

**Доверительный интервал.  
Доверительная вероятность.**

**Семинар 21**

**Доверительным интервалом** для параметра  $\theta$  называется интервал  $(\theta_1, \theta_2)$ , содержащий истинное значение параметра с заданной вероятностью  $p=1-\alpha$ .

$p$  — доверительная вероятность,

$\alpha$  — уровень значимости.

## Доверительные интервалы для параметров $m$ и $\sigma^2$ нормально распределенной генеральной совокупности

Параметр	Предположения	Оценка параметра	Распределение оценки	Доверительный интервал
$m$	$\sigma^2$ - известно	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{X} \cong N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$
$m$	$\sigma^2$ - неизвестно $\hat{\sigma}^2 = S^2$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} \cong T(n-1)$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$	$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < m < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2$	$m$ - известно	$S_0^2$	$S_0^2 \cong \frac{\sigma^2}{n} \chi^2(n)$ $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$	$\frac{nS_0^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}$
$\sigma^2$	$m$ - неизвестно $0$	$S^2$	$S^2 \cong \frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi^2(n-1)$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}$

# Квантили $u_\alpha$ нормального распределения

$P$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
$u_p$	1.282	1.645	1.960	2.236	2.576	3.090	3.291

## ***Квантили распределения Стьюдента***

	<b>0,75</b>	<b>0,9</b>	<b>0,95</b>	<b>0,975</b>	<b>0,99</b>	<b>0,995</b>	<b>0,999</b>
<b>1</b>	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
<b>2</b>	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
<b>3</b>	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
<b>4</b>	0,741	,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
<b>5</b>	0,727	,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
<b>6</b>	0,718	,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
<b>7</b>	0,711	,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
<b>8</b>	0,706	,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
<b>9</b>	0,703	,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
<b>10</b>	0,700	,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
<b>11</b>	0,697	,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
<b>12</b>	0,695	,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
<b>13</b>	0,694	,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
<b>14</b>	0,692	,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
<b>15</b>	0,691	,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
<b>16</b>	0,690	,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
<b>17</b>	0,689	,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646

## *Квантили распределения Стьюдента (продолжение)*

	<b>0,75</b>	<b>0,9</b>	<b>0,95</b>	<b>0,975</b>	<b>0,99</b>	<b>0,995</b>	<b>0,999</b>
<b>18</b>	0,688	,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
<b>19</b>	0,688	,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
<b>20</b>	0,687	,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
<b>21</b>	0,686	,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
<b>22</b>	0,686	,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
<b>23</b>	0,685	,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
<b>24</b>	0,685	,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
<b>25</b>	0,684	,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
<b>26</b>	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
<b>27</b>	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
<b>28</b>	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
<b>29</b>	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
<b>30</b>	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
<b>40</b>	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
<b>60</b>	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
<b>120</b>	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
<b>200</b>	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131

# Квантили хи-квадрат распределения $\chi_p^2(k)$

	<b>0,005</b>	<b>0,01</b>	<b>0,025</b>	<b>0,05</b>	<b>0,1</b>	<b>0,2</b>	<b>0,3</b>	<b>0,7</b>	<b>0,8</b>	<b>0,9</b>	<b>0,95</b>	<b>0,975</b>	<b>0,99</b>	<b>0,995</b>	<b>0,999</b>
<b>1</b>	3,9E-05	0,0002	0,001	0,004	0,02	0,1	0,1	1,1	1,6	2,7	3,8	5,0	6,6	7,9	10,8
<b>2</b>	0,010	0,02	0,051	0,10	0,21	0,45	0,71	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
<b>3</b>	0,072	0,11	0,22	0,35	0,58	1,01	1,42	3,66	4,64	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
<b>4</b>	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,65	2,19	4,88	5,99	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
<b>5</b>	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,34	3,00	6,06	7,29	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
<b>6</b>	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	7,23	8,56	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
<b>7</b>	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	8,38	9,80	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
<b>8</b>	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	9,52	11,03	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
<b>9</b>	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	10,66	12,24	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
<b>10</b>	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	11,78	13,44	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
<b>11</b>	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	12,90	14,63	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
<b>12</b>	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	14,01	15,81	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
<b>13</b>	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	15,12	16,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
<b>14</b>	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,82	16,22	18,15	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
<b>15</b>	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,31	11,72	17,32	19,31	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
<b>16</b>	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,15	12,62	18,42	20,47	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25

### Задача 3.2.

Найти 90% и 99% доверительные интервалы для времени безотказной работы электронной лампы, если  $\bar{X} = 500$  часов,  $n=100$ , с.к.о. известно и равно 10 часов.

**Решение.**

Рассмотрим статистику  $\frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}} = N(0,1)$

1) 90%  $\alpha=0,1$ ;  $\alpha/2=0.05$ ;  $1 - \alpha/2 = 0.95$

$$u_{1-\alpha/2} = 1.645 \qquad 500 - \frac{10}{\sqrt{100}} 1.645 < m < 500 + \frac{10}{\sqrt{100}} 1.645$$

$$\mathbf{498.355 < m < 501.645}$$

2) 99%;  $\alpha=0,01$ ;  $\alpha/2=0.005$ ;  $1 - \alpha/2 = 0.995$

$$u_{1-\alpha/2} = 2.576 \qquad 500 - \frac{10}{\sqrt{100}} 2.576 < m < 500 + \frac{10}{\sqrt{100}} 2.576$$

$$\mathbf{497.42 < m < 502.56}$$



### Задача 3.3.

Найти 90% доверительный интервал для диаметра вала, если  $n=9$ ,

$\bar{X} = 30$  мм, оценка для дисперсии равна  $9 \text{ мм}^2$ .

### Решение.

90%      $\alpha=0,1$

$$t_{1-\alpha/2}(9-1) = t_{0,950}(8) = 1.860$$

$$30 - \frac{3}{\sqrt{9}} 1.860 < m < 30 + \frac{3}{\sqrt{9}} 1.860$$

$$\mathbf{28.14 < m < 31.86}$$



Заметим, что мат. ожидание и дисперсия неизвестны. Следовательно, будем пользоваться распределением Стьюдента с  $n-1$  степенью свободы для получения интервала для мат. ожидания и распределением  $\chi$ -квадрат с  $n-1$  степенью свободы для оценки дисперсии.

95% доверительный интервал ;  $\alpha=0,05$   $t_{1-\alpha/2}(10-1) = t_{0,975}(9) = 2.262$

$$1) \quad \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} \cong T(n-1); \quad \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < m < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

$$-0.09 - \frac{\sqrt{181.6}}{\sqrt{10}} 2.262 < m < -0.09 + \frac{\sqrt{181.6}}{\sqrt{10}} 2.262 \quad \mathbf{-9.73 < m < 9.55}$$

$$2) \quad S^2 \cong \frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi^2(n-1) \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}$$

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(9) = \chi_{0.975}^2(9) = 19.0 \quad ; \quad \chi_{\alpha/2}^2(9) = \chi_{0.025}^2(9) = 2.70$$

$$\frac{9 \cdot 181.6}{19.0} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 181.6}{2.70} \quad \mathbf{86.02 < \sigma^2 < 605.33}$$

**Дома :** Найти 90% доверительный интервал для дисперсии и С.К.О.

## Доверительные интервалы для параметра $p$ биномиального распределения

Пусть  $x$  – наблюдаемое значение случайной величины  $X$ , имеющей распределение  $B(n, p)$ . Оценкой для  $p$  является *относительная частота*  $h = x/n$ . Если  $n > 50$ , а  $nh > 5$ , и  $n(1-h) > 5$ , то распределение случайной

величины  $Z = \frac{h - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ ,  $q = 1 - p$ , аппроксимируется нормальным

распределением  $N(0, 1)$ . Можно использовать следующие формулы для границ  $p_1$  и  $p_2$  доверительного интервала

$$p_{1,2} \approx h \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{h(1-h)}$$

### Задача 3. 20.

Из большой партии транзисторов одного типа были случайным образом отобраны и проверены 100 штук. У 36 транзисторов коэффициент усиления оказался меньше 10. Найти 95%-ый доверительный интервал для доли таких транзисторов во всей партии.

#### Решение.

Распределение –биномиальное  $B(n, p)$ .

$$h=x/n=36/100=0.36 . \quad n=100 > 50, \text{ а } nh=36 > 5, \text{ и } n(1-h)=100(1-0.36)=64 > 5$$

$$Z = \frac{h - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

95% доверительный интервал  $\Rightarrow \alpha = 0,05$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.960$$

$$p_{1,2} \approx h \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{h(1-h)} = 0.36 \pm \frac{1.96}{\sqrt{100}} \sqrt{0.36 \cdot (1-0.36)};$$

$$\mathbf{0.266 < p < 0.454}$$

**Домашнее задание. 3.4, 3.13**