18.05.20

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

" **Прогрессия** " – латинское слово, означающее **"движение вперед",** введено римским автором Боэцием (VIв) и понималось в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность

Что мы знаем о прогрессиях?

Мы выучили:

- определение, формулу n- ого члена, суммы n - первых членов арифметической и геометрической прогрессий

"<u>*Сравнение*</u> – сопоставление объектов с целью выявления черт сходства и черт различия между ними "

(Философский словарь)

"Сравнение есть основа всякого понимания и всякого мышления . . ."

(К.Д. Ушинский)

Арифметическая прогрессия

(a_n) – арифметическая прогрессия

$$a_{n+1}=a_n+d$$

d - разность арифметической прогрессии

Геометрическая прогрессия

(b_n) – геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

q – знаменатель геометрической прогрессии

Формула *n*- ого члена

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Формула сумма *n* - первых членов

Упражнения (1)

1) Представить в виде десятичной периодической дроби обыкновенную дробь

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{11}$ в) $1\frac{7}{12}$

ответы: а) 0,333…=0,(3);

б) 0,4545…= 0,(45);

в) 1,58333…= 1,58(3)

2) Представьте данное число сначала в виде $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$, а затем в виде суммы по образцу:

а) 1,(7); б) 3,2(5); в) -0,81(36)

ответы:

а) 1,(7) = 1,777... =

б) 3,2(5) = 3,2555... = 3,2 +

в) -0,81(36) = -0,813636... =

Упражнения (2)

Каким образом сумма бесконечного числа слагаемых может быть конечным, вполне определенным числом?

Главная проблема

- Почему Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху?

Один из "парадоксов Зенона"

(древнегреческого философа) состоит в следующем (в изложении Льва Толстого в "Войне и мире", т. 3, ч. 3).

Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т.д. до бесконечности.

Один из "парадоксов Зенона" (2)

- Задача представлялась древним неразрешимой (она и в настоящее время не считается полностью решенной). Отрезки, последовательно пробегаемые Ахиллесом, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,1.

(за единицу принимаем начальное расстояние между Ахиллесом и черепахой). Общее расстояние, пройденное Ахиллесом до встречи с черепахой, есть

"сумма бесконечного числа членов":

- Обозначим сумму через S:

$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

$$10S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = 10 + S,$$

$$10S - S = 10 \;,$$

$$S = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

Так учил Л.Н.Толстой в Яснополянской школе детей переводить бесконечные десятичные дроби в обыкновенные

Изучение нового (1)

1). $1;\ \ ;\ \ ;\ \ ;\ \ldots$ — бесконечная геометрическая прогрессия

- $b_1 = 1;\quad b_2 = \quad;\quad q = \quad,\ |q| < 1$

При

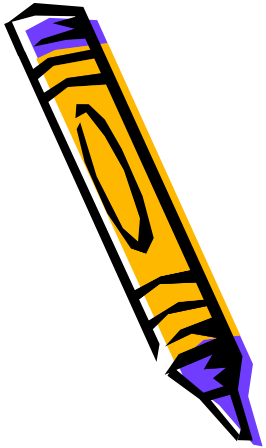
2) b_1 ; b_2 ; b_3 …— убывающая геометрическая прогрессия $|q| < 1$

$S_n \to S$ при $n \to \infty$,

т.к. $$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q-1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}.$$

При $n \to \infty$, $q^n \to 0$, $S_n \to \dfrac{b_1}{1-q}$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ при $|q| < 1$



Первичное закрепление

- Представить бесконечную десятичную периодическую дробь **1,(7)** в виде обыкновенной дроби

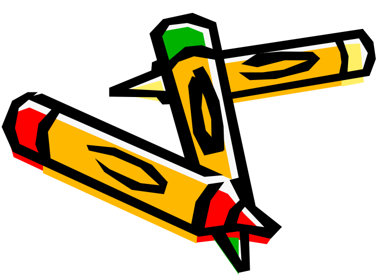
Решение

а) $1,(7) = 1,777\ldots =$

геометрическая прогрессия $b_1 =$; $b_2 =$

$q =$ $|q| < 1$

Тогда $1,(7) =$ $1+$ $= 1$



Первичное закрепление

- Представить бесконечную десятичную периодическую дробь **0,(18)** в виде обыкновенной дроби

Решение

0,(18) =0, 181818. . . = 0,18 + 0,0018 + 0,000018 + . . . = ?

0,18, 0,0018, 0,000018, . . . - геометрическая прогрессия

b_1 =0,18; b_2 =0,0018; q =0,01, $|q| < 1$

S =

Тогда 0,(18) =

Что же нового узнали мы?

Познакомились с понятиями

- бесконечной геометрической прогрессии;
- суммы бесконечной геометрической прогрессии;
- С формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии и её применением
- Учились заменять бесконечные периодические дроби обыкновенными

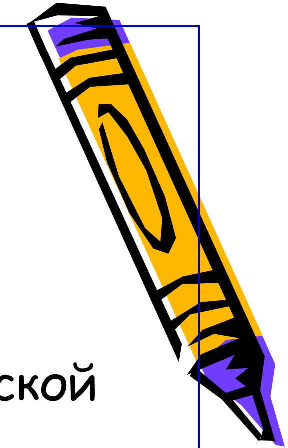
Арифметическая прогрессия

(a_n) – арифметическая прогрессия

$$a_{n+1}=a_n+d$$

d - разность арифметической прогрессии

Геометрическая прогрессия



(b_n) – геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

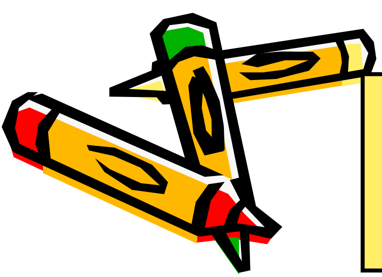
q – знаменатель геометрической прогрессии

Формула *n*- ого члена

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Формула сумма *n* - первых членов



Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q} \quad \text{при } |q| < 1$$

Словарь терминов

Перечислите и определите термины, используемые в теме прогрессии

- Числовая последовательность
- Арифметическая прогрессия
- Разность арифметической прогрессии
- Геометрическая прогрессия
- Бесконечная геометрическая прогрессия
- Знаменатель геометрической прогрессии
- Формула n-ого члена
- Рекуррентная формула
- Формула суммы n-первых членов последовательности

Ответьте на вопросы:

- 1) По какому плану сравнивали изученные понятия "Арифметическая и геометрическая прогрессии«?
- 2) Укажите их общие существенные признаки.
- 3) Определите существенные различия между ними.
- 4) Сделайте вывод, вытекающий из сравнения.