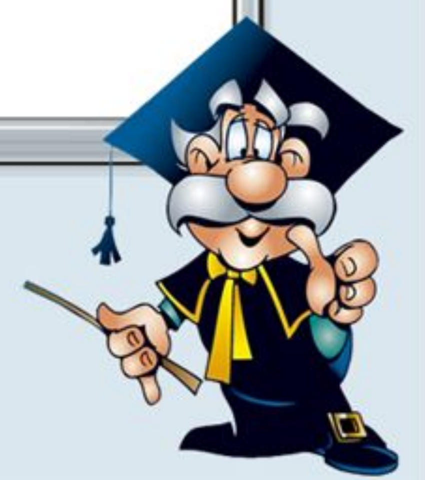
ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Первообразная. Неопределенный интеграл.



Основные вопросы:

- **Определение первообразной. Основное свойство первообразной.**
- **Понятие неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования.**
- **Непосредственное интегрирование (*метод разложения*).**
- **Этапы интегрирования функций методом подстановки (*замены переменной*).**
- **Метод по частям.**
- **Интегрирование некоторых тригонометрических функций**

Определение первообразной. Основное свойство первообразной.

Определение

***Первообразной функцией* по отношению к данной функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная от которой равна данной функции, т.е.**

$$F'(x) = f(x)$$

Для данной функции $y = f(x)$ первообразных функций бесчисленное множество, т.к. любая из функций $F(x) + C$, также является первообразной для $y = f(x)$.

Понятие неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $y = f(x)$ называется ее неопределенным интегралом обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где $f(x)dx$ - называется подынтегральным выражением, функция $f(x)$ - подынтегральной функцией.

Геометрический смысл неопределенного интеграла.

Геометрически, ***неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, полученных путем параллельного переноса графика функции*** $y = F(x)$ ***вдоль оси ординат***

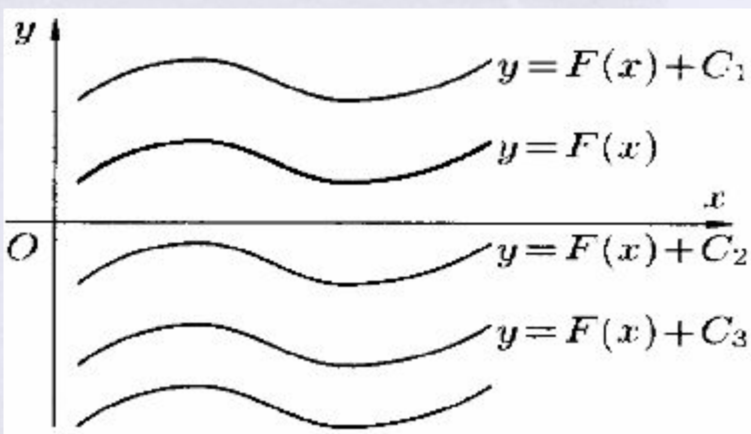


Рис. 3

ПРИМЕР

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

поскольку функция $\frac{x^5}{5}$ *- первообразная для функции* x^4.

Процесс нахождения неопределенного интеграла функции называется интегрированием этой функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1. ***Производная неопределенного интеграла*** **равна подынтегральной функции:**

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Это свойство считается очень важным, его используют для проверки правильности вычисления интеграла.

Свойства неопределенного интеграла:

2. ***Дифференциал от неопределенного интеграла*** **равен подынтегральному выражению:**

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла:

3. Неопределенный интеграл *от дифференциала функции* равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

4.*Постоянный множитель* можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла:

5.**Неопределенный интеграл от *суммы 2-х функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций*:**

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Степенная	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$\int dx = x + C$
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Показательная	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
	$\int e^x dx = e^x + C$

Таблица основных интегралов

Функция	**Интеграл**
Тригонометрические	$\int \sin x dx = - \cos x + C$
	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = - ctgx + C$

Таблица основных интегралов

Функция	**Интеграл**
Обратные тригонометрические	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxrc\sin x + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$
	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x - a}{x + a} \right\| + C$

Основные методы интегрирования

1.Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование

– это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов.

Непосредственное интегрирование

Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

- ✔ *Деление числителя на знаменатель почленно;*
- ✔ *Применение формул сокращенного умножения;*
- ✔ *Применение тригонометрических тождеств.*

ПРИМЕР $\int 2x\,dx = x^2 + C$

Проверка: $\left(x^2 + C\right)' = 2x$

ПРИМЕР $\int \sin x = -\cos x + C$

Проверка: $\left(-\cos x + C\right)' = \sin x$

ПРИМЕР

Найти неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования.

$$\int 2x\sqrt{x}dx$$

- ***Используя свойство неопределенного интеграла, вынесем за знак интеграла постоянный множитель.***
- ***Затем, выполняя элементарные математические преобразования, приведем подынтегральную функцию к степенному виду:***

$$\int 2x\sqrt{x}dx = \int 2x \cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int 2x^{\frac{3}{2}}dx = 2 \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$$

Решение:

$$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}-\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \int\left(3x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{2\cdot 3x^{\frac{1}{2}}}{1}+\frac{6\cdot x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{2\cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{3} =$$

$$= 6\sqrt{x}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$$

ПРИМЕР

$$\int\left(5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx=5\int x^2dx-6\int xdx+8\int x^{-5/4}dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2+\frac{8}{-1/4}x^{-1/4}+C=$$

$$=\frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{32}{\sqrt[4]{x}}+C$$

ПРИМЕР

$$\int \left(3-2\sqrt{x}\right)^2 dx$$

Решение:

$$\int \left(3-2\sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(9-12\sqrt{x}+4x\right)dx =$$

$$= 9x - \frac{2\cdot 12x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4x^2}{2} + C = 9x - 8\sqrt{x^3} + 2x^2 + C$$

ПРИМЕР

$$\int ctg^2 x dx$$

Решение:

$$\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -ctgx - x + C$$

ПРИМЕР

$$\int 2^x \times 3^x\,dx = \int 6^x\,dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$$

ПРИМЕР

$$\int 2\sqrt{x}\,dx = 2\int \sqrt{x}\,dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4}{5}x\sqrt{x} + c$$

ПРИМЕР

$$\int\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int x^3 dx + \int\frac{dx}{x^2} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + c$$

ПРИМЕР

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$$

2. Метод подстановки

Замена переменной (метод подстановки)

- *Чаще всего этот метод используется, если в подынтегральном выражении содержится сложная функция, тогда ее промежуточный аргумент и надо обозначить как новую переменную.*

НАПРИМЕР $t = t(x)$

Далее необходимо выполнить следующие действия:

- ***Найти дифференциал новой переменной*** $dt = t'(x)dx$ ***;***
- ***Записать прежний интеграл, используя только переменную*** t***, если подстановка сделана правильно, то полученный интеграл*** $\int \varphi(t)dt$ ***должен быть табличным;***
- ***используя таблицу интегралов, записать решение для подынтегральной функции*** $\varphi(t)$ ***;***
- ***Осуществить обратную подстановку, заменив переменную*** t***.***

ПРИМЕР

- Найти $\int (5x+3)^5 \, dx =$
- <u>Решение:</u> введем подстановку <u>**u = 5x + 3**</u> дифференциал этого выражения:
- **d (5x + 3) = du**
- **5dx = du**, откуда
- **dx = 1/5 du**
- Подставив вместо <u>**5x +3**</u> и <u>**dx**</u> их значения в данный интеграл, получим:
-
- $$\int (5x+3)^5 dx = \frac{1}{5}\int u^5 du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{30}u^6 + c$$

Заменив *u* его выражением через *x*, имеем:

$$\int (5x+3)^5\,dx = \frac{1}{30}(5x+3)^6 + c$$

- **Проверка:**

$$d\left[\frac{1}{30}(5x+3)^6 + c\right] = \frac{6}{30}(5x+3)^5 \cdot 5 \cdot dx = (5x+3)^5\,dx$$

- Интеграл найден правильно.

ПРИМЕР

$$\int x\sqrt[3]{x+1}dx =$$

- **Решение:**

$$t^3 = x+1 \Rightarrow x = t^3 - 1$$

$$t = \sqrt[3]{x+1}$$

$$d(x+1) = d(t^3)$$

$$dx = 3t^2 dt$$

Заменяя переменную в данном интеграле, имеем:

$$\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \int (t^3 - 1)t \cdot 3t^2 dt = 3\int (t^6 - t^3)dt = 3(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}) + c$$

Подставляя вместо t его выражение через x, найдем:

$$\int x \cdot \sqrt[3]{x+1} \cdot dx = 3(\frac{(\sqrt[3]{x+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x+1})^4}{4}) + c = 3(\frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{7} - \frac{(x+1) \cdot \sqrt[4]{x+1}}{4}) + c =$$

$$\frac{3}{28}(x+1) \cdot (4x+3) \cdot \sqrt[3]{x+1} + c$$

ПРИМЕР

$$\int \sin(5x+3)\cdot dx = \int \sin u \frac{du}{5} = -\frac{1}{5}\cos u + c = -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + c$$

$$5x+3=u$$

$$d(5x+3)=du$$

$$5dx=du$$

$$dx=\frac{du}{5}$$

ПРИМЕР

Найти неопределенный интеграл, используя метод замены переменной.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

Сделаем замену переменной $t = \sin x$, тогда $dt = (\sin x)'dx = \cos x\, dx$.

Исходный интеграл имеет вид:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t^2 dt$$

Таким образом, мы получили неопределенный интеграл табличного вида: степенная функция.

Используя правило нахождения неопределенного интеграла от степенной функции, найдем:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Сделав обратную замену, получим окончательный ответ:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

ПРИМЕР

$$\int x\cdot\sqrt[4]{2+x^2}\,dx$$

Решение:

$$\int x\cdot\sqrt[4]{2+x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[4]{2+x^2}=t\\ 2+x^2=t^4\\ \left(2+x^2\right)'dx=\left(t^4\right)'dt\\ 2xdx=4t^3dt;\,xdx=2t^3dt\end{array}\right|=$$

$$=\int 2t^3\cdot tdt=\int 2t^4dt=\frac{2t^5}{5}+C=0{,}4t^5+C=$$

$$=0{,}4\sqrt[4]{\left(2+x^2\right)^5}+C$$

ПРИМЕР

$$\int x \cdot e^{x^2} dx$$

Решение:

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ \left(x^2\right)' dx = (t)' dt \\ 2xdx = dt; xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = 0{,}5e^{x^2} + C$$

3. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям

– это метод, заключающийся в

использовании формулы:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

- ***Данный метод интегрирования основан на тождестве:***

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$

где u = f(x) и v = φ(x) - две функции, имеющие на данном промежутке производные.

Взяв интеграл от обеих частей данного тождества, будем иметь:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

ПРИМЕР

$$\int x^2 \cdot \ln x dx$$

Решение:

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = (\ln x)' dx \\ dv = x^2 dx & du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \int x^2 dx = \dfrac{1}{3} x^3 & \end{array} \right| =$$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = uv - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

Ответ: $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

ПРИМЕР $\int x\cos 6x dx$

Решение:

$$\int x\cos 6x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos 6x dx \\ v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\sin 6x \end{array} \right| =$$

$$\int x\cos 6x dx = uv - \int v du = \frac{1}{6}x\cdot\sin 6x - \int \frac{1}{6}\cdot\sin 6x dx =$$

$$= \frac{1}{6}x\cdot\sin 6x + \frac{1}{36}\cdot\cos 6x + C$$

Ответ: $\frac{1}{6}x\cdot\sin 6x + \frac{1}{36}\cdot\cos 6x + C$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралы от произведений синусов и косинусов с разными аргументами, линейно зависящими от , упрощаются, если применить тригонометрические **формулы преобразования произведения в сумму**:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

- **Вычислим интеграл** $\int \cos 5x \sin 7x \, dx.$

- Преобразуем произведение $\cos 5x \sin 7x$ в сумму:

$$\cos 5x \sin 7x = \frac{1}{2}\left(\sin(7x - 5x) + \sin(7x + 5x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin 12x\right).$$

$$\int \cos 5x \sin 7x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 2x + \sin 12x\right) dx =$$

- тогда

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 12x}{12}\right) + C = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 12x}{24} + C.$$

Домашнее задание:

- Колесов В.В. Математика для медицинских колледжей: учебное пособие/В.В.Колесов, М.Н. Романов. – Ростов н/Д: Феникс, 2015 – 316 с.: ил.- (среднее медицинское образование). Гл.10, §10.1 -10.2.
- Используя материал презентации ***Занятие 5_НеопределенИнтеграл***, выполните из **РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ**, ТЕМА 2.2, Занятие 5. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Спасибо за внимание