



Механика

К лекции, 11.11

Группы 20х



Формы движения твердого тела



- **Поступательное** (вместе с центром масс): $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
 $d\mathbf{P}/dt = m d^2\mathbf{r}/dt^2 = \Sigma\mathbf{F}$
- **Вращательное** – вокруг определенной оси OZ: $\varphi(t)$
 $dM_z/dt = I_z d^2\varphi/dt^2 = \Sigma N_z$
- **Плоское**: 2-мерное поступательное + вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости поступательного движения и сохраняющей направление: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) + , z(t)) + \varphi(t)$ вокруг OZ
- **Свободное**: комбинация поступательного и вращательного движения без ограничений. 3-х мерное поступательное движение (вместе с центром масс) + вращение вокруг любой оси, проходящей через центр масс, причем ось вращения может менять направление.

$$dM_i/dt = I_{ij} d\omega_j/dt = \Sigma N_i$$



Свободное движение твердого тела



При любом, самом сложном движении скорость любой точки тела, наблюдаемую из «лабораторной» системы отсчета, можно представить как сумму двух компонент:

- поступательной (вместе с центром масс), и
- вращательной (вокруг центра масс)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$$

здесь \mathbf{r} - радиус-вектор точки относительно центра масс тела, а $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость его вращения/

НО! При свободном движении связь векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и момента импульса \mathbf{M} сложнее.

Один вектор получается из другого не простым умножением на момент инерции I , а умножением на матрицу I_{ij} . $M_i = I_{ij} \omega_j$



Свободное движение твердого тела



При свободном движении твердого тела связь векторов угловой скорости ω и момента импульса M сложнее. Один вектор получается из другого не простым умножением на момент инерции число I , а умножением на матрицу I_{ij} .

$$M_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$M_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$M_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

$M_i = I_{ij} \omega_j$ - короткая форма записи
матричного умножения векторов

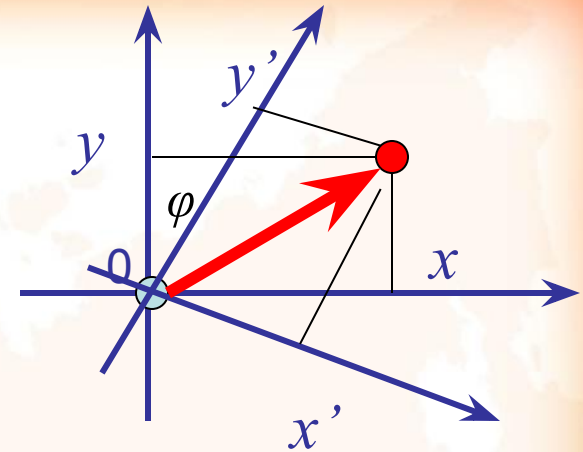


Преобразование координат при повороте СК:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + 0 \cdot z$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + 0 \cdot z$$

$$z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$



Свободное движение твердого тела



$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ M_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ M_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned}$$

$$M_i = I_{ij} \omega_j$$

I_{ij} - тензор инерции = матрица из 9-ти компонент

Вектора M и ω НЕ ОБЯЗАНЫ быть параллельными!



Свободное движение твердого тела



Если тело имеет оси симметрии, и если направить оси координат x , y , z вдоль осей симметрии, тензор инерции может стать диагональным

$$I_{xx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_x \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \omega_x \\ I_{yy} \omega_y \\ I_{zz} \omega_z \end{pmatrix} \quad M_i = I_{ii} \omega_i$$

Для “самых симметричных” тел (сфера, шар) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$; $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$
и все оси, проходящие через центр масс, одинаково «главные»

Вектора \mathbf{M} и $\boldsymbol{\omega}$ совпадают по направлению для любого тела, которое само вращается вокруг одной из своих главных осей симметрии



Свободно движущееся тело всегда вращается вокруг коси, проходящей через центр масс тела (не обязательно главной)

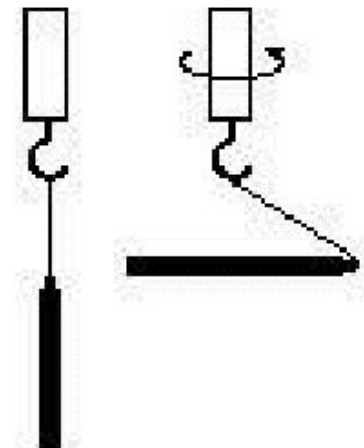
Оси вращения несимметричных тел, как правило, не устойчивы.

При наличии внешних сил (даже слабых) ось вращения может менять направление, а при вращении тела вокруг закрепленной оси на оси могут возникать заметные нагрузки. Если убрать закрепление - тело может начать «кувыркаться».

У симметричных тел могут быть т.н. главные оси симметрии, вращение вокруг которых может быть устойчиво.

«Самые главные» оси те, вращение вокруг которых всегда устойчиво. Такое вращение может продолжаться даже после снятия закрепления.

Пример: быстрое вращение стержня на подвесе остается устойчивым еще некоторое время, если снять нить с подвеса. По мере замедления вращения устойчивость его теряется.





СРОЧНО ВСЕ Смотрите «ФИЗИКУ в ОПЫТАХ» на openedu.ru!

Это необходимо для получения «зачета» и допуска к экзамену.

Но **ГЛАВНОЕ: Вы станете лучше понимать физику!**
Особенно это касается механики вращательного движения!

^



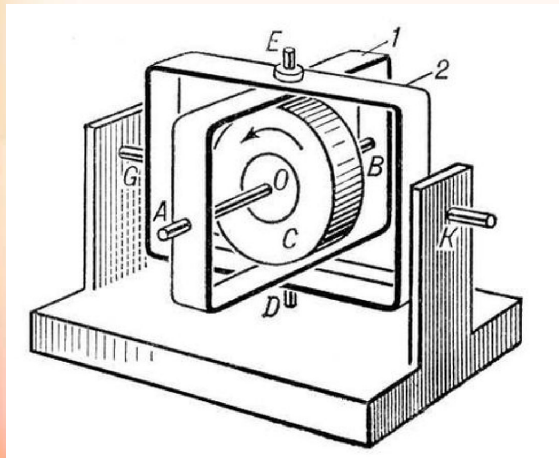
Гироскоп – массивное симметричное твердое тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии, причем ось симметрии гироскопа может поворачиваться в пространстве

Ось гироскопа –

ось симметрии гироскопа – ось X , является одной из главных осей инерции гироскопа. Две другие главные оси инерции (оси Y и Z), проведенные через точку O , лежат в плоскости, перпендикулярной оси X .

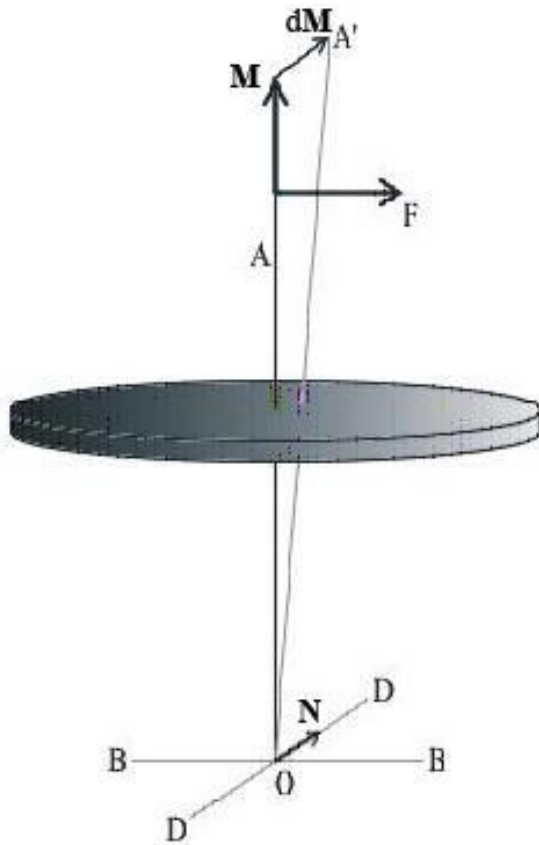
Точка опоры гироскопа –

Момент инерции гироскопа – неподвижная точка на оси гироскопа – точка O



$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N} \quad \vec{M} = I\vec{\Omega} = I\Omega\vec{e}_x$$

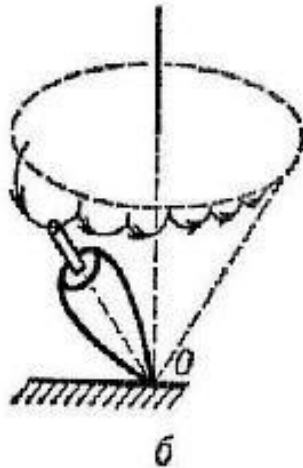
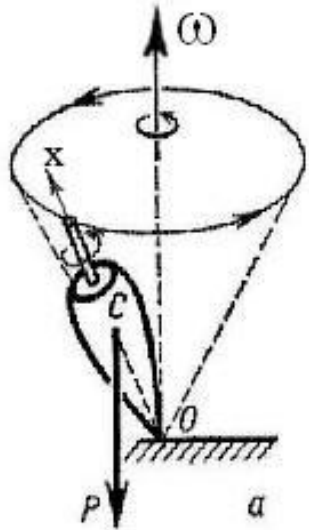
$$\vec{M} = I\vec{\Omega} = const.$$



Гироскопический эффект
 Под действием силы F , приложенной к оси гироскопа в направлении линии В-В, ось гироскопа смещается в направлении момента этой силы, то есть в перпендикулярном силе F направлении (вдоль линии D-D). Этот эффект называется *гироскопическим эффектом*

$$\frac{dM}{dt} = N$$

$$dM = N dt$$



Прецессия гироскопа –

вращение оси гироскопа под действием приложенных к оси внешних сил (силы тяжести \mathbf{P} , например).

Угловая скорость прецессии $\omega \ll \Omega$

$$\frac{dM}{dt} = \left[\omega, M \right] = N$$

$$\omega = -\frac{PX_c}{I\Omega}$$

ЧТО НАДО ЗНАТЬ из теории движения гироскопа:

- Угловая скорость прецессии ω обратно пропорциональна угловой скорости вращения гироскопа $\omega \sim 1/\Omega$
- Вектор ω направлен против вектора внешней силы \mathbf{P} ;
- Приближенная теория справедлива, когда $\omega \ll \Omega$.
- При $\omega \sim \Omega$ наблюдаются колебания оси гироскопа – *нутация*
- При уменьшении угловой скорости Ω вращение гироскопа теряет устойчивость



Смотрите «ФИЗИКУ в ОПЫТАХ» на openedu.ru!
Это необходимо для получения «зачета» и допуска к экзамену.
Но ГЛАВНОЕ: **Вы станете лучше понимать физику!**
Особенно это касается механики вращательного движения!

**А мы переходим к механике движения
колебательного!!**

^