Семинар №25.
(методичка 27)
Векторная алгебра (RStudio)

Задание. Для векторов вычислить следующие выражения

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{p}$ – линейная комбинация векторов

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \vec{p}$ – скалярное произведение векторов

c) $(\vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ – квадрат вектора

d) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ и $|\vec{p}|$ – длины векторов

e) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

f) $2(\vec{a},\vec{b}) \cdot \vec{p} + 3\vec{b} \cdot (\vec{p})^2 - |\vec{b}| \cdot \vec{b}$ – сложное выражение векторной алгебры

Задаем вектора и проверяем результат

```
a  <- c(2, -3, 4, 1)      # Сформировать вектор a из набора чисел 2, -3, 4, 1
b  <- c(-6, 9, -12, -3)   # Сформировать вектор b из набора чисел -6, 9, -12, -3
p  <- c(3, 2, -1, 4)      # Сформировать вектор a из набора чисел 3, 2, -1, 4
a; b; p                   # Смотрим результат
```

Console Terminal

```
[1]  2 -3   4   1
[1]  -6   9 -12  -3
[1]  3   2 -1   4
```

Линейная комбинация (а)

а) **линейные операции** над векторами осуществляются покоординатно, т.е. в нашем случае должен получиться вектор

$$(2a_1 - 3b_1 + p_1;\ 2a_2 - 3b_2 + p_2; \dots;\ 2a_4 - 3b_4 + p_4)$$

```
2*a-3*b+p                  # Вычисление вектора, равного указанной линейной комбинации
```

Console | Terminal

```
[1]  25 -31  43  15
```

с)

б) покоординатное произведение векторов (НЕ используется в векторной алгебре, но удобно в програм $(a_1b_1;\ a_2b_2; \ldots ; a_nb_n)$

скалярное произведение векторов, в результате число $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

```
a*b                # Покоординатное произведение векторов (не скалярное произведение!)
a%*%b              # Скалярное произведение векторов
```

```
Console  Terminal
> a*b                 # Покоординатное произведение векторов
[1] -12 -27 -48  -3
> a%*%b               # Скалярное произведение векторов
     [,1]
[1,]  -90
```

в выводим как число

```
as.numeric(a%*%b)  # Скалярное произведение векторов, как число
as.numeric(a%*%p)  # Скалярное произведение векторов, как число
sum(a*p)           # Фактически тоже скалярное произведение векторов
# если результат  =0, то говорят об ортогональности (перпендикулярности) векторов
```

```
Console  Terminal
> as.numeric(a%*%b)  # Скалярное произведение векторов
[1] -90
> as.numeric(a%*%p)  # Скалярное произведение векторов
[1] 0
> sum(a*p)           # Фактически тоже скалярное произ
[1] 0
> # если результат  =0, то говорят об ортогональности
```

с) **Квадрат вектора** $(\vec{a})^2$ понимается в векторной алгебре как скалярное произведение самого на себя $\vec{a}\cdot\vec{a}$ т.е $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

```
as.numeric(a%*%a) # Квадрат вектора
```

```
Console  Terminal
> as.numeric(a%*%a) # Квадрат вектора
[1] 30
```

Длина вектора (d)

Длиной вектора называют число, равное квадратному корню из вектора и по смыслу это число является длиной отрезка, соединяющего начало и конец вектора,

если его интерпретировать как направленный отрезок в евклидовой геометрии:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

```
norm(a,type="2")    # Длина вектора a (обычная евклидова)
sqrt(sum(a^2))      # Альтернатива: длина вектора a

norm(b, type="2")   # Длина вектора b (обычная евклидова)
sqrt(sum(p^2))      # Альтернатива: длина вектора p
```

Console Terminal

```
> norm(a,type="2")    # Длина вектора a (обычная евклидова)
[1] 5.477226
> sqrt(sum(a^2))      # Альтернатива: длина вектора a
[1] 5.477226
>
> norm(b, type="2")   # Длина вектора b (обычная евклидова)
[1] 16.43168
> sqrt(sum(p^2))      # Альтернатива: длина вектора p
[1] 5.477226
```

Косинуса угла между векторами (е)

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

```r
(a%*%b)/(norm(a, type="2")*norm(b, type="2")) # Косинус угла между a и b
```

Console Terminal

```
     [,1]
[1,]   -1
> #косинус равен -1, тогда угол между векторами =π.
> #След-но векторы коллинеарны (параллельны) и противоположно направлены.
```

чтобы формула не выглядела громоздкой, ее можно было запрограммировать поэтапно

```r
ab <- a%*%b                # Образуем в переменной ab скалярное произведение векторов a и b
L.a <- norm(a, type="2")  # Сохраняем длину вектора a в переменной L.a
L.b <- norm(b, type="2")  # Сохраняем длину вектора b в переменной L.b
ab/(L.a*L.b)               # Получаем косинус угла
```

Console Terminal

```
> ab <- a%*%b                # Образуем в переменной ab скалярное произведение векторов a и b
> L.a <- norm(a, type="2")  # Сохраняем длину вектора a в переменной L.a
> L.b <- norm(b, type="2")  # Сохраняем длину вектора b в переменной L.b
> ab/(L.a*L.b)               # Получаем косинус угла
     [,1]
[1,]   -1
> 
```

Произвольные выражения векторной алгебры

f) Вычислить $2(\vec{a},\vec{b})\cdot\vec{p} + 3\vec{b}\cdot(\vec{p})^2 - |\vec{b}|\cdot\vec{b}$

```r
s1 <- 2*as.numeric(a%*%b)*p # Первое слагаемое
s2 <- 3*b*as.numeric(p%*%p) # Второе слагаемое
s3 <- norm(b, type="2")*b   # Третье слагаемое
s1 + s2 - s3                # Ответ
```

Console Terminal

```
> s1 + s2 - s3                # Ответ
[1] -981.4099  302.1149 -702.8199 -940.7050
```

Примечание

при вычислении скалярных произведений необходимо конвертировать ответ в число с помощью команды **as.numeric()**, иначе произойдет **несовпадение типов** (матрицы и векторы как бы перемешаются в одном выражении) и компилятор R выдаст ошибку.

При вычислении скалярных произведений для многих пар векторов, удобно запрограммировать специальную пользовательскую функцию, скажем, под названием cosV:

```
cosV  <-  function(x,y) {     # Объявление имени функции cosV двух аргументов
  L.x  <-  norm(x, type="2"); L.y <- norm(y, type="2") # Нахождение длин векторов
  cosV  <-  x%*%y/(L.x*L.y)   # Нахождение косинуса угла
  return(as.numeric(cosV))    # Возвращение косинуса в качестве значения функции
}
cosV(a,b)                     # Вызов пользовательской функции cosV
```

Console Terminal

```
> cosV(a,b)                   # Вызов пользовательской функции cosV
[1] -1
```

В Excel можно использовать следующие функции

сумм

Д/З стр.8

№ 1, 2

№ 3 (воспользоваться можно кодом функции)

<u>Дополнительно</u>

(можно считать из Excel)

№ 4 .=0,5 балл

№ 5 - 0,5 балла

Ответы:

1. a) (-4,-24,7) . b) (4,64,-37)

2. |a|=3.605551; |b|=7.28011; (a,b)=0 – да, ортогональны

3. |a|=|b|=7.745967; (a,b)=50; cos(a,b)=0.8333333 >0 – угол острый

4. 5-ый столбец

5. Да, есть ортогональные: 4-ый и 5-ый столбцы

ИСТОЧНИКИ

- Почитать об R
- https://ru.wikibooks.org/wiki/Язык_программирования_R
- https://stat.ethz.ch/R-manual/
- https://aakinshin.net/ru/posts/r-functions/
- https://r-analytics.blogspot.com/p/blog-page_06.html
- Для загрузки пакета Java
  - https://java.com/ru/download/
  - http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/jdk8-downloads-2133151.html