Элементы символической логики

Лекция 7

Символическая логика

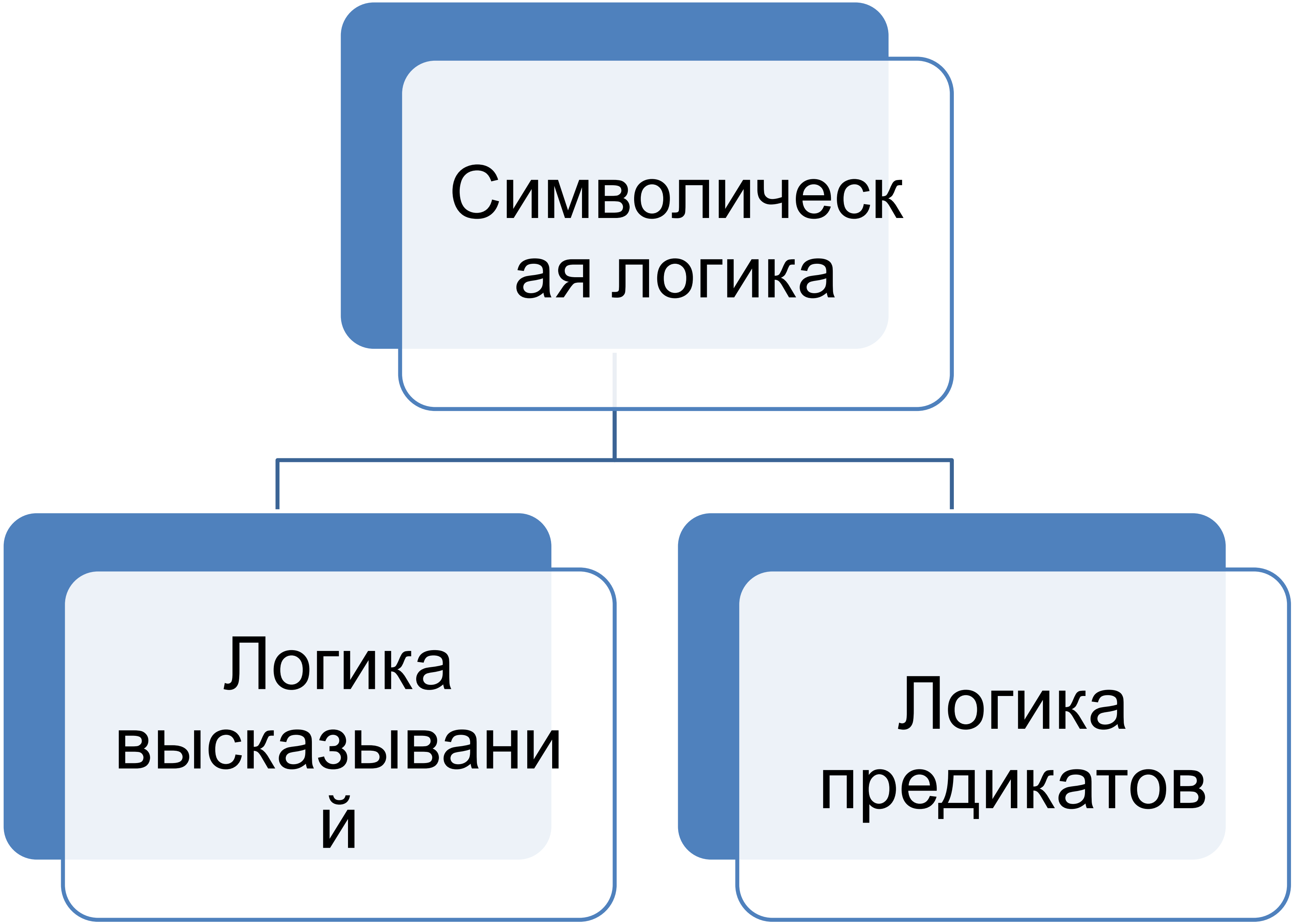
она же **символическая**

формируется в XIX веке,

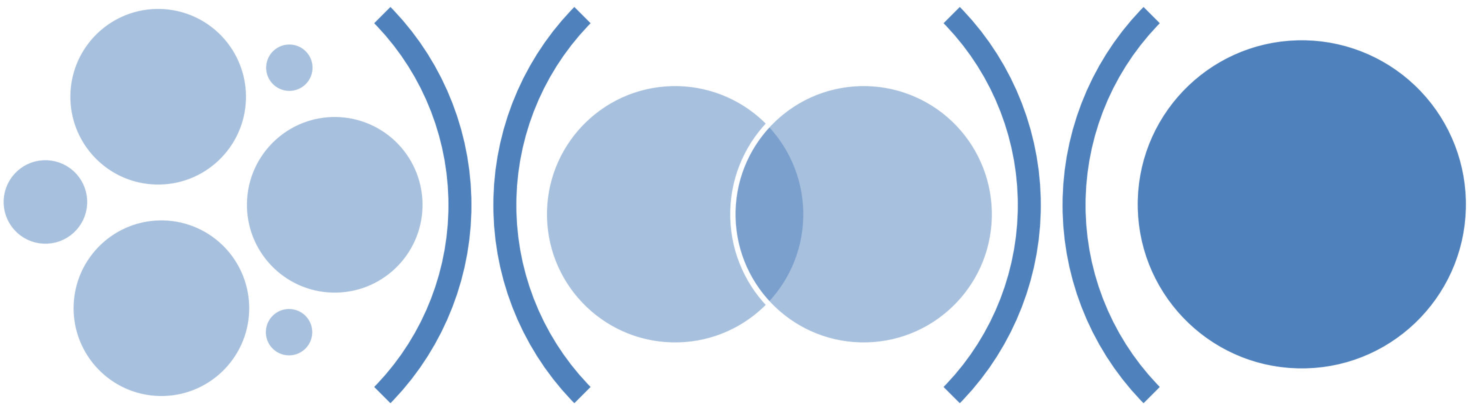
благодаря

Готлобу **Фреге** и Бертрану **Расселу**

состоит в обширном использовании символов для привычных логических форм, **которые делают логическое рассуждение более сжатым и наглядным**


Символическая логика
Логика высказываний
Логика предикатов

Логика высказываний



Простые высказывания и юнкторы

Сложные высказывания

Выводы

Высказывание

мысль, выраженная повествовательным предложением, которая может быть истинной или ложной

Формальный аппарат

A, B, C…. – пропозициональные переменные (формулы), отражающие независимый факт;

¬ – униарная связка-юнктор;

⋀, ⋁ , ⊕… – бинарные связки-юнкторы;

() – технические знаки;

(A ⋀ B), (¬ A)…. – формулы.

Юнкторы логики высказываний

отрицание	НЕ-	$\neg$, ~
конъюнкция	И	$\wedge$, &
адъюнкция	ИЛИ	$\vee$, +
контраваленция	ЛИБО-ЛИБО	$\oplus$, $\not\Leftrightarrow$
импликация	ЕСЛИ - ТО	$\rightarrow$, $\supset$
эквиваленция	ЕСЛИ И ТОЛЬКО ЕСЛИ	$\leftrightarrow$, $\equiv$

Преобразование конъюнкции

в дизъюнкцию

$$(A \land B) = \neg(\neg A \lor \neg B)$$

в импликацию

$$(A \land B) = \neg(A \rightarrow \neg B)$$

Преобразование дизъюнкции

в конъюнкцию

$$(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

в импликацию

$$(A \vee B) = (\neg A \to B)$$

Преобразование импликации

в конъюнкцию

$$(A \rightarrow B) = \neg(A \land \neg B)$$

в дизъюнкцию

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \lor B)$$

Преобразование строгой дизъюнкции в конъюнкцию

$$(A \oplus B) = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

- Формулы
  - тождественно-истинные **(законы)**
    - истинные при всех наборах истинностных значений переменных
  - тождественно-ложные **(противоречия)**
    - ложные при всех наборах истинностных значений переменных
  - выполнимые (нейтральные)
    - то истинные, то ложные при различных наборах истинностных значений входящих в них переменных

Правило подстановки

любую буквенную переменную в символическом выражении можно заменять на произвольную формулу

Например,

$(p \vee \neg p)$

$p = (a \leftrightarrow b)$

$((a \leftrightarrow b) \vee \neg(a \leftrightarrow b))$

Законы символической логики

- дистрибутивности

- ассоциативности
- коммутативности
- двойственности
- контрапозиции
- импортации
- экспортации
- транспозиции
- исключения
- поглощения
- выявления

Закон ассоциативности

$$(A \land (B \land C)) = ((A \land B) \land C)$$

$$(A \lor (B \lor C)) = (A \lor B) \lor C)$$

Закон коммутативности

$$(A \land B) = (B \land A)$$

$$(A \lor B) = (B \lor A)$$

Закон дистрибутивности

для двух переменных

$$(A \wedge (B \vee C)) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(A \vee (B \wedge C)) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

для большего количества переменных

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) = (A \wedge C) (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$$

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) = (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$

Закон двойственности

для конъюнкции и дизъюнкции

$$(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

для эквивалентности и строгой дизъюнкции

$$(A \leftrightarrow B) = \neg(\neg B \oplus \neg A)$$

$$(A \oplus B) = \neg(\neg B \leftrightarrow \neg A)$$

Закон контрапозиции

$$(A \to B) = (\neg A \to \neg B)$$

$$((A \land B) \to C) = (\neg C \to (\neg A \lor \neg B))$$

Закон импортации

$$(A \to (B \to C)) = ((A \land B) \to C)$$

Закон экспортации

$$((A \land B) \to C) = (A \to (B \to C))$$

Закон транспозиции

$$((A \land B) \rightarrow C) = ((A \land \neg C) \rightarrow \neg B)$$

Закон исключения

$$(A \lor B) \land (\neg A \lor B)$$

$$= B)$$

Закон поглощения

$$(A \land (A \lor B)) = A$$

$$(A \lor (A \land B)) = A$$

Закон выявления

$$(A \lor C) \land (B \lor \neg C) = (A \lor C) \land (B \lor \neg C) \land (A \lor B)$$

$$(A \land C) \lor (B \land \neg C) = (A \land C) \lor (B \land \neg C) \lor (A \land B)$$

Логика предикатов

результат реконструкции естественного языка

Здесь есть точные правила построения высказываний (формул) и сложных имен (термов)

Этот язык предназначен для аксиоматического построения теорий, для анализа содержания высказываний естественного языка и выявления логических отношений между ними, для описания правил рассуждения, построения выводов и доказательств

- Нелогические символы естественного языка
  - Предикатор
  - Предметные функторы
  - Имя

Имена

обозначают отдельный объект, бывают простые и сложные.

Простые не содержат никакой информации об обозначаемых индивидах (имена собственные).

Сложные имена не только обозначают предмет, но и указывают на какие-либо его свойства

Предметные функторы

знаки так называемых предметных функций (функциональная константа)

Наряду с математическими функциями «синус», «логарифм», «умножение» и т.п. сюда относятся такие особые характеристики предметов, как скорость, плотность, возраст, пол, профессия, агрегатное состояние, место жительства и др.

Предикатор

(предикатная константа)

- выражение языка (слова и словосочетания), предметными значениями которого являются **свойства** (одноместные предикаторы) или **отношения** (многоместные предикаторы)

Язык логики предикатов

p, q, r, p_1 …	пропозициональные переменные (обозначают целые повествовательные предложения)
a, b, c, a_1…	предметные константы (обозначают единичные имена)
x, y, z, x_1…	предметные переменные (обозначают общие имена)
P, Q, R, P_1…	предикатные символы (обозначают свойства и отношения)
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$…	логические переменные (обозначают типы связи)
∀	квантор всеобщности («все», «каждый»)
∃	квантор существования («некоторые», «хотя бы

Определение терма

- 1
  - любая предметная переменная и предметная константа – термы
- 2
  - если F – предметный функтор, а t_1, t_2, …, t_n –термы, то F^n (t_1, t_2, …, t_n) – это термы
- 3
  - термами являются только выражения, которые построены по пунктам 1 и 2

Пример

a – «Аполлон»

$в$ – «Венера»

f^1 – «красавец»

g^2 – «молодой»

$f^1(a)$ – Аполлон – красавец.

$g^2(a,в)$ – Аполлон и Венера – молоды.

$g^2(f^1(a),в)$ – Красавец Аполлон и Венера – молоды.

$f^1(g^2(a,в))$ – Красавцы, молодые Аполлон и Венера.

Определение формулы

1. если P^n – n-местный предикатор, а $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то выражение $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ – формула
2. если A и B – формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – формулы
3. если *A* формула, x – переменная, то $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ – формулы
4. формулы - только такие выражения, которые построены по пунктам 1 – 3

Область действия квантора

Если формула **A** имеет вид **∀xB** или **∃xB**, то областью действия квантора **∀** или **∃** по переменной **x** является формула **B**

Пример

«Если целое число больше 13, то его квадрат делится без остатка на 4 или на 5»

$$\forall x((Px \wedge Q_2(x, 13)) \rightarrow (R(g(x, x), 4) \vee R(g(x, x), 5)),$$

где

P - «быть целым числом»,

Q2 - «больше чем»,

R - «делится на»,

Некоторые законы логики предикатов

1. Взаимовыразимость кванторов

$\forall xA \leftrightarrow \neg\exists x\neg A,$

$\exists xA \leftrightarrow \neg\forall x\neg A.$

2. Отрицание кванторов

$\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A,$

$\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A.$

3. Перестановка кванторов

$\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA,$

$\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA,$

$\exists x\forall yA \rightarrow \forall y\exists xA.$

Некоторые законы логики предикатов

4. Законы пронесения и вынесения кванторов

а) конъюнкция

$\forall a(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall aA \wedge \forall aB)$;,

$\exists a(A \wedge B) \rightarrow (\exists aA \wedge \exists aB)$,

б) дизъюнкция

$\exists a(A \vee B) \leftrightarrow (\exists aA \vee \exists aB)$,

$(\forall aA \vee \forall aB) \rightarrow \forall a(A \vee B)$,

в) импликация

$\forall a(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall aA \rightarrow \forall aB)$,

$(\exists aA \rightarrow \exists aB) \rightarrow \exists a(A \rightarrow B)$.

Примеры

«Все люди интересуются строением космоса»,

$$\forall x(P_1(x) \to Q_1(x, f(a)))$$

где P_1 – «быть человеком», Q_1 – «интересоваться», f – «строение …», a – «космос»

«Некоторые звёзды не видны невооружённым глазом, но видны в телескоп»

$\exists x(P_2(x) \wedge \forall y \forall z((P_3(y) \wedge P_4(z)) \to (\neg Q_2(x, y) \wedge Q_2(x, z))))$

где P_2 – «быть звездой», P_3 – «быть невооружённым органом зрения», P_4 – «быть телескопом»,

Исчисление естественного вывода

порождение одних формул из других

Здесь нет аксиом. Знание не истинное, а доказуемое.

Правила вывода

1.Введение конъюнкции		2.Удаление конъюнкции	
$A; B$		$A \wedge B$	$A \wedge B$
$A \wedge B$		A	B
3.Введение дизъюнкции		4.Удаление дизъюнкции	
A	B	$A \vee B$	
$A \vee B$	$A \vee B$	$A \rightarrow C$	
		$B \rightarrow C$	
		C	

Правила вывода

5.Введение импликации	6. Удаление импликации
[A] + гипотеза	A
:	$A \rightarrow B$
B	---
---	B
$A \rightarrow B$ - гипотеза	
7. Введение отрицания	8. Удаление отрицания
[A] + гипотеза	$\neg\neg A$
:	---
B	A
$\neg B$	

$\neg A$	

Пример

«Семён сидит дома или разговаривает по телефону. Если он сидит дома, то он скучает. Он не разговаривает по телефону. Стало быть, он скучает».

(1) $A \vee B$	
(2) $A \rightarrow C$	
(3) $\neg B$	
(4) A	1, 3, удаление адъюнкции
(5) C	2, 4, modus ponens

Спасибо за внимание