

Основные понятия теории вероятностей

Базовые понятия теории вероятности

- Событие
- Опыт
- Переменная величина

Понятие опыт

Определение. Под опытом понимается воспроизведение некоторого комплекса условий. При этом предполагается, что опыт может быть повторен сколько угодно раз.

Пример 1. Экономический объект – рынок подержанных автомобилей.

Опыт – **продажа конкретного автомобиля.**

Комплекс условий: **наличие автомобилей, покупателей и сделок купли продажи.**

Данные условия можно повторить много раз.

Пример 2. Бросание игрального кубика.

Опыт- **бросок.**

Комплекс условий- **наличие кубика и игроков.**

Пример 3. Объект- элементарная макро модель Кейнса:

$$C = a_0 + a_1 Y + U$$

$$Y = C + I$$

Опыт- функционирование экономики.

Комплекс условий- наличие инвесторов и потребителей.



Понятие события

Определение. Пусть имеется некоторый опыт.
Событие, связанное с этим опытом, называется любой его исход.

При этом событие называется случайным, если оно может появиться или не появиться в данном опыте.

Обозначение: D: (описание события)

Пример 1. Опыт-продажа подержанных автомобилей.
Случайное событие- продажа 3-х летнего автомобиля за 0.5 цены.

Это событие может появиться, а может и не появиться при повторении опыта.

Пример 2. Опыт-бросание игрального кубика.
События: A: (Выпадение четного числа)
B: (Выпадение шестерки)



Понятие вероятности появления события

Мером возможности появления события A : в данном опыте служит вероятность появления этого события в опыте.

Определение. Пусть A - случайное событие, связанное с некоторым опытом. Предположим, что опыт повторен n раз, в итоге событие A появилось в опытах n_a раз. Тогда дробь n/n_a называется относительной частотой появления события A в опытах, а вероятность $P(A)$ появления события A определяется как предел этой дроби при многократном повторении опыта:

$$P(A) = \lim \left(\frac{n_a}{n} \right) \quad \text{при} \quad n \Rightarrow \infty \quad (3.1)$$



Свойства вероятности события

1. Вероятность события приблизительно равна относительной частоте появления события: $P(A) \approx n_A/n$
2. Из определения следует, что область определения $P(A)$ – интервал $(0, 1)$

Замечание. Иногда вероятность случайного события можно определить априори не прибегая к испытаниям.

Например, опыт с игральным кубиком, вероятность появления любого числа из набора (1 2 3 4 5 6) одинакова и равна $1/6$.



Достоверное и невозможное события

Определение. Пусть R событие, связанное с некоторым опытом, которое всегда появляется при его повторении, т.е $P(R) \equiv 1$. Тогда событие R называется достоверным событием.

Определение. Пусть I событие, связанное с некоторым опытом, которое никогда не появляется при его повторении, т.е $P(I) \equiv 0$. Тогда событие I называется невозможным событием.

Пример.

Опыт - бросание игральной кости:

выпадение любого числа из набора (1 2 3 4 5 6) – событие **достоверное**

выпадение числа 7 – событие невозможное



Практически достоверное событие

Определение. Событие V , связанное с некоторым опытом, называется **«практически достоверным»**, если вероятность его появления удовлетворяет условию: $0.95 \leq P(V) \leq 1$

Любое случайное событие W , связанное с опытом, вероятность которого $0 < P(W) \leq 0.05$, называется **«практически невозможным»**.

Установлено, что практически достоверное событие, как правило, появляется при первом проведении опыта.

Если этого не происходит, значит нарушены условия опыта.



Условная вероятность

Определение. Пусть A и B два события, связанные с опытом, причем $P(A) > 0$. Проведено такое количество опытов N , при котором $N_a > 0$ (количество появлений события A). Пусть N_{ab} количество опытов, в которых событие B появилось вместе с событием A .
Отношение N_{ab}/N_a называют относительной частотой появления события B при условии появления события A .

Условная вероятность появления события B есть:

$$P(B/A) = \lim \left(\frac{N_{AB}}{N_A} \right) \quad \text{при} \quad n \Rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Свойства: $P(A|B) \approx N_a/N_{ab}$ $0 \leq P(A|B) \leq 1$



Вероятность совместного события

Разделив числитель и знаменатель (3.2) на N , получим:

$$P(B/A) \approx \left(\frac{\frac{N_{AB}}{N}}{\frac{N_A}{N}} \right) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{при } n \Rightarrow \infty \quad (3.3)$$

где $P(AB)$ – вероятность появления одновременно событий A и B в N опытах.

Пример с кубиком. A :(четное число), B :(число 6).

$P(A)=1/2$, $P(B)=1/6$. Тогда $P(B|A)=(1/6)/(1/2)=1/3$

Событие B совпадает с событием AB , след.

$P(AB)=P(B)=1/6$. Отметим, $P(AB) \neq P(B|A)$.

$P(AB) = P(B|A)$ – условие независимости событий.



Теорема умножения вероятностей

Теорема. Если события A_1, A_2, \dots, A_n суть независимые события, то для них справедливо равенство:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

где: $P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$ – вероятности появления каждого события.

Пример. Бросание двух кубиков.

Событие A : (появление 6 на кубе 1)

Событие B : (появление 6 на кубе 2)

$$P(A) = 1/6, P(B) = 1/6$$

Вероятность появления двух чисел 6 одновременно:

$$P(AB) = P(A)P(B) = (1/6)(1/6) = 1/36$$



Понятие переменная

Определение. Пусть задано множество значений A_x $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Тогда величина X называется переменной, если она может принимать любые значения из множества A_x , а множество A_x называется областью допустимых значений или областью определения X .

Если A_x состоит из набора значений, которые можно пронумеровать (счетное множество), то X – дискретная переменная.

Если A_x представляет собой отрезок или интервал на числовой оси, то такая переменная называется непрерывной.



Дискретная случайная переменная

Определение. Дискретная переменная X с множеством допустимых значений A_x называется случайной, если все ее возможные значения появляются в некотором опыте со случайными исходами $A:(x=t)$ и если для нее задан закон распределения вероятностей.

Первое свойство объединяет все случайные переменные

Второе свойство – обеспечивает индивидуальность каждой случайной переменной.



Закон распределения дискретной случайной переменной

Определение. Законом распределения дискретной случайной величины X называется функция $P_x(t)$, определенная на всей числовой оси, значения которой характеризуют вероятность появления в данном опыте события $V:(x=t)$, и определяется по правилу:

$$P_x(t) = \begin{cases} P(x=t) & \text{при } x \in A_x \\ 0 & \text{при } x \notin A_x \end{cases}$$

где: $P(x=t)$ вероятность события $V:(x=t)$

Закон распределения ДСП называют **вероятностной функцией**



Классические примеры дискретных случайных переменных

Пример 1. Бросание кубика

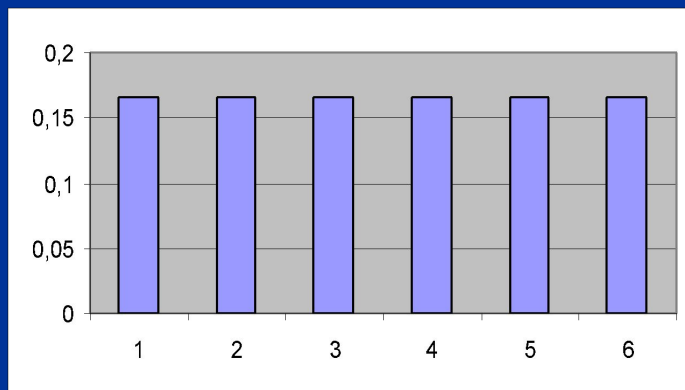
$A_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – область определения

X – цифра на верхней грани (СДП)

Закон распределения –

$$P_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{если } t \in A_x \\ 0 & \text{если } t \notin A_x \end{cases}$$

Пример равновероятного закона распределения



Графическое представление равновероятного закона распределения



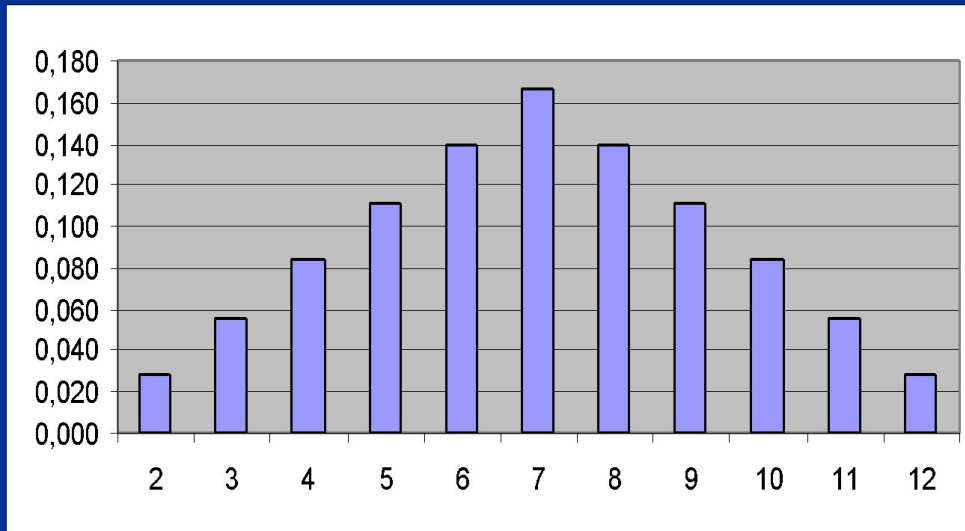
Классические примеры дискретных случайных переменных

Пример 2. Бросание одновременно двух кубиков

X -сумма чисел на верхних гранях кубиков

$A_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ - область определения

Закон распределения X имеет вид



Каждый столбец - суть вероятность появления в опытах соответствующего значения переменной X



Закон распределения непрерывной случайной переменной

В случае, когда X непрерывная случайная переменная, ее закон распределения вероятностей выражается с помощью функции плотности вероятностей, который по определению есть:

$$p_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq x \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t \Rightarrow 0$$

где: $P(t \leq x \leq t + \Delta t)$ – вероятность того, что случайная переменная X примет в опыте значение, лежащее в интервале $(t, t + \Delta t)$



Свойства функции плотности вероятностей

1. Функция плотности вероятности неотрицательна $p_x(t) \geq 0$

2. Вероятность попадания СВ x на отрезок $[a, b]$ есть:

$$P_x(a \leq x \leq b) = \int_a^b p_x(t) dt$$

3. Функция распределения вероятностей связана с функцией плотности вероятностей выражением:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p_x(t) dt$$

4. Справедливо равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(t) dt = 1$$



Примеры законов распределения непрерывных случайных переменных

1. Закон равномерного распределения X на отрезке $[a, b]$

$$p_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{если } t \in [a, b] \\ 0 & \text{если } t \notin [a, b] \end{cases}$$

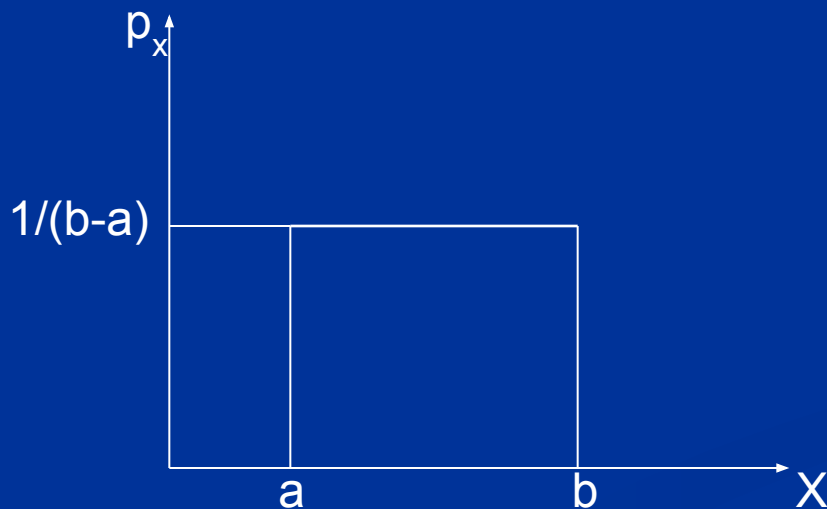


График функции плотности вероятности — отрезок прямой параллельной оси X внутри отрезка $[a, b]$ и ноль вне его.



Примеры законов распределения непрерывных случайных переменных

2. Нормальный закон распределения Гаусса

$$p_x(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2s^2}}$$

где a и s – параметры закона распределения.

Именно, с помощью значений этих параметров удастся персонифицировать различные случайные переменные, подчиняющиеся нормальному закону распределения.

