Кислицын А.А.
Физика атома, атомного ядра и элементарных частиц

8 (0). Соотношения неопределенности.

Принцип неопределенности

Наличие волновых свойств у микрочастиц вносит ограничения на применимость понятий классической физики. Обратимся снова к оптико-механической аналогии. При переходе от геометрической оптики к волновой теряет смысл понятие луча. В классической механике понятию луча соответствует понятие траектории, которое теряет смысл при переходе к волновой механике.

Утверждение об отсутствии траекторий у микрочастиц является содержанием принципа неопределенности, лежащего в основе волновой (квантовой) механики.

Соотношения неопределенности

Математическим выражением принципа неопределенности являются соотношения неопределенности, полученные впервые Гейзенбергом (Heisenberg W., 1927 г, нобелевская премия 1932г):

$$\Delta x \Delta p_x \geq \square, \ \Delta y \Delta p_y \geq \square, \ \Delta z \Delta p_z \geq \square, \qquad (8.1)$$

где Δx, Δy Δz *и* Δp_x Δp_y Δp_z – неопределенности значений координаты и импульса микрочастицы.

Действительно, если бы частица имела одновременно определенное значение координаты и импульса, то в следующий момент времени она переместилась бы в определенную точку и т.д., т.е. двигалась бы по определенной траектории.

Таким образом, отсутствие траектории согласуется с утверждением, что частица не имеет одновременно определенных значений координаты и импульса.

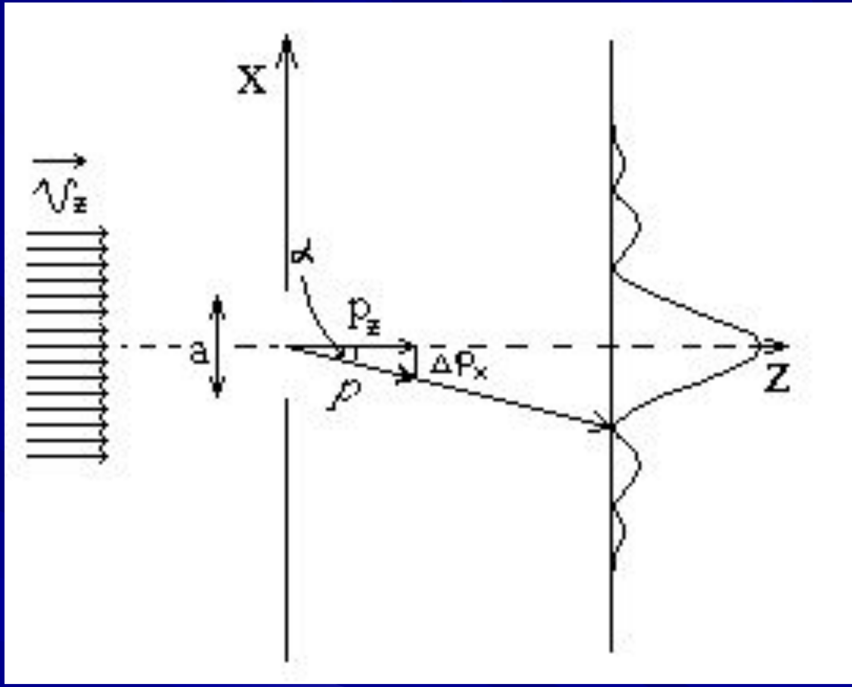
Соотношения неопределенностей (8.1) можно получить из формулы (7.8), которая связывает ширину волнового пакета Δx (в пределах главного максимума) с интервалом Δk волновых чисел волн, образующих пакет:

$$\Delta x = 1 / \Delta k$$

По уравнению де-Бройля (5.2) $\Delta k = \Delta p / \hbar$,
отсюда сразу получаем: $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$

Однако, как было отмечено выше, современная физика отказалась от гипотезы рассмотрения электрона как волнового пакета, поэтому мы получим соотношения неопределенностей непосредственно из эксперимента.

Вывод соотношений неопределенности из эксперимента



Пусть на экран со щелью шириной a падает поток электронов со скоростью V_z. Т.е. слева от экрана $p = p_z = mV_z$, $p_x = p_y = 0$, а координаты частицы неопределенны. В момент прохождения щели частица находится между ее краями, т.е. ее координата определена в пределах $-a/2 < x < a/2$, т.е. $\Delta x = a$.

При этом опыт показывает, что поток за щелью не параллелен оси Z: на экране появляется дифракционная картина, причем угловая ширина α главного дифракционного максимума равна $sin(\alpha)=\lambda /a$.

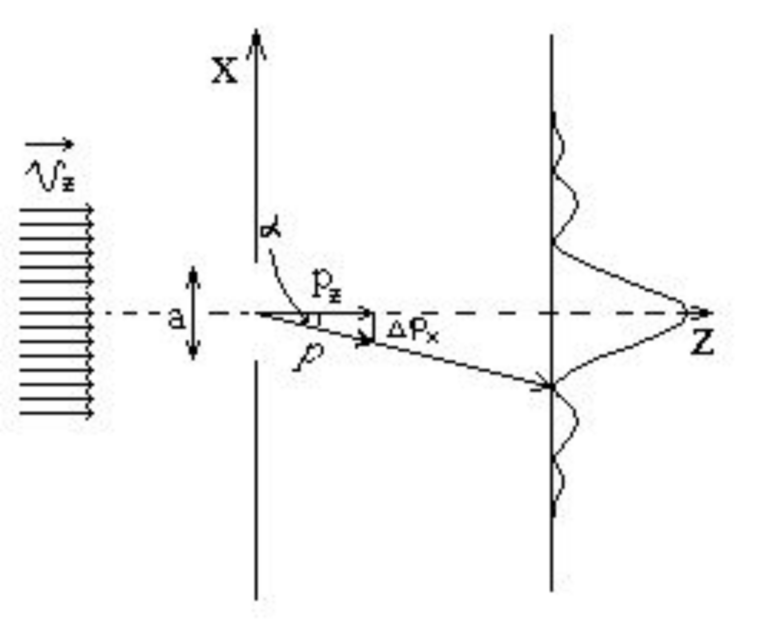
Вывод соотношений неопределенности из эксперимента

Это означает, что после прохождения щели компонента импульса p_x перестала быть определенной (равной нулю), и эта неопределенность Δp_x равна

$$\Delta p_x = p\sin\alpha = \frac{h}{\lambda}\sin\alpha = \frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}$$

откуда

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = h.$$



Если учесть максимумы более высоких порядков, то можно записать: $\Delta x \cdot \Delta p_x = nh$, ($n$ = 2, 3 и т.д.), или

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

Аналогичным образом можно получить соотношения и для координат y и z.

Соотношение неопределенности для энергии

Учитывая, что $\Delta p = F\Delta t$ и $\Delta E = F\Delta x$, находим:

$$\Delta p\Delta x = F\Delta t\cdot\Delta x = \Delta E\cdot\Delta t \geq \hbar$$

т.е.

$$\Delta E\cdot\Delta t \geq \hbar.$$

Здесь ΔE – неопределенность разности энер-гий двух состояний: $\Delta E = \Delta\ (E_2 - E_1)$,

Δt – время, в течение которого реализуется пе-реход из одного состояния в другое (не про-должительность самого перехода, а отрезок времени, в течение которого переход имел место).

Ширина спектральных линий

В качестве примера рассмотрим вопрос об естественной ширине спектральных линий. Опыт показывает, что излучаемые атомом кванты не имеют строго определенной энергии. Разброс ΔE связан с временем жизни τ атома в возбужденном состоянии. В основном состоянии атом живет бесконечно долго ($\tau_0 = \infty$), поэтому ширина уровня основного состояния равна нулю: $\Delta E_0 = 0$. Во всех возбужденных состояниях атом бесконечно долго находиться не может (обычно время жизни $\approx 10^{-8}$ с), поэтому существует конечная естественная ширина возбужденных уровней:

$$\Delta E_i = \Gamma \approx \hbar/\tau.$$

Оценка размеров и энергии атома водорода

С помощью соотношений неопределенности сделаем оценку размеров и энергии атома водорода. Согласно принципу неопределенности электрон не может упасть на ядро, т.к. в этом случае он имел бы одновременно определенную координату и скорость (импульс). По этой же причине невозможно точно указать положение электрона относительно ядра (иначе неопределенность его импульса станет бесконечной). Таким образом, существует разброс в расстояниях электрона от ядра, и определенная вероятность обнаружить электрон на любом расстоянии R.

Оценим расстояние, на котором электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью. Согласно соотношению неопределенности $\Delta p \Delta R \sim \hbar$. Расстояние известно с ошибкой $\sim R$, поэтому импульс может быть определен с точностью порядка $p \sim \hbar / R$. Кинетическая энергия

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8\pi^2 m R^2}$$

Потенциальная энергия

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Полная энергия

$$E = T + U = \frac{h^2}{8\pi^2 m R^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Состояние атома наиболее устойчиво при минимальном значении энергии, соответствующее расстояние R_0 и есть наиболее вероятное. Чтобы его найти, продифференцируем E по R, и приравняем dE/dR к нулю:

$$\frac{dE}{dR} = -\frac{2h^2}{8\pi^2 mR^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{1}{4\pi R^2}\left(\frac{e^2}{\varepsilon_0} - \frac{h^2}{\pi mR}\right) = 0$$

Отсюда $R = \dfrac{h^2\varepsilon_0}{\pi me^2}$, что совпадает с результатом, полученным в теории Бора.

Таким образом, радиус первой боровской орбиты – это наиболее вероятное удаление электрона от ядра.

Оценка энергии атома водорода

Соответствующее наименьшее значение энергии получим, если в формулу для полной энергии

$$E = T + U = \frac{h^2}{8\pi^2 m R^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

подставим

$$R = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}$$

Получаем:

$$E = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$$

что также совпадает с результатом, даваемым теорией Бора