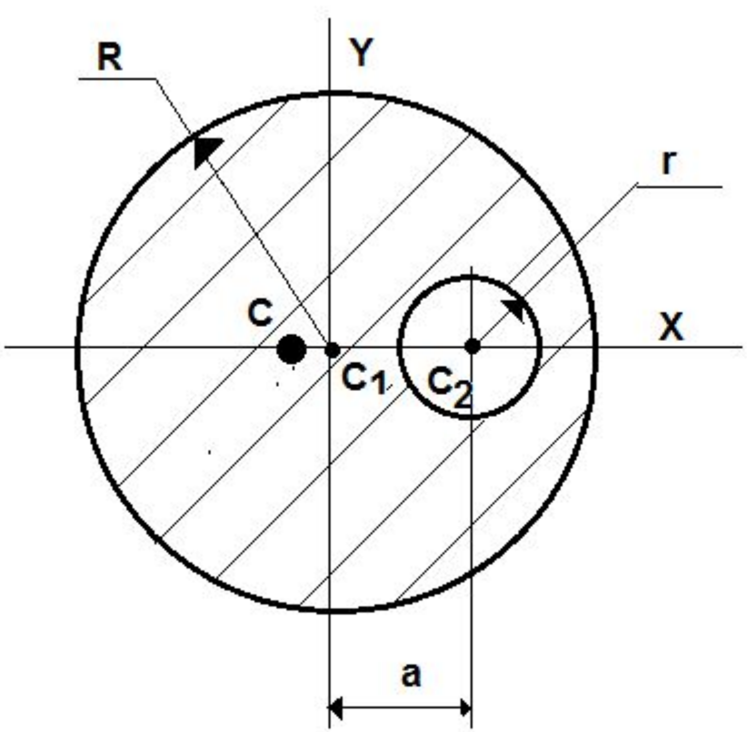
где А1 = 5 · 10 = 50 см2 - площадь первой фигуры,
А2=5 · 5=25 см2 площадь второй фигуры,
Х1=2,5 см - координата центра тяжести первой фигуры,
Х2= 7,5 см - координата центра тяжести второй фигуры. Отсюда

$$X_c = \frac{50 \cdot 2{,}5 + 25 \cdot 7{,}5}{50 + 25} = 4{,}17$$

Аналогично можем найти и координату *Ус* однако это не имеет смысла, так как центр тяжести всей фигуры должен лежать на оси симметрии, которой является линия ОА, поэтому и координата *Ус* также равна 4,17 см.



Пример. Определить центр тяжести фигуры



Разбиваем тело на 2 части.

1. Круг диаметром R
2. Круг диаметром r

$$X_c = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2}{A_1 + A_2},$$

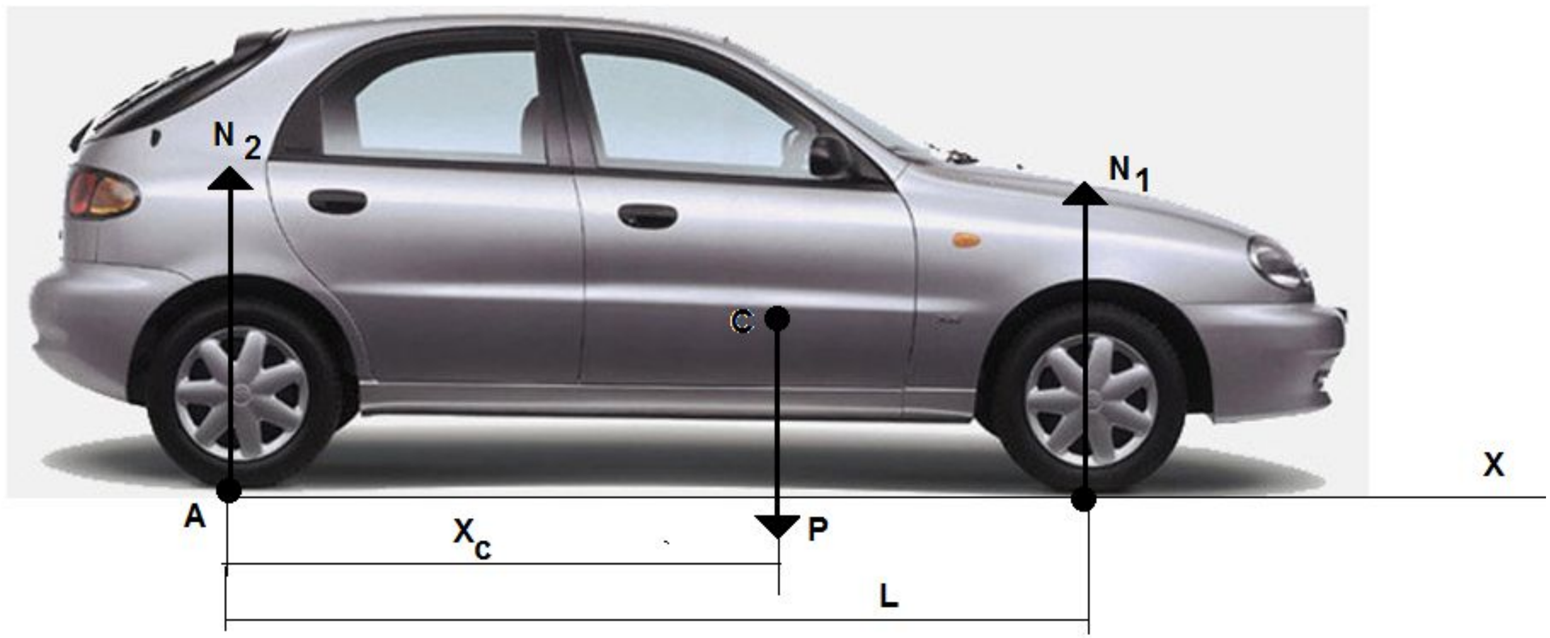
$$A_1 = \pi R^2, \qquad A_1 == \pi r^2, \qquad X_1 = 0, \qquad \mathrm{X}_2 = a$$

$$X_c = \frac{-\pi r^2 a}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\frac{r^2 a}{R^2 - r^2}, \quad Y_c = 0$$

(в силу симметрии)

4. Экспериментальные методы

а) Метод взвешивания



$$\sum m_A(\vec{F}_k) = N_1 L - P X_c = 0, \qquad Xc = N_1 L / P$$

N и P определяются взвешиванием