УРАВНЕНИЯ

Л. А. Янкина, к.п.н., доцент

Уравнения с одной переменной

Пусть f(x) и g(x) – выражения с переменной.

Равенство с переменной **f(x) = g(x)** называется **уравнением с одной переменой**.

Каждое значение переменной, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называется **корнем уравнения** (или **решением уравнения**).

Решить уравнение – значит найти множество его корней (решений).

Примеры:

1) $3 + x = 7 \Rightarrow x = 4$.

Множество решений уравнения $\{4\}$.

2) $(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$.

Множество решений $\{1; 2\}$.

3) Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Множество решений - $\varnothing$.

4) $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 2 \Rightarrow$

$6x + 2 = 6x + 2$.

Множество решений данного уравнения – множество действительных чисел **R.**

С точки зрения ***математической логики***:

Уравнением с одной переменной называется ***одноместный предикат***

$$f(x) = g(x),\ x \in X.$$

Множество решений уравнения – ***множество истинности данного предиката*** (T).

Множество значений переменной ***x***, при которых f(x) и g(x) имеют определенные значения (имеют смысл), называют **областью определения уравнения** или **областью допустимых значений уравнения (X).**

Пример: $$x+\frac{1}{x-4}=7+\frac{1}{x-6}$$

X =]-∞; 4[U]4; 6[U]6; +∞[.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются **равносильными**, если их множества решений равны,

то есть, если каждое решение первого уравнения является решением второго уравнения, и обратно.

Примеры: **1)** $x^2 - 4 = 0, \quad (2x + 4)(x - 2) = 0.$

$T_1 = \{2, -2\}, \quad T_2 = \{2, -2\}, \; T_1 = T_2 \Rightarrow$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x + 4)(x - 2) = 0.$$

2) $(2x + 1)\cdot 3 = 6x + 1, \; x^2 + 1 = 0$

$T_1 = \varnothing, \; T_2 = \varnothing, \; T_1 = T_2 \Rightarrow$

$$(2x + 1)\cdot 3 = 6x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0.$$

Пусть даны два уравнения:

$$f_1(x) = g_1(x), \qquad (1)$$
$$f_2(x) = g_2(x). \qquad (2)$$

Если множество решений уравнения (1) является подмножеством множества решений уравнения (2), то уравнение (2) называют **следствием уравнения** (1), т.е. (1) $\Rightarrow$ (2)

Другими словами, если каждый корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2), то уравнение (2) называется **следствием уравнения** (1).

Пример: $(x + 1)^2 = 16$, $x + 1 = 4$.

$$T_1 = \{3; -5\} \qquad T_2 = \{3\}$$

$$T_2 \subset T_1 \Rightarrow$$

$$x + 1 = 4 \Rightarrow (x + 1)^2 = 16$$

Два уравнения **равносильны** в том и только в том случае, когда *каждое из них является следствием другого*.

ТЕОРЕМЫ О РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЙ

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения

$$f(x) = g(x),\ x \in X \qquad (1)$$

прибавить выражение t(x), имеющее значения при всех $x \in X$, то получится новое уравнение

$$f(x) + t(x) = g(x) + t(x),\ x \in X, \ (2)$$

равносильное данному.

Доказательство

1) Пусть $x = a$ – корень уравнения (1),

то есть $f(a) = g(a)$ – истинное числовое равенство $\Rightarrow$

$f(a) + t(a) = g(a) + t(a)$, то есть $x = a$ – корень уравнения (2).

Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (2) .

2) Пусть x = a – корень уравнения (2), т. е.

$f(a) + t(a) = g(a) + t(a)$ – истинное числовое равенство $\Rightarrow$

Прибавим к обеим частям этого числового равенства число $-t(a)$, получим $f(a) = g(a)$,

то есть $x = a$ – корень уравнения (1).

Таким образом, (2) $\Rightarrow$ (1) .

Итак, уравнения (1) и (2) являются следствиями друг друга, а, значит, они равносильны.

Следствия

1. Если к обеим частям уравнения *прибавить одно и то же число*, то получим уравнение, равносильное данному.

2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) *перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный*, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения

$$f(x) = g(x),\ x \in X \qquad (1)$$

умножить на выражение $t(x)$, которое имеет значение для всех $x \in X$ и не обращается в нуль ни при одном $x \in X$, то получится уравнение

$$f(x) \cdot t(x) = g(x) \cdot t(x),\ x \in X,\ (2)$$

равносильное данному.

Доказательство

Аналогично доказательству теоремы 1 *(самостоятельно)*.

Следствие. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.

<u>Пример:</u> $26 = 2x + 48 \Leftrightarrow -2x = 48 – 26 \Leftrightarrow$

$-2x = 22 \Leftrightarrow x = -11$

Если же в процессе решения уравнения не выполняются условия теорем 1 и 2, то может произойти потеря корней или могут появиться посторонние корни.

Пример: $x(x + 1) = 3x$, $x \in \mathbf{R}$.

$x + 1 = 3$, $x = 2$.

Но $x = 0$ – корень уравнения!

Нарушены условия теоремы 2:

разделили обе части уравнения на ***x***, то есть умножили на выражение $\dfrac{1}{x}$, которое при $x = 0$ не имеет смысла.

Верное решение: $x(x+1) – 3x = 0 \Rightarrow x(x +1 - 3) = 0 \Rightarrow$

$$x(x - 2)=0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Метод разложения на множители

Пусть выражения $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_n(x)$ имеют значения при всех $x \in X$. Тогда число $a \in X$ может быть корнем уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ в том и только в том случае, когда хотя бы одно из выражений $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_n(x)$ обращается в нуль при $x = a$.

Уравнение $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ равносильно дизъюнкции уравнений

$$f_1(x) = 0 \vee f_2(x) = 0 \vee \ldots \vee f_n(x) = 0.$$

<u>Пример</u>: $x(x - 4)(x + 6)(x - 8)=0 \Leftrightarrow$

$$x = 0 \vee x - 4 = 0 \vee x + 6 = 0 \vee x - 8 = 0.$$

$$T = \{0; 4; -6; 8\}.$$

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнение вида

$$ax = b$$

называется **линейным уравнением с одной переменной** (или уравнением первой степени с одной переменной).

$$kx + n = 0$$

Для линейного уравнения $ax = b$ могут иметь место три случая:

1) если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $x = b / a$;

2) если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней. $T = \varnothing$;

3) если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$. $T =]-\infty;+\infty[= R$.

В этом случае уравнение называется *неопределенным*.

<u>Пример</u>: $\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}=\frac{5x}{12}-1$

$$12\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}\right)=12\left(\frac{5x}{12}-1\right)$$

$8 + 3x + 2 - 2x = 5x - 12$

$3x – 2x – 5x = -12 – 10$

$- 4x = - 22$

$x = 5,5$

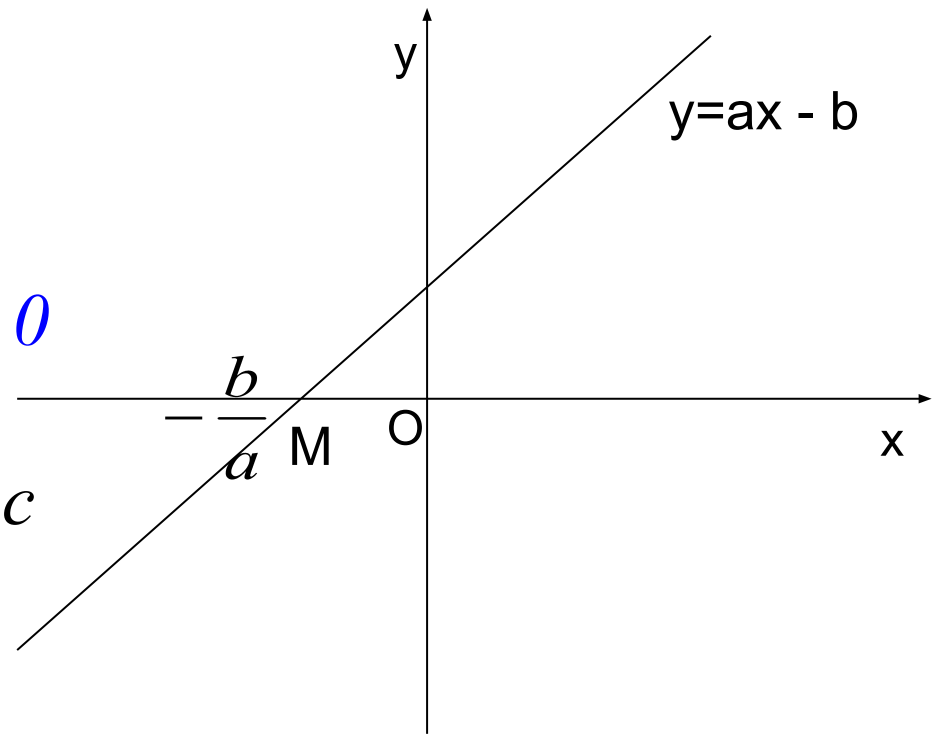
Ответ: $T = \{5,5\}$.

Графическое решение линейного уравнения первой степени

$$ax = b \Rightarrow ax - b = 0$$

Построим графики

$y = ax - b$ и $y = 0$.



Корень уравнения $ax - b = 0$ – абсцисса точки M пересечения этой прямой с осью Ox.

M($-\frac{b}{a}$; 0).

Корень уравнения x = $-\frac{b}{a}$

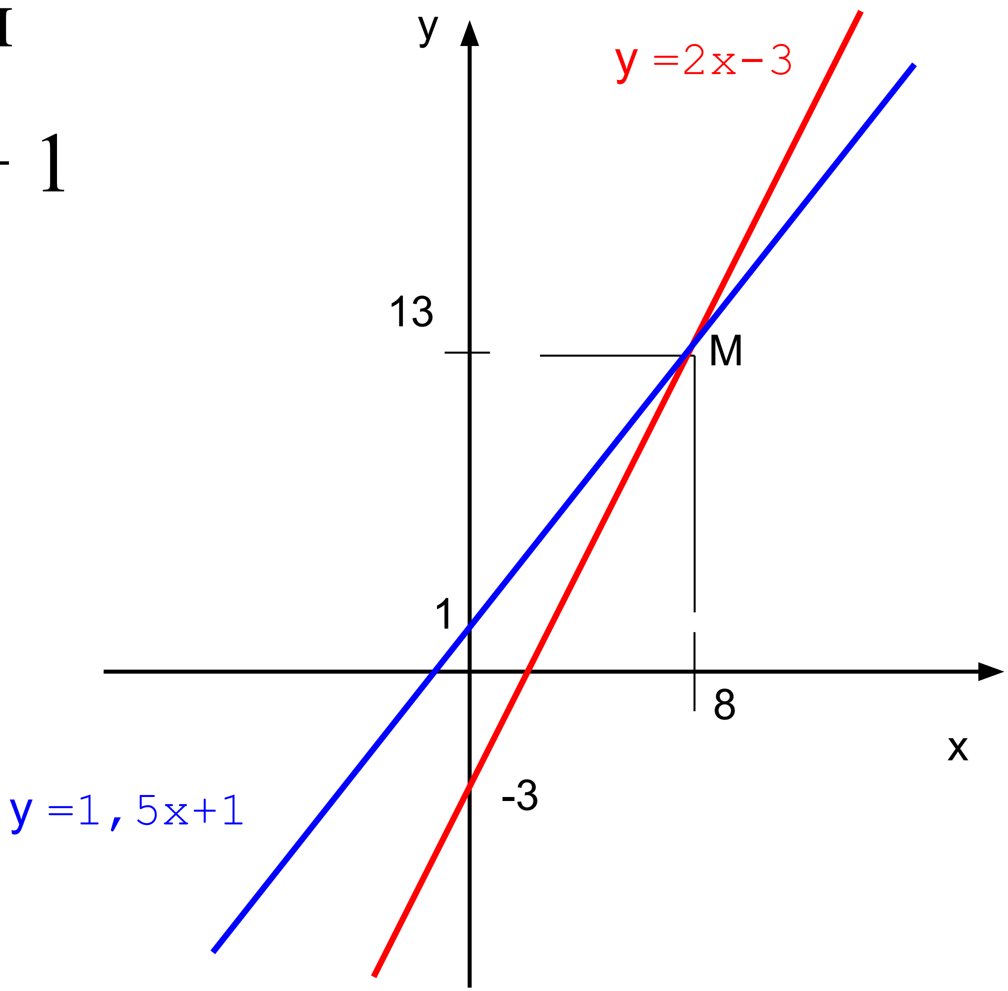
Пример: $2x - 3 = 1{,}5x + 1.$

1) Строим графики линейных функций

$y = 2x - 3$ и $y = 1{,}5x + 1$

2) M – точка пересечения прямых. Абсцисса точки M является корнем данного уравнения: $x = 8$.

Ответ: $T = \{8\}$.



Квадратное уравнение

Уравнение вида

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}, \qquad (1)$$

где a, b, c – действительные числа, причем $a \neq 0$, называют **квадратным уравнением**.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют **приведенным**;

если $a \neq 1$, - **неприведенным**.

Неполные квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении b = 0, или c = 0, или b = c = 0 , то квадратное уравнение называется **неполным**.

1) $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

2) $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

3) $ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

Число 0 является *двукратным* корнем уравнения, то есть $x_1 = x_2 = 0$.

Общая формула корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (2)$$

Выражение **$D = b^2 - 4ac$** называют **дискриминантом** квадратного уравнения (1).

Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет *два действительных корня*.

Если $D = 0$, то уравнение имеет *один* ***двукратный*** *корень*

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ Или говорят «два равных корня».

Если $D < 0$, то уравнение (1) *не имеет действительных корней*.

Приведенное квадратное уравнение

Квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен 1, то есть уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, называется **приведенным**.

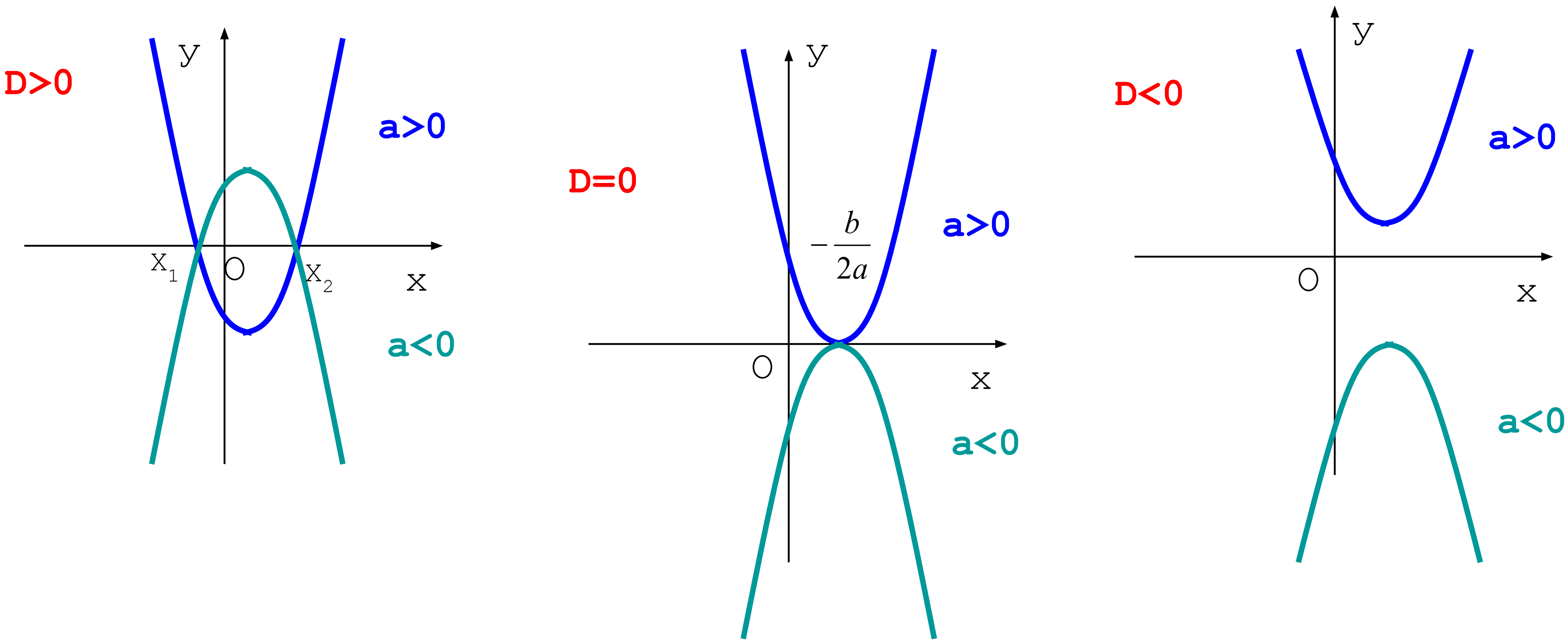
$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Теорема. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену: $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p,}$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Обратная теорема. Если сумма двух неизвестных чисел равна p, а их произведение равно q, то искомые числа являются корнями квадратного уравнения $x^2 - px + q = 0$.

Связь между квадратным трехчленом и квадратным уравнением



Биквадратное уравнение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) называется **биквадратным**.

$t = x^2, \quad t^2 = x^4$ $\qquad$ $\boldsymbol{at^2 + bt + c = 0}$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Дробно- рациональные уравнения

Уравнение f(x) = g(x) называется

дробно-рациональным,

если f(x) и g(x) – *рациональные выражения*, хотя бы одно из которых является *дробным*.

***Чтобы решить рациональное уравнение нужно*:**

1) найти область определения (или область допустимых значений) уравнения (приравнивая знаменатели к нулю);
2) найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;
3) освободиться от знаменателей, умножив обе части уравнения на общий знаменатель;
4) решить полученное целое уравнение;
5) исключить из множества его решений те, которые не входят в область допустимых значений уравнения (то есть обращают в нуль общий знаменатель).

Пример: $\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{x(2-x)}$

$2-\text{x}\neq 0 \Rightarrow \text{x}\neq 2,$

$\text{x}\neq 0$

ОДЗ: $\text{X} =]-\infty;\, 0[\ \cup\ ]0;\, 2[\ \cup\ ]2;\, +\infty[.$

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$$

Общий знаменатель имеющихся дробей $2x(2 - x)$.

$2 \cdot 2x + x(2 - x) = 4 \cdot 2$

$4x + 2x – x^2 = 8$

$x^2 – 6x + 8 = 0$

ОДЗ !

$x_1 = 2, x_2 = 4$

Ответ: $\{4\}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Общий порядок решения задач с помощью уравнений таков:

1. Вводят переменные, то есть буквами x, y, z,... обозначают неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин.

2. С помощью введенных переменных и данных в задаче чисел и их соотношений составляют уравнение (или систему уравнений).

3. Решают составленное уравнение (или систему уравнений) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

4. Если буквами x, y, z,… обозначили не искомые величины, то с помощью полученных решений находят ответ на вопрос задачи.

Задачи на движение

Моторная лодка, собственная скорость которой 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно без остановок за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами 60 км. Найти скорость течения реки.

Пусть **x** км/ч – скорость течения реки.

$(20 + x)$ км/ч – скорость лодки по течению,

$(20 - x)$ км/ч – скорость лодки против течения,

$\frac{60}{20+x}$ ч - время, затраченное лодкой на путь по течению,

$\frac{60}{20-x}$ ч - время, затраченное лодкой на путь против течения.

$$\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=6\frac{1}{4}$$

$$60 \cdot 4 \cdot (20 - x) + 60 \cdot 4 \cdot (20 + x) = 25 \cdot (20 + x)(20 - x)$$

$$4800 - 240x + 4800 + 240x = 10000 - 25x^2$$

$$25x^2 = 400$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4, x_2 = -4 .$$

$$x > 0 \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: скорость течения реки равна 4 км/ч.

Задачи на совместную работу

Объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за **1**.

t - *время*, требующееся для выполнения всей работы,

P – *производительность труда*, то есть часть работы, выполняемой за единицу времени.

$$\mathbf{P \cdot t = 1} \qquad P = \frac{1}{t}$$

Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Пусть **х** ч – время, необходимое для выполнения всей работы первому рабочему,

(х + 5) ч – время, необходимое для выполнения всей работы второму рабочему.

$\frac{1}{x}$ работы выполняет первый рабочий за 1 ч,

$\frac{1}{x+5}$ работы выполняет второй рабочий за 1 ч,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$ работы выполняют оба рабочих за 1 ч.

$$6 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} \right) = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$$

$$6x + 30 + 6x = x^2 + 5x$$

$x^2 - 7x - 30 = 0$

$x_1 = 10$, $x_2 = -3$ – посторонний корень, так как $x > 0$.

$10 + 5 = 15$.

Ответ: первый рабочий может выполнить работу за 10 ч, второй – за 15 ч.

УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Равенство с двумя переменными

$$f(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad f(x, y) = g(x, y)$$

называется **уравнением с двумя переменными**.

Решением уравнения с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти множество всех его решений

Пример: $x - 3y = 10.$

(10; 0), (16; 2), (- 2; - 4) - решения данного уравнения.

Выбрав произвольное значение одной переменной (например **x**), находим соответствующее значение другой переменной (**y**).

С логической точки зрения:

Уравнением с двумя переменными называется ***двухместный предикат***

$f(x, y) = 0$ или $f(x, y) = g(x, y)$

Уравнения с двумя переменными называются **равносильными**, если они имеют одинаковые множества решений.

Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы о равносильных уравнениях (см. тему «***Уравнение с одной переменной***»).

Графиком уравнения с двумя переменными

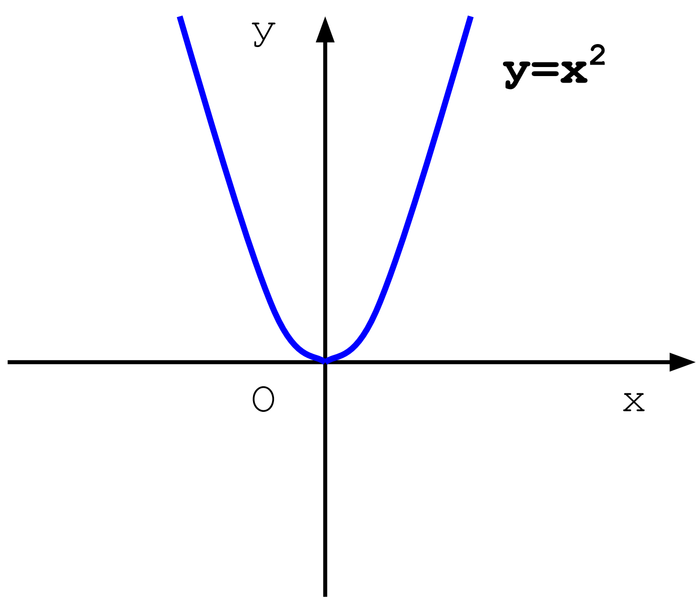
$$f(x,y) = 0$$

называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых служат решениями данного уравнения.

Примеры:

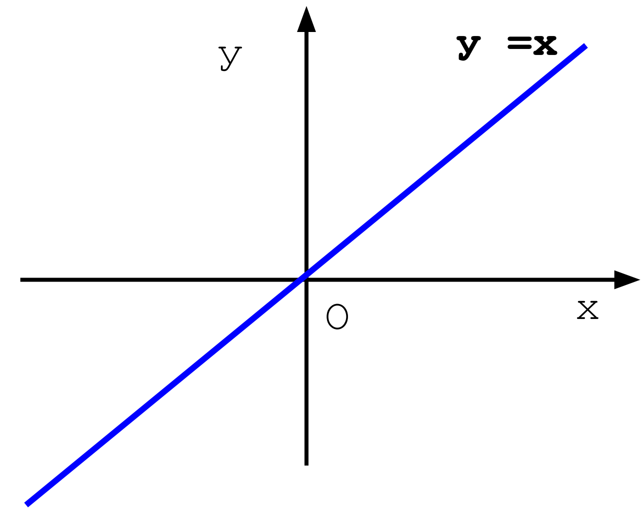
1) $y - x^2 = 0$

$y = x^2$ - парабола



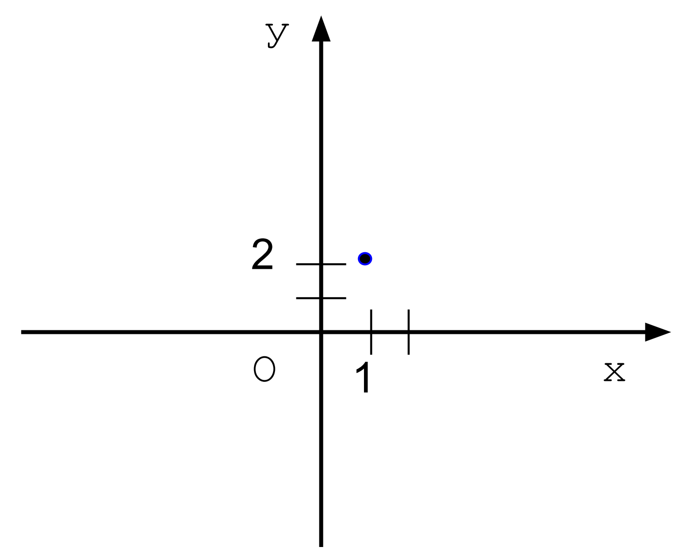
2) $y - x = 0$

$y = x$ - прямая



3) $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 0$

точка (1; 2)



Итак, уравнение с двумя переменными f(x, y) = 0 задает на плоскости некоторую линию, а потому называется **уравнением линии**.

Линейное уравнение с двумя переменными

Уравнение вида

$$ax + by = c$$

называется

линейным уравнением с двумя переменными.

Графиком линейного уравнения $\boldsymbol{ax + by = c}$, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, является **прямая**.

Выразим **у** через **х:** $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ (b ≠ 0) – линейная функция,

ее графиком является *прямая*.

Если b = 0, то ax = c ⇒ x = c/a –

графиком является *прямая*, параллельная оси Оу.

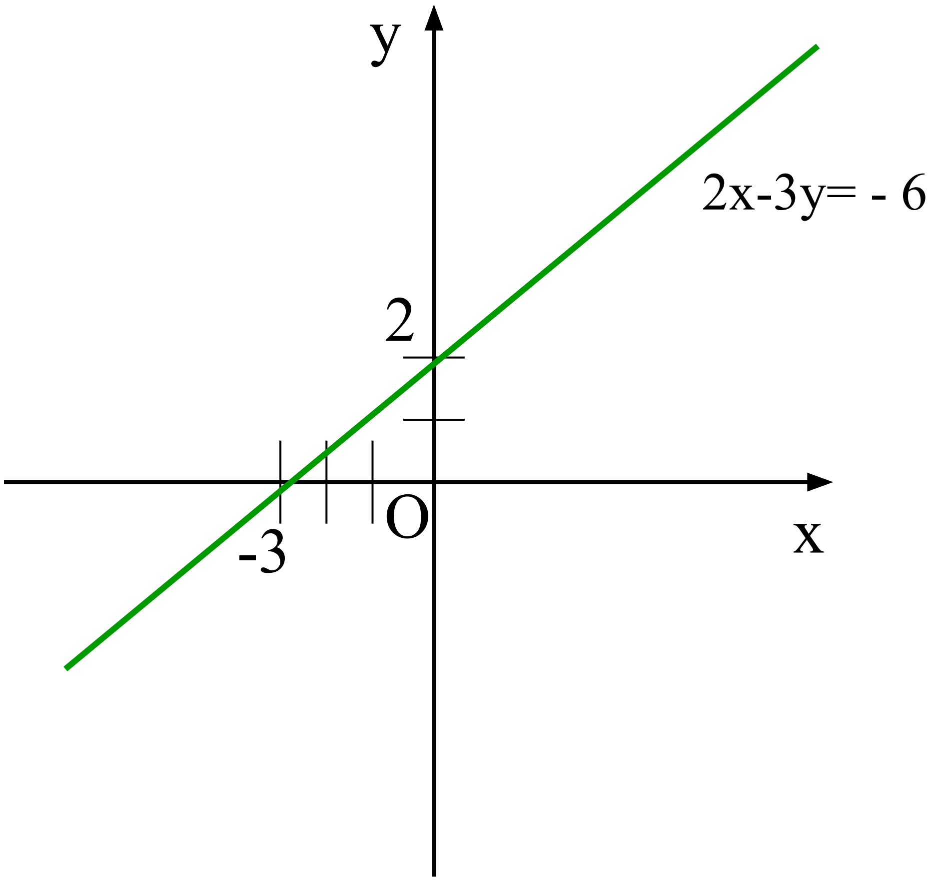
Если a = 0, то by = c ⇒ y = c/b –

графиком является *прямая*, параллельная оси Ох.

Пример: Построить график уравнения $2x - 3y = -6$.

$x = 0 \Rightarrow y = 2, \; y = 0 \Rightarrow x = -3$

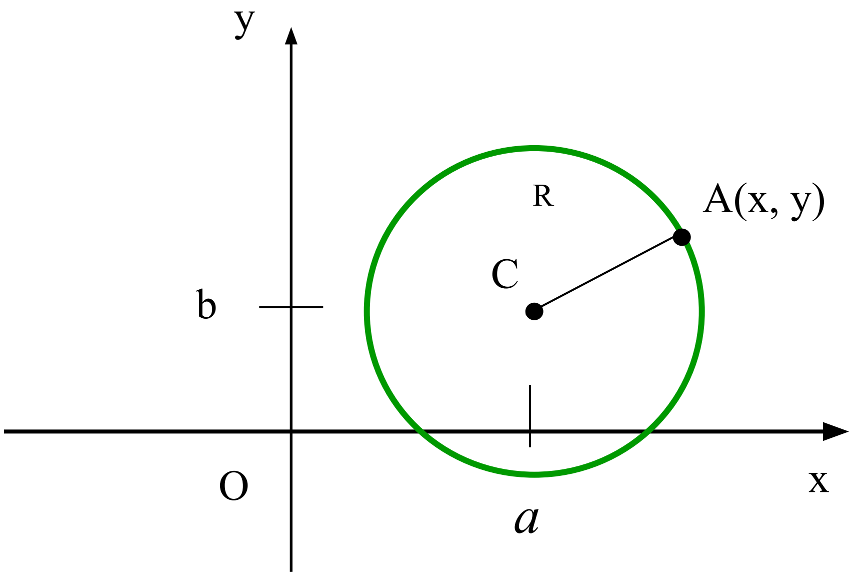
(0; 2) и (-3; 0)



Уравнение окружности

Окружность с центром С (a, b) и радиусом R задается уравнением

$$(\mathbf{x} - a)^2 + (\mathbf{y} - b)^2 = \mathbf{R}^2$$



Примеры:

1) Записать уравнение окружности с центром С (-7; 6) и радиусом 5.

$$(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

2) Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 – 6x + 8y – 75 = 0$$

является уравнением окружности, и найти ее центр и радиус.

Выделим полный квадрат:

$(x^2 – 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) – 75 = 9 + 16,$

$(x – 3)^2 + (y + 4)^2 = 100$

$C\ (3; - 4),\ R = 10.$

3) Составьте уравнение окружности, проходящей через точку А (1; - 1) с центром С (- 2; 3).

$$R = AC = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

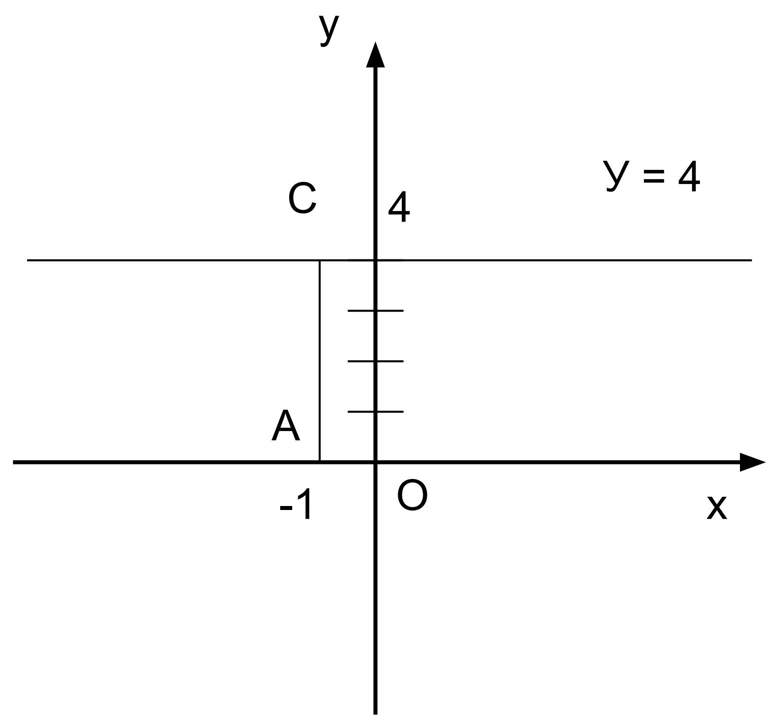
$$R = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$(x + 2)^2 + (y – 3)^2 = 25$$

4) Составить уравнение окружности с центром на прямой у = 4, касающейся оси Ох в точке А(-1; 0).

C(-1; 4)   R = 4

$$(x + 1)^2 + (y – 4)^2 = 16.$$



Спасибо за внимание!