ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Способы отбора корней нелинейных уравнений

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

- **Ознакомиться со способами отбора корней нелинейных уравнений**

Какие уравнения называются нелинейными

- Нелинейными уравнениями называются уравнения вида $f(x)=0$
- Данная функция $f(x)$ является нелинейной

Нелинейные функции делятся на:

- – нелинейная алгебраическая функция вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

- – трансцендентные функции – тригонометрические, обратные тригонометрические, логарифмические, показательные и гиперболические функции;
- – комбинирование этих функций .

$$\left(x^2 + \sin x\right)$$

- Решением нелинейного уравнения является такая точка x^*,которая при подстановке в данное уравнение обращает его в тождество. На практике не всегда удается подобрать такое решение. В этом случае, решение уравнения находят с применением приближенных (численных) методов. Тогда решением нелинейного уравнения будет являться такая точка x^*, при подстановке которой в уравнение последнее будет выполняться с определенной степенью точности, т.е. $|f(x^*)| \leq \varepsilon$, где ε- малая величина

- **Нахождение таких решений и составляет основу численных методов и вычислительной математики**
- **Решение нелинейных уравнений распадается на два этапа: отделение корней уравнений и уточнение корней нелинейных уравнений.**

- На первом этапе необходимо исследовать уравнение и выяснить, имеются корни или нет. Если корни имеются, то сколько их, и затем определить интервалы, в каждом из которых находится единственный корень.

- **Первый способ отделения корней – графический.**

- Исходя из уравнения, можно построить график функции $y = f(x)$. Тогда точка пересечения графика с осью абсцисс является приближенным значением корня.

- Если $f(x)$ имеет сложный вид, то представим ее в виде разности двух функций $f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$
- Так как $f(x)=0$, то выполняется равенство $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$
- Построим два графика $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$. Значение α - приближенное значение корня, являющееся абсциссой точки пересечения двух графиков.

Построенные графики

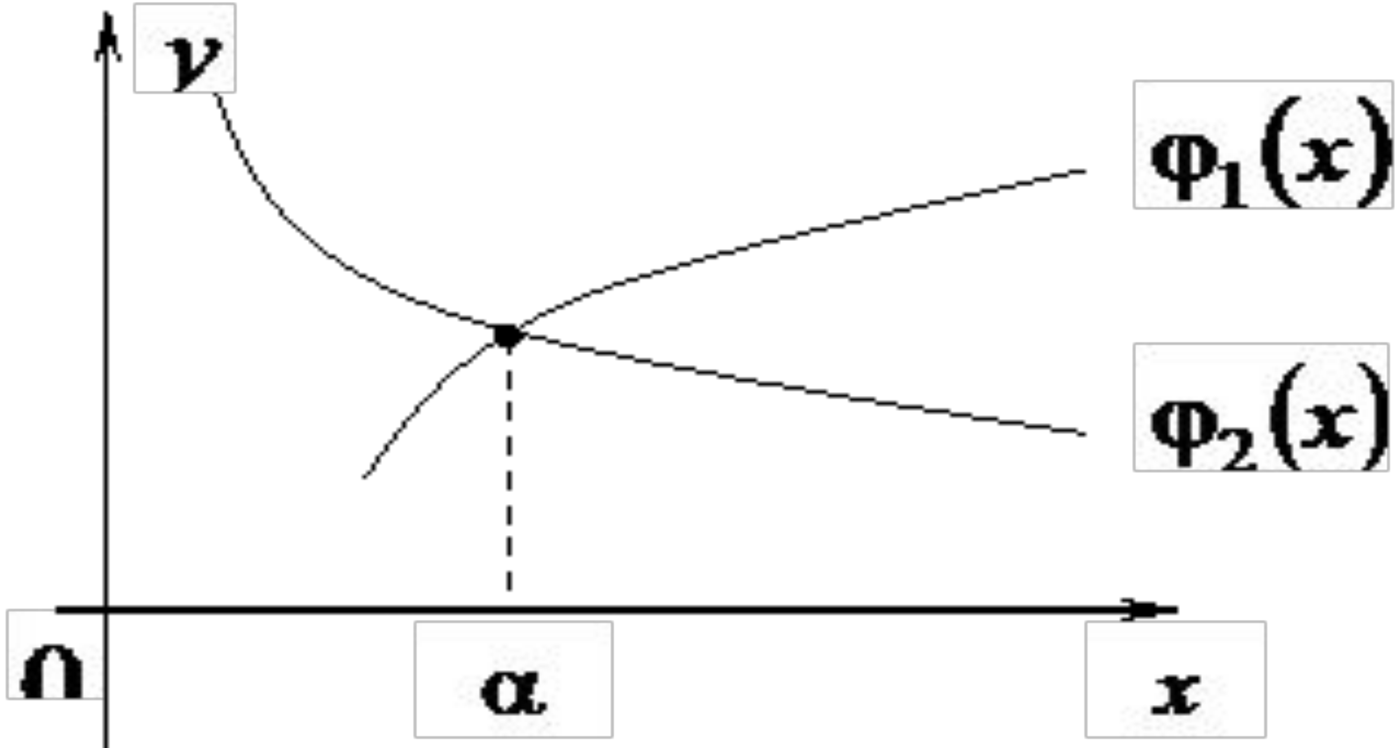


Рис.1

ПРИМЕР 1

- Пусть дано нелинейное уравнение вида

$$x - e^{-x} = 0$$

- . Решим его графическим методом. Для этого представим уравнение в виде

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$$ где

$$\varphi_1(x) = x \qquad \varphi_2(x) = e^{-x}$$

Построенные графики

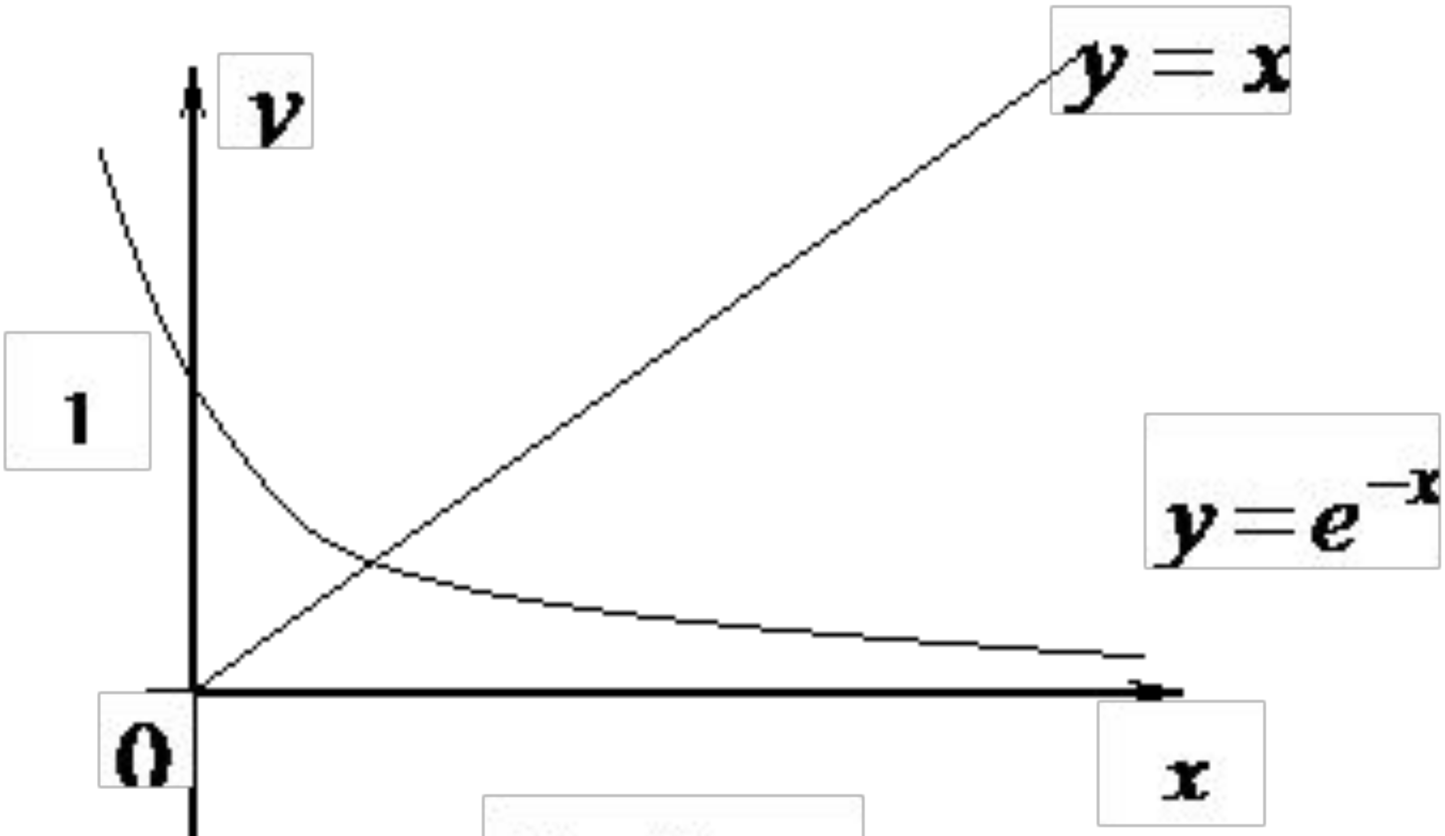


Рис.2

ПРИМЕР 2

- Пусть задано нелинейное уравнение вида $e^{-x} + x = 0$ или $-x = e^{-x}$.
- Построив два графика функций $y = -x$ и $y = e^{-x}$, видим, что исходное уравнение не имеет корней.
- Смотри рисунок

Построенные графики

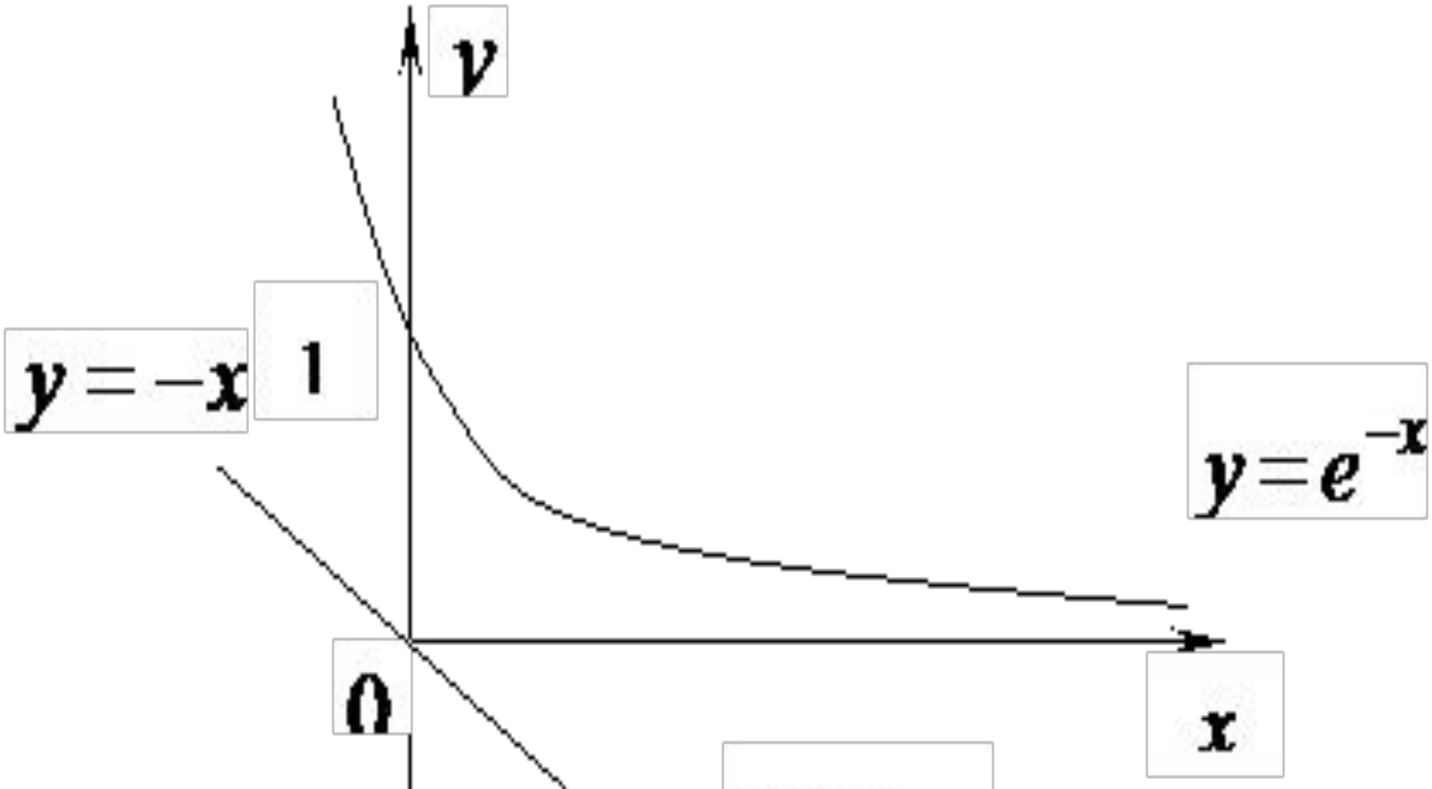


Рис.3

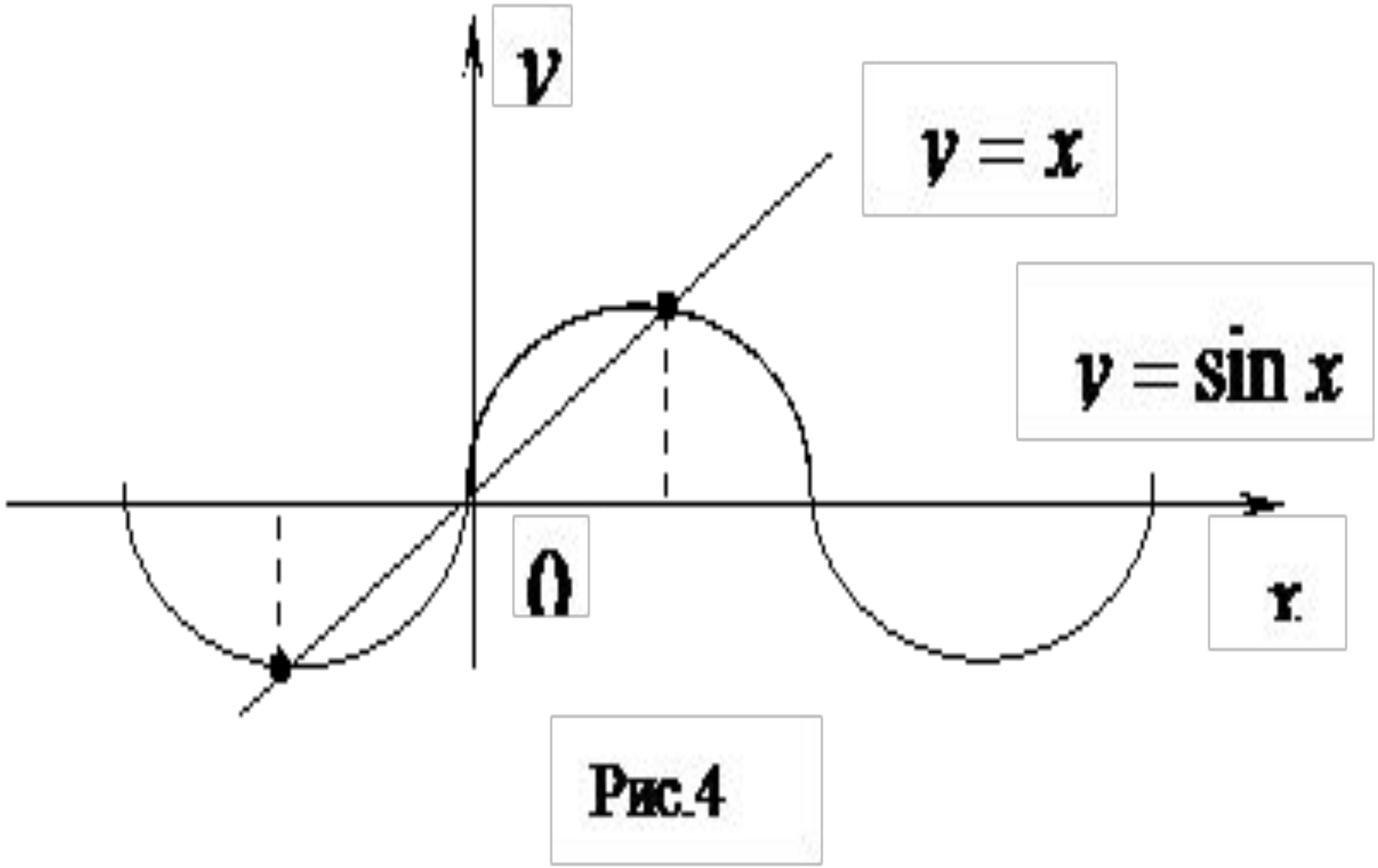
ПРИМЕР 3

- Дано нелинейное уравнения вида

$$x - \sin x = 0$$

- с помощью аналогичных преобразований и построений получим, что исходное уравнение имеет несколько (три) корней.

Построенные графики



- Второй способ отделения корней нелинейных уравнений – **АНАЛИТИЧЕСКИЙ**
- В этом случае процесс отделения корней нелинейных уравнений основывается на следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1

- Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и меняет на концах отрезка знак (т.е. $f(a)f(b) < 0$) то на $[a,b]$ содержится хотя бы один корень.

ТЕОРЕМА 2

- Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, выполняется условие вида $f(a)f(b)<0$ и производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a,b]$, то на отрезке имеется единственный корень.

n

ТЕОРЕМА 3

- Если функция $f(x)$ является многочленом n степени и на концах отрезка $[a,b]$ меняет знак, то на $[a,b]$ имеется нечетное количество корней (если производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a,b]$, то корень единственный). Если на концах отрезка функция не меняет знак, то уравнение либо не имеет корней на $[a,b]$, либо имеет четное количество корней.

- При **АНАЛИТИЧЕСКОМ** методе исследований необходимо выявить интервалы монотонности функции .

$$f(x)$$

- Для этого необходимо вычислить критические точки $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, т.е. точки, в которых первая производная $f'(\xi_i)$ равна нулю или не существует.

- Тогда вся числовая ось разбивается на интервалы монотонности (ξ_i, ξ_{i+1}). На каждом из них определяется знак производной $f'(x_i)$, где $x_i \in (\xi_i, \xi_{i+1})$. Затем выделяем те интервалы монотонности, на которых функция $f(x)$ меняет знак. На каждом из этих интервалов для поиска корня используются методы уточнения корней.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В данной лекции рассмотрены следующие вопросы:
- Какие уравнения называются нелинейными;
- Способы отбора корней (приблизительных); нелинейных уравнений – графический и аналитический;
- В следующих лекциях будут рассмотрены методы уточнения корней.