*Методы интегрирования

*Содержание

1. Первообразная, неопределённый интеграл и его основные свойства
2. Таблица основных интегралов
3. Методы интегрирования:
   - Непосредственное интегрирование
   - Метод замены переменной
   - Интегрирование по частям
   - Интегрирование рациональных дробей
   - Интегрирование тригонометрических функций
4. Примеры

1. Первообразная, неопределённый интеграл и его основные свойства

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка её производная равна :

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx,\ \ a \le x \le b.$$

Отыскание первообразной функции по заданной её производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)dx$ есть действие, обратное дифференцированию, - **интегрирование**.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется **неопределённым интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \textit{если} \quad d\left[F(x)+C\right] = f(x)dx.$$

Здесь, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, С – произвольная постоянная.

* Основные свойства

1. Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int dF(x) = F(x) + C.$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

3. Неопределённый интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределённых интегралов этих функций:
$$\int [f(x) + \varphi(x)]d(x) = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределённого интеграла: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ - любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

*2. Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C;$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

3. Методы интегрирования

* Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1. данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;
2. данный интеграл после применения свойств ***3)*** и ***4)*** (3) $\int[f(x)+\varphi(x)]d(x)=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx.$, 4) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx.$) приводится к одному или нескольким табличным интегралам

Пример:

$$Найти \int 5dx$$

На основании свойства *4)* постоянный множитель 5 можно вынести за знак интеграла и, используя формулу 1, получим:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$$

*Метод замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(t)dt$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную *x* новой переменной *t* с помощью подстановки $x=\varphi(t)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx=\varphi'(t)dt$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо *x* и *dx* их значения, выраженные через *t* и *dt*, имеем

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int F(t)dt.$$

После того как интеграл относительно новой переменной *t* будет найден, с помощью подстановки $t=\psi(x)$ он приводится к переменной *x*.

Пример:

Вычислить $\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx$

Обозначим 3x+1=t, откуда $x = \frac{1}{3}(t-1)$.

$$dx = \frac{1}{3}dt$$

Получаем

$$\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(t-1)}{t^2} \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{9}\int \frac{t-1}{t^2}dt = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t} - t^{-2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1}\right) + c = \frac{1}{9}\left(\ln|3x+1| + \frac{1}{3x+1}\right) + c$$

*Интегрирование по частям

Пусть существуют функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемые на интервале l, если одна из этих функций $U`(V)$ или $V`(U)$ имеет первообразную, то на этом интервале имеет первообразную и другая. При чем справедливо равенство: $\int U V`dx = UV - \int V U`dx$,
где $V`dx$ - $d\ V$, а $U`dx$ - $d\ U$

Таким образом, формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$

При необходимости эта формула может применяться последовательно несколько раз.

Отметим три вида интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. $\int P_n(x) \cdot e^{kx} dx$, $\int P_n(x) \cdot \cos kxdx$; $\int P_n(x) \cdot \sin kxdx$ где Pn(x) – многочлен n – й степени от x, k – произвольное число. В этих интегралах нужно обозначить u=Pn(x), а за dv обозначить все остальные сомножители. Формула интегрирование по частям применяется последовательно n раз. При этом n>0

2. $\int P_n(x)\log_\alpha kxdx$,$\int P_n(x)\arcsin kxdx$, $\int P_n(x)\arccos kxdx$, $\int P_n(x)arctgkxdx$,$\int P_n(x)arcctgkxdx$, где $a>0$, $a\neq 1$ – число, Pn(x) – многочлен n – й степени от x, k – произвольное число. В этих интегралах удобно обозначить $P(x)=dv$, а за u остальные сомножители.

3. $\int e^{mx}\cdot\cos kxdx$, $\int e^{mx}\cdot\sin kxdx$, где m, k – числа, отличные от нуля. Эти интегралы вычисляются двукратным применением формулы интегрирования по частям. За u можно принять функцию $U=e^{mx}$.

*Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$ где n, m – степени многочленов.

Если **n < m**, то рациональная дробь называется **правильной**, в противном случае, при **n ≥ m**, - **неправильной**.

Если дробь неправильная, то из нее нужно сначала выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель

Неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшими рациональными дробями называются правильные рациональные дроби следующих четырех типов: $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$

где A, B, C, a, p, q – любые числа, k∈N, k>1.

Дроби первых двух типов интегрируются непосредственно

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)\cdot(x-a)^{1-k}} + c$$

Для интегрирования дроби третьего и четвертого типов нужно выделить полный квадрат в знаменателе и затем сделать замену переменной.

$$\text{(III)} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

$$\text{(IV)} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{M}{2(1-k)\,(x^2+px+q)^{k-1}} +$$

$$+\frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}+\frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}\right)+C;$$

где $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$.

*Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида:

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx, \qquad \neq$$

Находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right].$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) Подстановка $\sin x = t,$ если $n -$ целое положительное **нечетное** число;

2) Подстановка $\cos x = t,$ если $m -$ целое положительное **нечетное** число;

3) Формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

Если $m \quad n$ – целые **неотрицательные четные** числа;

4)Подстановка $tgx = t,$ если $m+n -$ есть **четное отрицательное целое** число.

*Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$ над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление).

Принято обозначать $R(\sin x;\cos x)$, $-$ знак рациональной функции.

Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$,которая называется **<u>универсальной.</u>**

Действительно,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2arctgt,dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Поэтому $\int R(\sin x;\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt,$

Где $R_1(t)-$ рациональная функция от t .Обычно этот способ весьма громоздкий, зато всегда приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ ***нечётна относительно*** $\sin x$

Т.е $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то подстановка $\cos x=t$ рационализирует интеграл;

2)Если функция $R(\sin x;\cos x)$***нечётна относительно*** $\cos x$

Т.е. $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$,то делается подстановка $\sin x=t$

3)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ ***четна относительно*** $\sin x$ $\cos x$

$R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$,то интеграл рационализируется подстановкой $tgx=t$.Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(tgx)dx$

*4. Примеры

Методом непосредственного интегрирования найдем следующие интегралы: $\int 6x^2 dx.$

Решение:

Используя свойство *4)* ($\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$) и формулу 2 ($\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$), получим:

$$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C.$$

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx.$$

Решение:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx = \int \left(x^2 + 3x + 4\right) dx = \int x^2 dx + 3\int x\, dx + 4\int dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$$

Методом замены переменной найдем следующие интегралы:

1) $\int (3x+2)^5 dx$.

Решение:

Введём подстановку $3x+2=t$. Дифференцируя, имеем $3dx=dt$, откуда $dx=\frac{1}{3}dt$. Подставив в данный интеграл вместо $3x+2$ и dx их выражения, получим:

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{3}\int t^5 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{18}t^6+C.$$

Заменив t его выражением через x, находим:

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C.$$

2) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$.

Решение:

Введём подстановку $2x^3+1=t$. Дифференцируя, имеем $6x^2dx=dt$, откуда $x^2dx=\frac{1}{6}dt$. Таким образом,

$$\int (2x^3+1)^4 x^2 dx = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{30}t^5+C=\frac{1}{30}(2x^3+1)^5+C.$$

Методом интегрирования по частям найдем следующие интегралы:

1) $\int x\sin x\,dx$.

Решение:

Пусть $u = x,\ dv = \sin x\,dx;$ тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x\,dx$,т.е. $v = -\cos x.$
Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}.$

Решение:

Пусть $u = \ln x,\ dv = \frac{dx}{x^2};$ тогда $du = \frac{dx}{x},\ \int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x};\ v = -\frac{1}{x}.$
Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

1.Интегрированием тригонометрических функций найдем интеграл:

$$\int \sin 3x \cos 7x dx$$

Решение: Воспользуемся формулой

$$\left[\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x] \right]$$

Получим: $\frac{1}{2}[\sin(3-7)x + \sin(3+7)x]$

Тогда $\int \sin 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-4x) + \sin 10x) dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 4x) dx =$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 4x\right) + C = \frac{\cos 10x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C$$

2. Найдем интеграл: $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx.$

Решение: Применим подстановку $\sin x = t.$ Т.к.n=5 (1 случай-целое положительное **нечетное** число)

Тогда $\left[\begin{array}{c} x = \arcsin t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right]$

Получим:

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (\sqrt{1-t^2})^4 dt = \int t^4 (1-t^2)^2 dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

3. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$

Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arg tg \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \arg tg \frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C.$$

*Спасибо за внимание