«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА»

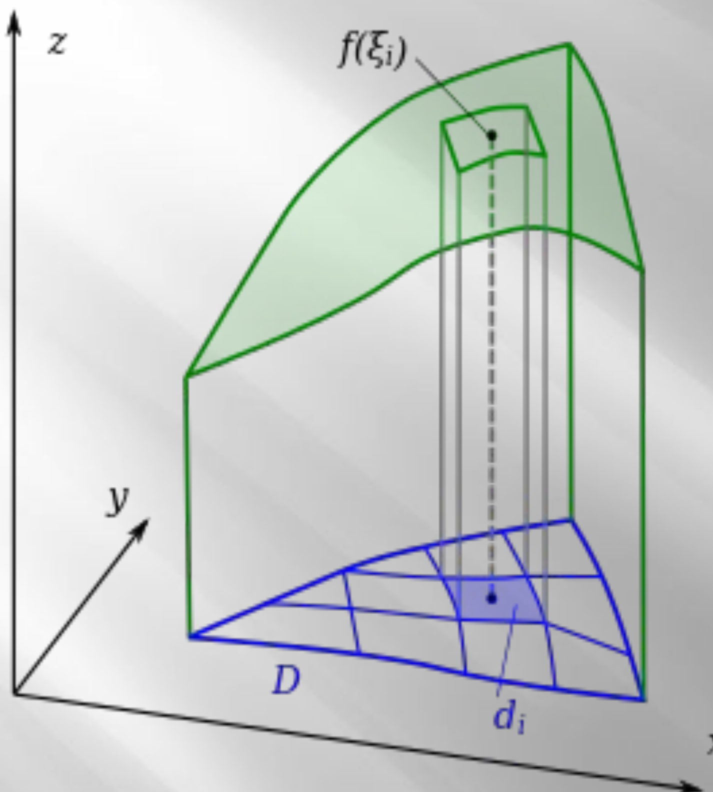
Презентацию выполнил
Студент 2 курса
Павлов Никита
Группы № 281

Двойной интеграл

Понятие двойного интеграла возникает при вычислении объёма *цилиндрического бруса*, подобно тому, как определённый интеграл связан с вычислением площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим некоторую двумерную фигуру D на плоскости Oxy и заданную на ней функцию двух переменных f(x,y). Понимая эту функцию как высоту в данной точке, поставим вопрос о нахождении объёма получившегося тела
(см. рисунок).

По аналогии с одномерным случаем, разобьём фигуру D
на достаточно малые области d_i, возьмём в каждой по точке $\mathcal{E}$ = (x,y) и соста $\sum_j f(x_j, y_j) S(d_j)$ му



Где S (dj) – площадь области dj . Если соответствует, независимо от выбора разбиения и точек Ɛj . Предел этой суммы при стремлении диаметров областей к нулю , то такой предел называется **двойным интегралом** от

или

функции f(x;y) по области D и обознач

$$\int_D f(x;y)dS$$

$$\int_D f(x;y)dxdy$$

или

$$\iint_D f(x;y)dxdy$$

Объём цилиндрического бруса равен этому интегралу

Геометрический смысл двойного инте $(f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D)$,

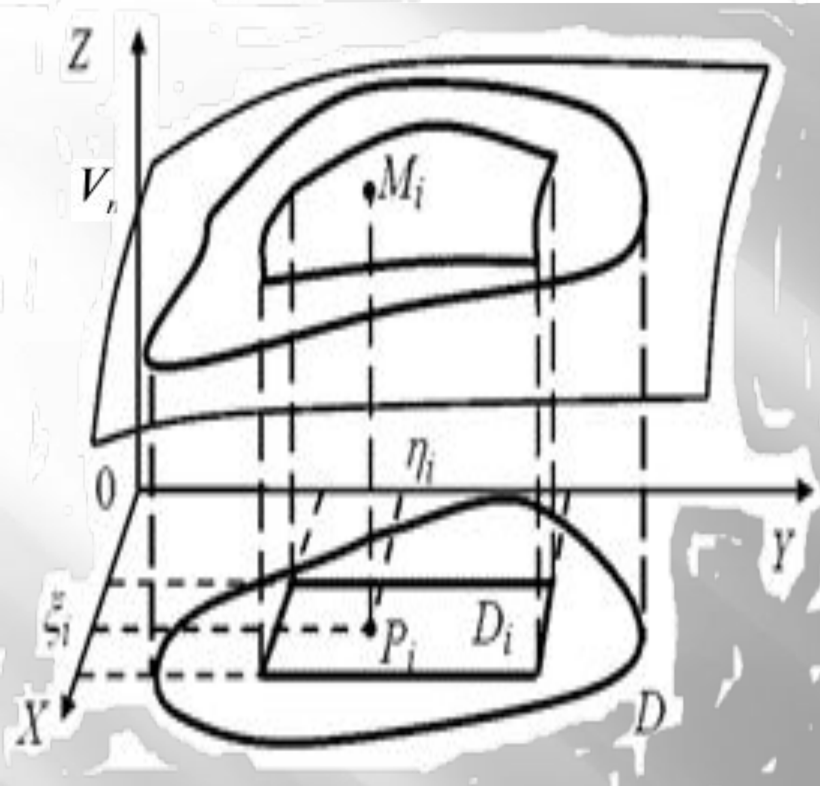


Рисунок (1)

Пусть в пространстве мы имеем некоторое тело (криволинейный цилиндр [в отличие от криволинейной трапеции в определенном интеграле]), ограниченное сверху поверхностью f (x,y), по бокам - некоторой цилиндрической поверхностью (образующие которой параллельны оси Oz), а снизу плоскостью x0y

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy = V,$$

где V – объем цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

2) $$\iint\limits_{(\sigma)} dxdy = \sigma,$$ где σ – площадь области (σ).

3) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} c\cdot f(x,y)\,dxdy = c\cdot\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy.$$

4) Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma)} f_2(x,y)dxdy.$$

5) Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)dxdy.$$

(свойство аддитивности двойного интеграла)

6) Если всюду в области (σ) $f(x,y) > 0$ ($f(x,y) \geq 0$), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \geq 0 \right).$$

7) Если всюду в области (σ) $f(x,y) \leq \phi(x,y)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(x,y)dxdy$$

8) Следствие свойств 7 и 2.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области (σ), то

$$m \cdot \sigma \leq \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq M \cdot \sigma ,$$

где σ – площадь области (σ).

9) Теорема о среднем для двойного интеграла.

Если функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой и ограниченной области* (σ), *то найдется такая точка* $P_0(x_0,y_0)\in(\sigma)$, *что справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot\sigma \,,$$

где σ – *площадь области* (σ).

Двойной интеграл $I = \iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$

Площадь S плоской фугуры D

В декартовых координатах при $f(x;y) = 1$: $S = \iint\limits_D dxdy$

В полярных координатах: $S = \iint\limits_D r(\varphi)\cdot dr d\varphi$

Объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $Z = f(x;y)$: $V = I$

Масса плоской пластины D с переменной плотностью $\gamma = f(x;y)$: $m = I$

Координаты центра масс фигуры: $x_c = \frac{S_y}{m}$; $y_c = \frac{S_x}{m}$

Статические моменты плоской фигуры

Относительно оси $0x$: $S_x = \iint\limits_D y\cdot\gamma(x;y)\,dxdy$

относительно оси $0y$: $S_y = \iint\limits_D x\cdot\gamma(x;y)\,dxdy$

Моменты инерции плоской фигуры

Относительно оси $0x$: $M_x = \iint\limits_D y^2\cdot\gamma(x;y)\,dxdy$

Относительно оси $0y$: $M_y = \iint\limits_D x^2\cdot\gamma(x;y)\,dxdy$

Относительно начала координат: $M_0 = M_x + M_y$

Поверхностный интеграл I-го рода

Площадь S поверхности $Z = f(x;y)$:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$$

где D- проекция поверхности Z на плоскость $x0y$

Масса поверхности с плотностью распределения $\gamma = \gamma(x;y;z)$: $m = \iint\limits_S \gamma(x;y;z)\,dxdy$

Моменти инерции поверхности $z = f(x;y)$

Центр тяжести поверхности $z = f(x;y)$

Вычисление двойного интеграла в д.с.к.

Вычисление двойного интеграла сводится к повторному интегрированию. Пусть областью изменения независимых переменных является:

$$\overline{D} = \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

это криволинейная трапеция на плоскости xOy (- гладкие линии). Тогда:

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x)$$

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$$

При этом область интегрирования должна быть правильной в направлении оси Оу. Интеграл по переменной «у» называется внутренним, а по переменной «х»- внешним.

Вычисление двойного интеграла в д.с.к.

- Сначала вычисляется внутренний интеграл и в результате получаем некоторую функцию $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \varphi(x)$ затем интегрируя её по другой переменной «x», получаем результат: $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ при этом последний интеграл называется внешним.
- Замечание 1: Пределы интегрирования будут постоянными в обоих интегралах, если область интегрирования есть квадрат или прямоугольник со сторонами параллельными осям координат (в д.с.к.).
- Замечание 2: Если область интегрирования есть правильная область в направлении оси Ox, то

$$\overline{D} = \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

Вычисление двойного интеграла в д.с.к.

- Тогда соответствующий двойной интеграл:

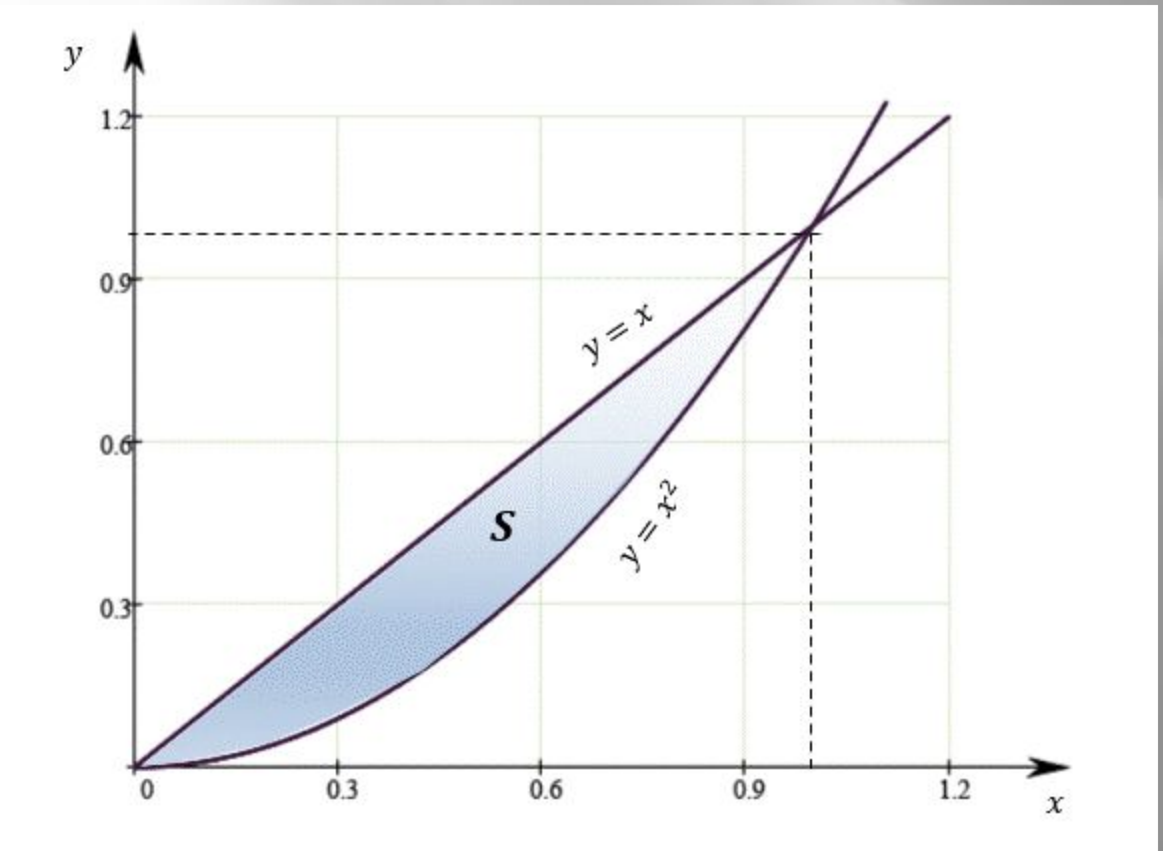
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

- Замечание 3: Если область интегрирования $\overline{D}$ не является правильной ни в одном из координатных направлений, то её представляют в виде суммы конечного числа областей, каждая из которых правильная по одному из направлений Ох либо Оу, затем используя свойства двойного интеграла, производят непосредственно вычисления.

Пример.

Изменить порядок интегрирования. Изобразить область интегрирования.

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$$



Решение :

Область интегрирования представляет собой область, ограниченную линиями:

$$y = x^2,\ y = x$$

и

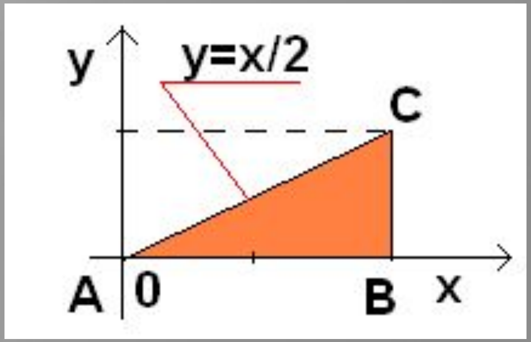
$$x = 0;\ \ x = 1$$

Повторный интеграл с внешним интегрированием по X :

$$I = \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{x} dy$$

Пример 1:

- Вычислить значение двойного интеграла: $\iint\limits_D x^2 y dxdy$
  в области $D:\Delta ABC \quad A(0,0),\ B(2,0),\ C(2,1)$
  Данная область является правильной в обоих направлениях. Поэтому:



$$\iint\limits_D x^2 y \cdot dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{y=0}^{y=x/2} x^2 y dy =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 \left(\frac{x^2}{8} - 0\right) dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 x^4 dx = \frac{4}{5}$$

или:

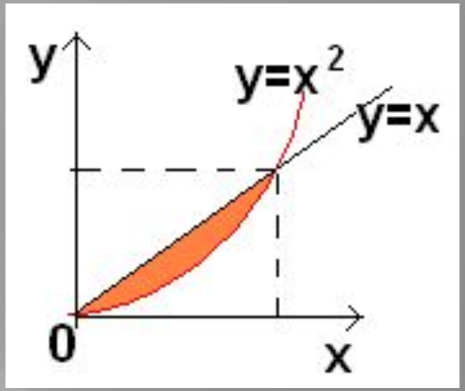
$$\iint\limits_D x^2 y \cdot dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x=2y}^{x=2} x^2 y dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)_{x=2y}^{x=2} \cdot y dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{8}{3}y - \frac{8}{3}y^4\right) dy = \frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right)_0^1 = \frac{4}{5}$$

Пример 2:

- **Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy$**. Изобразим область интегрирования:**

$$\overline{D} = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$



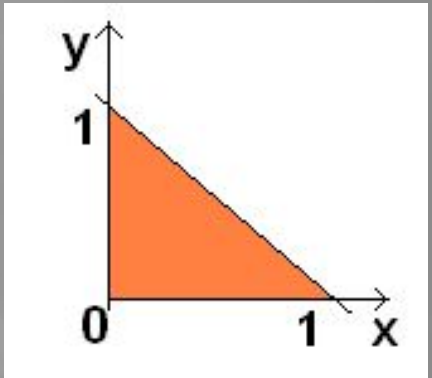
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{x=y}^{x=\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

Замечание: Пределы интегрирования необходимо расставлять так, чтобы процесс вычисления был наименее трудоёмким.

Пример 3:

- Не вычисляя двойного интеграла, выяснить, который из них имеет большее значение:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy \quad \text{или} \quad \iint\limits_D (x+y)^2\,dxdy$$



Где область D задана своими границами:

$$x=0; \quad y=0; \quad x+y=1$$

В области D имеем:

$$f_1(x,y) \le 1, \quad f_2(x,y) = (x+y)^2 \le (x+y)$$

т.е. первый имеет большее значение, т.к. для него функция больше.

Пример 4.

Найти $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy,$ где S — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1.$

Расставляя пределы интегрирования, будем иметь

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Геометрически I представляет собой объем цилиндроида с квадратным нижним основанием, ограниченного сверху параболоидом вращения z=x^2 +y^2 (см.рисунок).

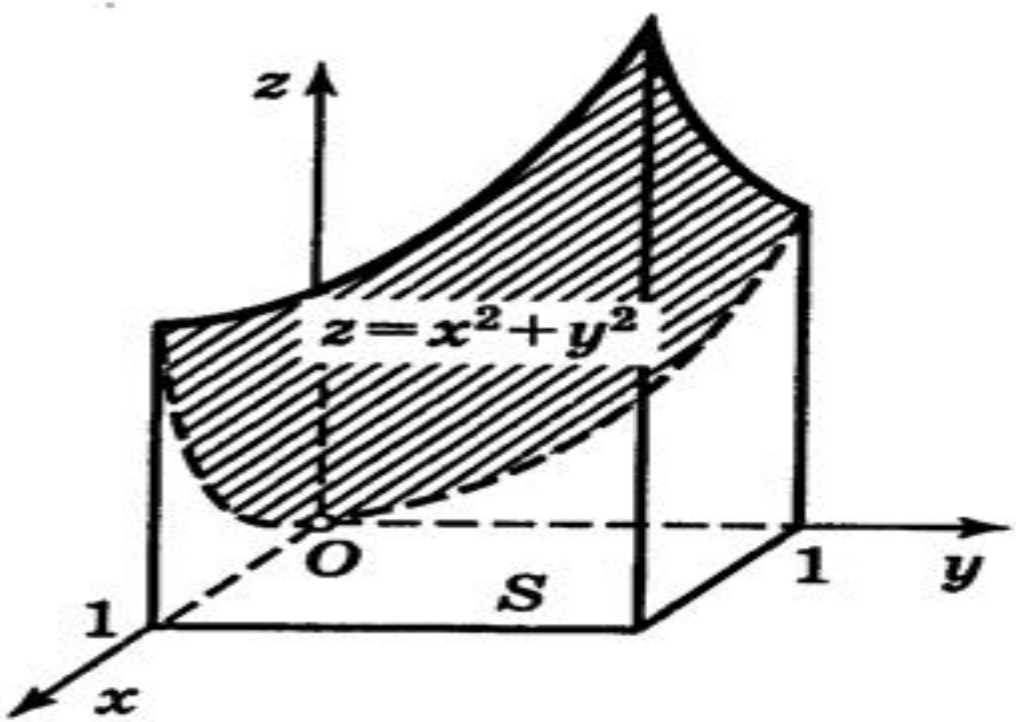


Рис.