

Системы счисления

Системы счисления

Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

Система счисления создается человеком, такие системы называются **искусственными** в отличие от **естественных** систем, созданных природой.

Каждая искусственная система **создается с определенной целью**. Можно утверждать, что лучше та искусственная система, которая наилучшим образом обеспечивает достижение цели ее создания.

Системы счисления

"Удобная" система счисления должна, например, обладать следующими свойствами.

- **Простота способа записи на материальном носителе** (бумаге, камне, дереве и т. д.). В вавилонской системе записи чисел в качестве "цифр" использовались клинья потому, что бумага не была еще изобретена, записи велись на глиняных досках с помощью штампов.
- **Удобство выполнения арифметических операций** над числами в предложенной записи. Именно поэтому позиционные системы счисления практически вытеснили другие системы счисления.
- **Наглядность обучения** работы с числами. Если бы у нас на каждой руке было четыре пальца, то, скорее всего, использовалась бы восьмеричная система счисления в место десятичной.

Основные определения

Система счисления — способ записи (представления) чисел.

Символы, при помощи которых записывается число, называются **цифрами**.

Системы счисления, в которых вклад каждой цифры в величину числа зависит от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающей число, называются **позиционными**.

Системы счисления, в которых каждой цифре соответствует величина, не зависящая от местонахождения этой цифры в записи числа, называют **непозиционными**.

Позиционные системы счисления

Совокупность различных цифр, используемых в позиционной системе счисления для записи чисел, называется **алфавитом** системы счисления.

Базис позиционной системы счисления — это последовательность чисел, каждое из которых задает значение цифры "по месту" или "вес" каждого разряда.

Пример. Базисом десятичной системы счисления является следующая последовательность: 1, 10, 100, 1000, 10000...

Или иначе: 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 , ..., 10^n , ...

Базисом шестеричной системы: 6^0 , 6^1 , 6^2 , 6^3 ...

Позиционные системы счисления

В более общем виде для позиционных систем счисления базис можно записать в виде следующей последовательности:

$$\dots P^{-n}, \dots, P^{-2}, P^{-1}, P^0, P^1, P^2, \dots, P^n, \dots$$

Число P , определяющее данную последовательность, называется **основанием** системы.

В любой P -ичной системе счисления **число представляется в виде формальной суммы по базису системы с цифрами данной системы в качестве коэффициентов.**

Позиционные системы счисления

Натуральное число a в P -ичной системе счисления можно записать как

$$a = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} \dots + a_2 P^2 + a_1 P^1 + a_0,$$
$$0 \leq a_i < P, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Данное представление числа в P -ичной системе счисления называется **развернутой формой записи** числа (эта форма в основном используется при решении задач).

Например: $423 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Позиционные системы счисления

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

Такое представление числа в P -ичной системе счисления называется **свернутой формой**. Если P -ичная система счисления отлична от десятичной, то в свернутой форме основание системы указывается нижним индексом после записи числа.

Например, $11001_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 25$.

Позиционные системы счисления

Вещественное число a ($a \geq 0$) в P -ичной системе счисления можно записать как

$$a = a_n \cdot P^n + a_{n-1} \cdot P^{n-1} + \dots + a_2 \cdot P^2 + a_1 \cdot P^1 + a_0 \cdot P^0 + a_{-1} \cdot P^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot P^{-m} \dots,$$
$$0 \leq a_i < P, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

В свернутой форме

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-m} \dots$$