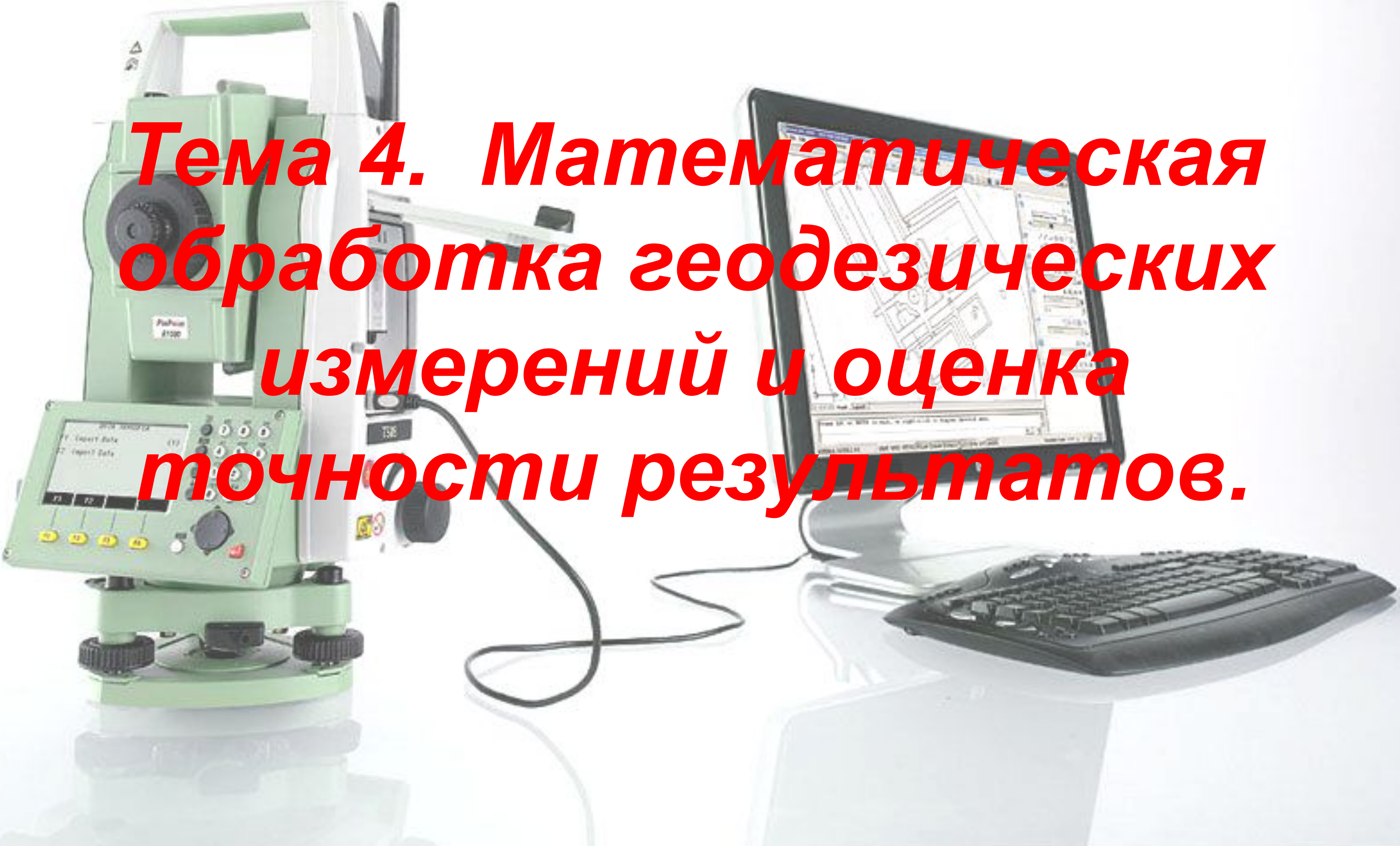
Тема 4. Математическая обработка геодезических измерений и оценка точности результатов.



Общие сведения о погрешностях измерений.

Геодезические работы связаны с выполнением измерений различных величин.

Измерения могут выполняться непосредственным сравнением измеряемой величины с единицей меры – ***прямые измерения***, и посредством ее вычисления как функции других непосредственно измеренных величин – ***косвенные измерения***.

Результаты измерений всегда содержат некоторые погрешности.

Погрешностью Δ называют отклонение результата измерения I от истинного значения измеряемой величины X.

$$\Delta = I - X$$

Погрешности проявляются, например, при многократном измерении одной и той же величины – получаемые результаты всегда несколько различаются между собой, и значит, неизбежно отличаются от истинного значения, т.е. содержат погрешности.

Причинами, порождающими погрешности результатов измерений, являются ***несовершенство измерительных приборов, несовершенство органов чувств наблюдателя, внешние условия, влияющие на измерения.***

Классификация погрешностей.

Измерения, выполненные однотипными приборами, одинаковыми методами и в одинаковых условиях, принято считать ***равноточными***, а выполненные разными приборами и методами, в разных условиях считают ***неравноточными***.

Различают три основных вида погрешностей: ***случайные***, ***систематические*** и ***грубые***.

Грубые погрешности – необычно большие погрешности, вызванные небрежностью наблюдателя, неисправностью прибора или резким отклонением от нормы условий измерений.

Грубые погрешности выявляют путем выполнения и анализа избыточных измерений.

Результаты измерений, содержащие грубые погрешности, отбрасывают, бракуют.

Систематические погрешности – такие, которые при повторных измерениях остаются постоянными, или изменяются закономерным образом.

Причины и закономерности появления систематических погрешностей должны быть изучены, и сами погрешности исключены из результатов измерений путем введения соответствующих поправок, применением надлежащих методик измерений, юстировкой приборов.

Случайные погрешности – такие, которые при повторных измерениях изменяются случайным образом.

Ни знак, ни значение случайной погрешности предвидеть невозможно. Поэтому невозможно исключить случайные погрешности из результатов измерений.

Можно лишь при обработке измерений ослабить их влияние. Пути к такому ослаблению указывает теория погрешностей измерений.

Свойства случайных погрешностей.

Теоретические исследования и опыт измерений показывают, что случайные погрешности обладают следующими основными свойствами:

- при определенных условиях измерений, случайные погрешности по абсолютной величине не могут превышать известного предела;

- малые по абсолютной величине погрешности появляются чаще, чем большие.

- положительные погрешности встречаются так же часто, как и отрицательные;

- среднее арифметическое из всех случайных погрешностей равноточных измерений одной и той же величины при неограниченном возрастании числа измерений n стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\ldots+\Delta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

Эта формула выражает свойство компенсации случайных погрешностей. Этим свойством обладает и сумма попарных произведений случайных погрешностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{n}=0$$

Погрешности: средняя квадратическая, предельная, относительная.

Общепринятой характеристикой точности является предложенная К.Ф. Гауссом ***средняя квадратическая погрешность***:

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

где Δ_1, Δ_2, …, Δ_n – случайные погрешности измерений.

Величину $2 \times m$ называют ***предельной погрешностью*** и используют как ***допуск*** при отбраковке некачественных результатов измерений.

$$\Delta_{\text{пред}} = 2 \times m.$$

Величины $\boldsymbol{\Delta}$**,** $\boldsymbol{m}$**,** $\boldsymbol{\Delta_{\text{пред}}}$, выражаемые в единицах измеряемой величины, называются ***абсолютными погрешностями*****.**

Наряду с абсолютными применяются также и ***относительные погрешности***, представляющие собой отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине.

Относительную погрешность принято выражать в виде простой дроби с единицей в числителе:

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{N}$$

где *l* – значение измеряемой величины, а *N* – знаменатель дроби.

Равноточные измерения. Арифметическая середина.

Пусть имеем результаты многократных равноточных измерений одной величины: l_1, l_2,…, l_n.

Рассмотрим их среднее арифметическое:

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

Если принять $l_i = X + \Delta_i$,где (i = 1, 2, … n), то получим:

$$L = \frac{(X - \Delta_1) + (X - \Delta_2) + \cdots + (X - \Delta_n)}{n} = \tilde{O} - \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n}{n}$$

С увеличением числа измерений сумма случайных погрешностей, деленная на их число, стремится к нулю, и, следовательно, среднее арифметическое L стремится к истинному значению X.

Поэтому значение определяемой величины принимают равным среднему арифметическому.

Средняя квадратическая погрешность арифметической середины.

Пусть точность результатов измерений l_1, l_2, …, l_n характеризуется средними квадратическими погрешностями

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$$

и требуется найти среднюю квадратическую погрешность M арифметической средины.

$$L = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \cdots + \frac{1}{n} l_n$$

Среднюю квадратическую погрешность арифметической средины найдем как погрешность функции измеренных величин по формуле:

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \ldots + \frac{1}{n^2} m_n^2 = \frac{m^2}{n}$$

или $$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

Неравноточные измерения. Вес измерений.

Неравноточными называют измерения, выполненные приборами различной точности, разным числом приемов, в различных условиях.

При неравноточных измерениях точность каждого результата измерений характеризуется своей среднеквадратической погрешностью.

Наряду со средней квадратической погрешностью при обработке неравноточных измерений пользуются относительной характеристикой точности – ***весом измерения***.

Вес i-го измерения вычисляют по формуле:

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}$$

где c – произвольная постоянная, назначаемая вычислителем, m_i – средняя квадратическая погрешность i-го измерения.

Рассмотрим смысл произвольной постоянной c. Предположим, что в результате фиксирования значения c вес j-го измерения стал равен 1, то есть $p_j = c / m_j^2 = 1$. Отсюда находим $c = m_j^2$. Следовательно, постоянная c есть квадрат средней квадратической погрешности μ^2 такого измерения, вес которого принят за единицу ($c = \mu^2$).

Теперь можем записать так:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$$

Общая арифметическая середина.

Пусть имеем результаты многократных неравноточных измерений одной величины: l_1, l_2, …, l_n, выполненных с весами p_1, p_2, …, p_n.

Представим каждый из результатов l_i (i = 1, 2, …, n) как среднее из p_i результатов с весом 1. Получим такой ряд результатов равноточных измерений:

l_1 − результат p_1 измерений с весом 1,

l_2 − результат p_2 измерений с весом 1,

…………………………………………

l_n − результат p_n измерений с весом 1,

где общее число измерений с весом 1 равно $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Нами составлен ряд результатов равноточных измерений, позволяющий найти окончательное значение измеряемой величины как среднее арифметическое из всех результатов измерений:

$$L_0 = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}$$

Значение, вычисляемое по этой формуле, называют ***общей арифметической срединой*** или ***весовым средним***.

Оценки точности результатов неравноточных измерений.

Средняя квадратическая погрешность μ измерения, имеющего вес, равный единице:

− формула Гаусса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}$$

− формула Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$$

где v_i − поправки к результатам измерений:

$$v_1 = L_0 - l_1;\ v_2 = L_0 - l_2;\ v_n = L_0 - l_n$$

Средняя квадратическая погрешность общей арифметической средины:

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$