1) Логическая функция F задаётся выражением $\neg w \lor (x \lor \neg z) \land (\neg x \lor \neg y \lor z)$. На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий **все наборы аргументов**, при которых функция F ложна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z, w.

?	?	?	?	F
0	1	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

2) Логическая функция F задаётся выражением $x \vee \neg w \vee (y \wedge \neg z)$. На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий **все наборы аргументов**, при которых функция F ложна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z, w.

?	?	?	?	F
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

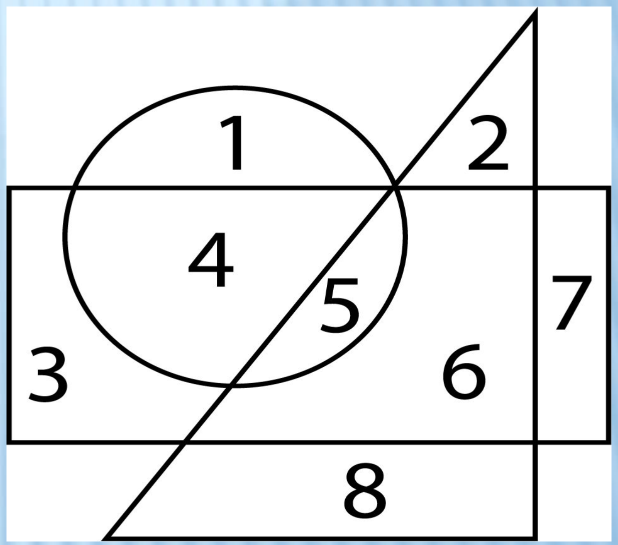
3) Логическая функция F задаётся выражением $x \vee (\neg y \vee z \vee w) \wedge (y \vee \neg w)$. На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий **все наборы аргументов**, при которых функция F ложна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z, w.

?	?	?	?	F
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

Высказывания A, B, C истинны только для точек, принадлежащих кругу, треугольнику и прямоугольнику соответственно. На схеме цифрами обозначены непересекающиеся области. Напишите через запятую в порядке возрастания номера областей, в которых будет истинным выражение:

(B and not C) or C and (A ↔ B)



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множества будем обозначать большими латинскими буквами-**А**

Универсальным называется множество, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком. Обозначим буквой Е основное или универсальное множество т.е. **A U E = E; A∩E =A**

Пересечение множеств. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

Объединение множеств $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Разность $\mathbf{A \setminus B} = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$

Дополнение $\mathbf{E \setminus A = \{x \mid x \in E ,\ x \notin A\}}$**.**

- пересечение множеств соответствует умножению логических величин, а объединение – логическому сложению;
- пустое множество $\varnothing$ – это множество, не содержащее ни одного элемента, оно играет роль нуля в теории множеств;
- универсальное множество играет роль логической единицы;
- пусть требуется выбрать множество А так, чтобы выполнялось равенство $A + X = 1$; в этом случае множество А должно включать дополнение X , $A_{min}=X$
- пусть требуется выбрать множество А так, чтобы выполнялось равенство $A+X=1$, в этом случае множество А должно включать дополнение X , $A_{max}=X$

2. На числовой прямой даны два отрезка: P = [2, 42] и Q = [22, 62]. Выберите такой отрезок A, что формула ((x ∈ P) → (x ∉ Q)) → (x ∉ A)
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1)[3,14] 2) [23,32] 3) [45,54] 4) [15,45]

Решение – 1 способ:

Построим таблицу истинности для данной формулы:

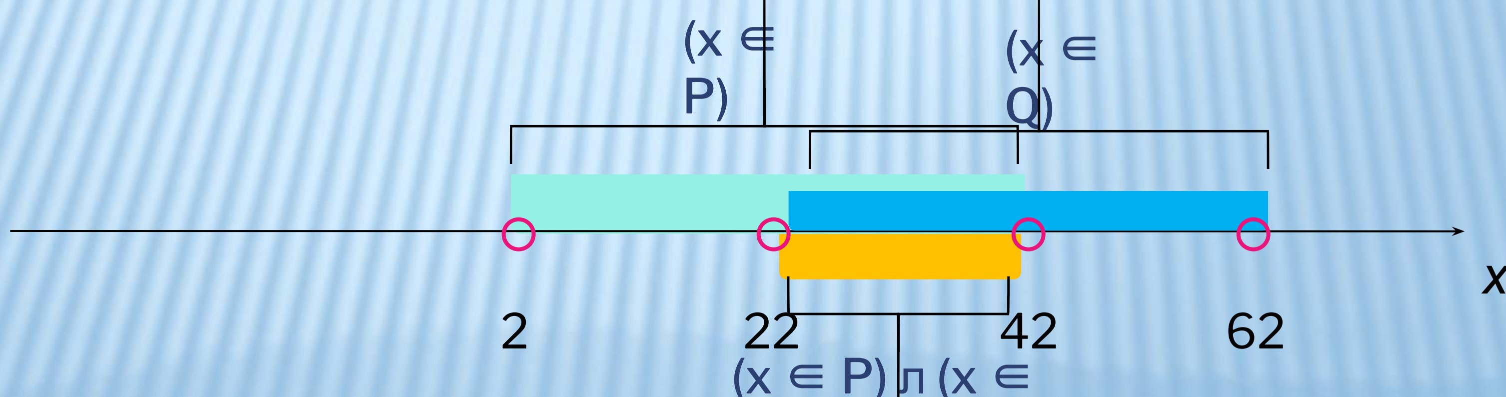
Промежуток	***x ∉ A***	***x ∈ P***	***→***	***x ∈ Q***	***x∉Q***	***F***
X < 2	1	0	1	0	1	1
2 < X < 22	1	1	1	0	1	1
22 < X < 42	*	1	0	1	0	1
42 < X <62	1	0	1	1	0	1
X > 62	1	0	1	0	1	1

По таблице видно, что отрезок A должен целиком помещается внутри отрезка [22,42].

Правильный ответ – 2.

2. Решение – способ 2

Преобразуем выражение ((x ∈ P) → (x ∉ Q)) → (x ∉ A) и получим:
(x ∈ P) л (x ∈ Q) V (x ∉ A)



Верный ответ —2 (отрезок [23,32])

Задание 9: *На числовой прямой даны два отрезка: P = [2, 10] и Q = [6, 14]. Выберите такой отрезок A, что формула*
((x ∈ A) → (x ∈ P)) ∨ (x ∈ Q) тождественно истинна

1) [0, 3]
2) [3, 11]
3) [11, 15]
4) [15, 17]

Задание 10: *На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 40], Q = [5, 15],*
R = [35, 50], Выберите такой отрезок A, что формула
((x ∈ A) → (x ∈ P)) ∨ ((x ∈ Q)→ (x ∈ R)) тождественно истинна

1) [5, 20]
2) [3, 12]
3) [3, 7]
4) [120, 130]

На числовой прямой даны два отрезка: P = [37, 60] и Q = [40, 77].

Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \land \neg (x \in A)) \rightarrow \neg (x \in P))$

истинна при любом значении переменной x, т.е. принимает значение 1 при любом значении переменной x.

На числовой прямой даны два отрезка: P = [11, 36) и Q = (21, 55]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула **$((x \in P) \rightarrow \neg (x \in Q)) \rightarrow \neg (x \in A)$** истинна при любом значении переменной x, т.е. принимает значение 1 при любом значении переменной x.

На числовой прямой даны два отрезка: P = [5; 30] и Q = [14;23]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in P) \longleftrightarrow (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

- Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

- Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и Q = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 }. Известно, что выражение

$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.


inga paltser

(**демо-2021**). Обозначим через **ДЕЛ(n,m)** утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа А формула

¬ДЕЛ(x,A)→(ДЕЛ(x,6)→¬ДЕЛ(x,9))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение (теоретическое):

1) для сокращения записи введём обозначения:
   ДЕЛ(x,A) = A
   ДЕЛ(x,6) = D_6
   ДЕЛ(x,9) = D_9
2) перепишем выражение в виде $\overline{A} \to (D_6 \to \overline{D_9}) = 1$
3) используя формулу $A \to B = \overline{A} + B$, раскроем первую импликацию:
   $A + (D_6 \to \overline{D_9}) = 1$
4) и вторую:
   $A + \overline{D_6} + \overline{D_9} = 1$
5) согласно правилу де Моргана $\overline{D_6} + \overline{D_9} = \overline{D_6 \cdot D_9}$, так что
   $A + \overline{D_6 \cdot D_9} = 1$
6) сведём выражение к единственной импликации
   $D_6 \cdot D_9 \to A = 1$
7) сформулируем правило, которое мы получили: если значение x делится на 6 и делится на 9, то оно делится на A;
8) если значение x делится на 6 и делится на 9, то оно делится на наименьшее общее кратное НОК(6,9)=18, поэтому наибольшее значение *А*, удовлетворяющее условию, равно 18

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg ДЕЛ(x, A) \wedge ДЕЛ(x, 21)) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 14)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg ДЕЛ(x, A) \wedge ДЕЛ(x, 15)) \rightarrow (\neg ДЕЛ(x, 18) \vee \neg ДЕЛ(x, 15))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 34) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 51))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Известно, что для некоторого отрезка A формула

$$((x \in A) \to (x^2 \le 64)) \land ((x^2 \le 25) \to (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной x). Какую наименьшую длину может иметь отрезок A?

Решение:

1) заметим, что здесь два условия объединяются с помощью логической операции «И»:

   $(x \in A) \to (x^2 \le 64)$

   $(x^2 \le 25) \to (x \in A)$

1) рассмотрим первое условие; чтобы импликация была истинна, при истинной левой части (посылке) вторая часть (следствие) тоже должна быть истинна
2) это значит, что если x принадлежит отрезку A, должно выполняться условие $x^2 \le 64$, то есть

   $|x| \le 8$, поэтому отрезок A должен целиком содержаться внутри отрезка [–8; 8]

1) теперь рассмотрим второе условие: если $x^2 \le 25$, то есть если $|x| \le 5$, то такой x должен принадлежать отрезку A
2) это значит, что весь отрезок [–5; 5] должен находиться внутри A, длина этого отрезка – 10.
3) Ответ: 10.

Для какого наибольшего целого числа А формула

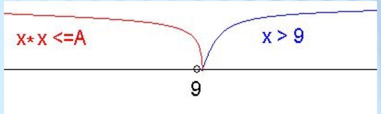
$$((x \le 9) \to (x \cdot x \le A)) \wedge ((y \cdot y \le A) \to (y \le 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

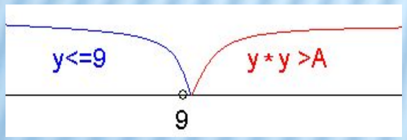
$(x > 9) + (x \cdot x \le A) = 1$

$(y \cdot y > A) + (y \le 9) = 1$

- Перейдём к числовой прямой. Чтобы формула была истинной, каждая записанная выше сумма должна закрывать всю ось. Для первого выражения это будет выглядеть так:



- Интервал от 10 и далее закрывает неравенство $x > 9$, а интервал от 0 до 9 включительно закрывает неравенство $x \cdot x \le A$. И поскольку x на этом интервале не превышает 9, выражение $x \cdot x \le A$ будет истинным уже при А=81
- Аналогично для второй суммы:



- интервал от 0 до 9 включительно закрывает неравенство $y \le 9$, а интервал от 10 и далее закроет неравенство $y \cdot y > A$. И поскольку значения у начнутся здесь с 10, а $y \cdot y = 100$, *то выражение гарантированно будет истинным, если А будет меньше 100, то есть, не будет превышать 99.*
- *Ответ: 99.*

Для какого наибольшего целого числа А формула

$$((x \le 3) \to (x \cdot x \le A)) \land ((y \cdot y \le A) \to (y \le 15))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

*Для какого наименьшего целого числа **A** формула*

(y + 5x <= 34) → ((y - x > 4) ∨ (y <= A))

*тождественно **истинна**, т.е. принимает значение **1** при любых целых неотрицательных **x** и **y**?*

1. Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

2. Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Обозначим через m & n поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, 14 & 5 = 1110_2 & 0101_2 = 0100_2 = 4. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$\boldsymbol{x \,\&\, 29 \neq 0 \rightarrow (x \,\&\, 12 = 0 \rightarrow x \,\&\, A \neq 0)}$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Введем обозначения:

x & 29 ≠ 0 -B

x & 12 ≠ 0 -C

x* & *A* ≠ *0* -*A

Преобразуем выражение по законам алгебры логики: B → (¬ C → A) = ¬ B+ C+ A =1 A= ¬ (¬ B+C)=B ∧ ¬C

Запишем число 29 в двоичной системе счисления:

$29_{10} = 11101_2$.

$12_{10} = 01100_2$, инверсия $12_{10} = 10011_2$

B ∧ ¬ C = 11101_2.

10011_2

A= 10001

двоичная запись искомого числа А должна содержать единичные биты в нулевом и четвертом разрядах (как обычно, считая справа налево, начиная с нуля).

Тем самым, наименьшее А = $10001_2 = 17_{10}$.

Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$((x \mathbin{\&} 28 \neq 0) \vee (x \mathbin{\&} 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 17 = 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$((x \mathbin{\&} 20 \neq 0) \vee (x \mathbin{\&} 55 \neq 0)) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 7 = 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$((x \mathbin{\&} 26 \neq 0) \vee (x \mathbin{\&} 13 \neq 0)) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 24 = 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?