Основы функционального анализа

Подготовка к КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ
по теме "Линейные пространства. Линейные операторы".

1. В пространстве l_2 найдите нормы и скалярные произведения элементов $x = (1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, ...)$, $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^k}, ...)$ и $z = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, ..., \frac{1}{3^k}, 0, \frac{1}{3^{k+1}}, 0, ...)$.

2. В пространстве $C_2[0, 1]$ найдите скалярные произведения $< x, y >$ и $< u, z >$ и нормы элементов

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t^2, \quad u(t) = t^2 + t^3.$$

3. Найдите норму оператора $A : \mathbf{R}_1^3 \longrightarrow \mathbf{R}_1^2$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите норму оператора $A : \mathbf{R}_1^2 \longrightarrow \mathbf{R}_1^3$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[0,2]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

$$1)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt\ ; \qquad 2)\ f(x) = x(1)\ ;$$

$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - 2x(2)\ ; \qquad 4)\ f(x) = x(0) - 2\int_1^2 x(t)\,dt\ .$$

6. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

$$1)\ f(x) = -2x(-1) + x(0) - x(1)\ ; \qquad 2)\ f(x) = x(-1) + 2x(0) - x(1)\ ;$$

$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(-1)\ .$$

Решение задач

5. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[0,2]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

$$1)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt\ ; \qquad 2)\ f(x) = x(1)\ ;$$

$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - 2x(2)\ ; \qquad 4)\ f(x) = x(0) - 2\int_1^2 x(t)\,dt\ .$$

1) a) <u>Линейность.</u>

Аддитивность: $f(x_1 + x_2) = \int_0^1 (x_1 + x_2)(t)\,dt =$

$= \int_0^1 (x_1(t) + x_2(t))\,dt = \int_0^1 x_1(t)\,dt + \int_0^1 x_2(t)\,dt =$

$= f(x_1) + f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in C[0,2]).$

Однородность: $f(\lambda x) = \int_0^1 (\lambda x)(t)\,dt =$

$= \int_0^1 \lambda \cdot x(t)\,dt = \lambda \cdot \int_0^1 x(t)\,dt = \lambda \cdot f(x)$

$(\forall x \in C[0,2],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}).$

б) Ограниченность и норма.

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|x\|\,dt = \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq 1 \quad (1)$$

Итак, f – ограниченный линейный ф-л.

Найдем $\|f\|$. Пусть $\bar{x}(t) \equiv 1$.

$\|\bar{x}\| = 1$, $f(\bar{x}) = 1$; след-но, $\|f\| =$

$$= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq f(\bar{x}) = 1, \text{ т.е. } \|f\| \geq 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Longrightarrow \|f\| = 1.$$

2) а) <u>Линейность</u> — самостоятельно.

б) <u>Ограниченность и норма.</u>

$|f(x)| = |x(1)| \le \max\limits_{0 \le t \le 2} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\|f\| \le 1 \ (1)}$

f — огранич-й лин. ф-л.

<u>Найдем $\|f\|$.</u> $\bar{x}(t) \equiv 1$; $\|\bar{x}\| = 1$ и

$f(\bar{x}) = 1.$

След-но, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \ge f(\bar{x}) = 1$, т.е.

$\underline{\|f\| \ge 1 \ (2)}$. $(1), (2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 1}.$

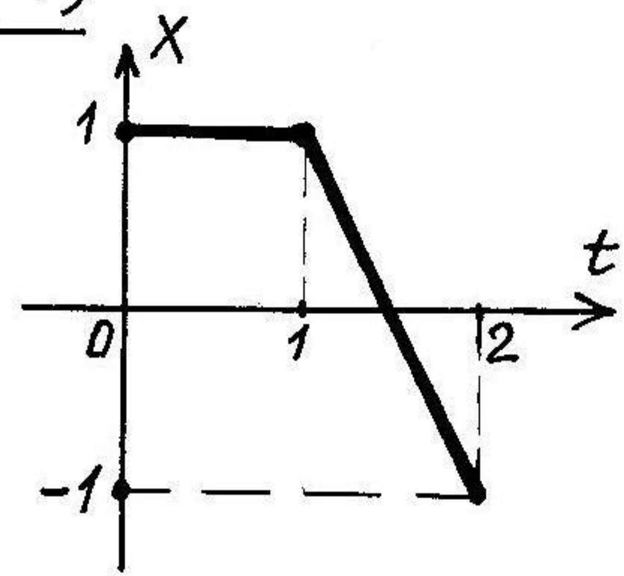
3) а) Линейность — самостоятельно.

б) Ограниченность и норма.

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dt + 2|x(2)| \leq \|x\| + 2\|x\| = 3\|x\|,$$

т.е. $\|f\| \leq 3$ (1)

Найдем такую функцию $\bar{x} \in C[0,2]$, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 3$.



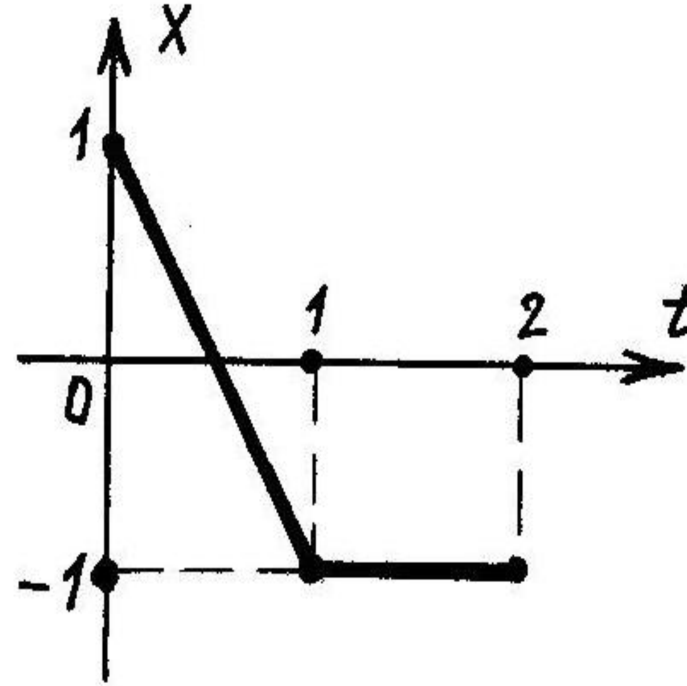
$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ -2t+3, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

Тогда $\|f\| \geq |f(\bar{x})| = 3 \Rightarrow \|f\| \geq 3$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \|f\| = 3$.

4) $\underline{\|f\| \leq 3 \ (1)}$

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} -2t+1, & t \in [0,1], \\ -1, & t \in (1,2]. \end{cases}$$



$$f(\bar{x}) = 3, \quad \|\bar{x}\| = 1.$$

$\underline{\|f\| \geq |f(\bar{x})| = 3 \ (2)}$; $\quad (1),(2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 3}$.

6. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

1) $f(x) = -2x(-1) + x(0) - x(1)$; 2) $f(x) = x(-1) + 2x(0) - x(1)$;

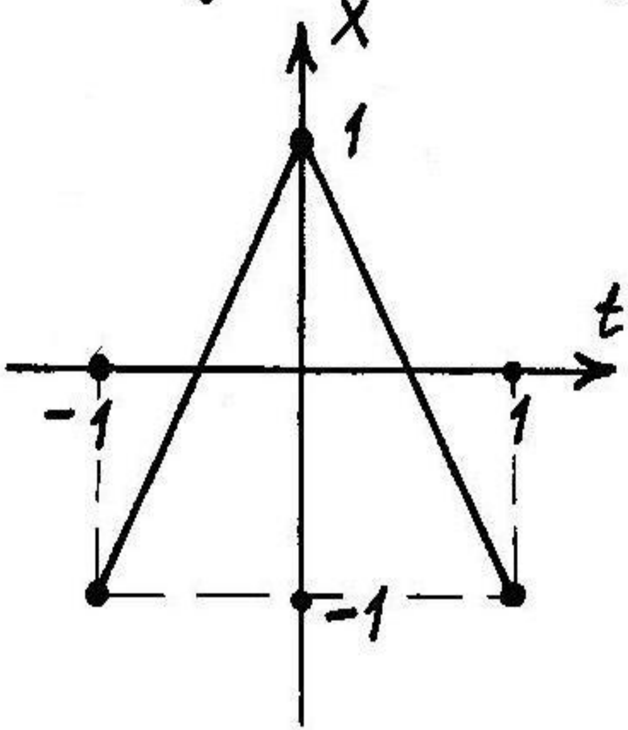
$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(-1)\ .$$

1) $|f(x)| \leq 2 \cdot |x(-1)| + |x(0)| + |x(1)| \leq$

$\leq 2 \cdot \|x\| + \|x\| + \|x\| = 4\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f – ограничен и $\underline{\|f\| \leq 4 \ (1)}$

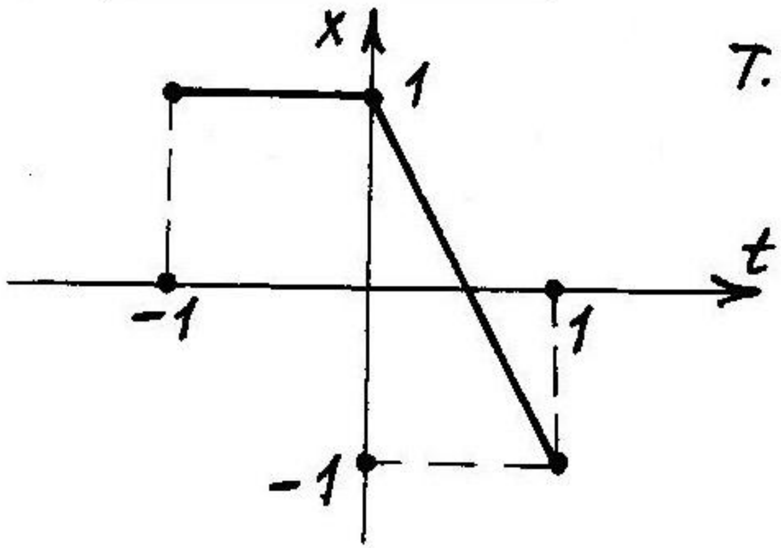
Найдем $\bar{x}(t)$, такую, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$.



Аналитически описать самост-но!

$\underline{\|f\| = 4.}$

2) $\|f\| \leq 4\ (1)$; $\bar{x}(t): \|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$,



т.е. $\|f\| \geq |f(\bar{x})| = 4\ (2)$

$\|f\| = 4.$

3) $\|f\| \leq 2\ (1)$; $\bar{x}(t): \|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 2.$

$\|f\| = 2.$