Метод Гаусса

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Алгоритм состоит из двух этапов.

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме.

На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений.

Пример

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ 3x - y + 2z = 13 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ y - z = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Обратный ход в методе Гаусса

Привели систему к диагональному виду:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ \qquad\quad y - z = -3 \\ \qquad\qquad\;\; z = 1 \end{cases}$$

$$y - 1 = -3, \quad y = -2$$

$$x - 2(-2) + 3 \cdot 1 = 0, \quad x = 3$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Решить систему методом Гаусса

Система трех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x_3 = C_1$$

$$x_4 = C_2$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & C_1 & C_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Продолжение решения

В результате прямого хода метода Гаусса имеем:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & C_1 & C_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3C_1 + C_2 = 3 \\ x_2 - 2C_1 - C_2 = 2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3C_1 + C_2 = 3 \\ x_2 = 2C_1 + C_2 + 2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -x_2 + 3C_1 - C_2 - 3; \quad x_1 = -2C_1 - C_2 - 2 + 3C_1 - C_2 + 3; \quad x_1 = C_1 - 2C_2 + 1$$

$$\begin{cases} x_1 = C_1 - 2C_2 + 1 \\ x_2 = 2C_1 + C_2 + 2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

Сделать проверку самостоятельно.

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 - 2C_2 + 1 \\ x_2 = 2C_1 + C_2 + 2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

Пример частного решения:

Пусть

$$C_1 = 1, C_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Решить систему методом Гаусса

Система трех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 10 & -14 \\ 0 & 7 & -7 & 10 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 7x_2 - 7x_3 + 10x_4 = -14 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3 \end{cases}$$

Третье уравнение имеет вид: $0 = 3$ - противоречие, следовательно, система не имеет решения (несовместна).

Ответ: система несовместна.