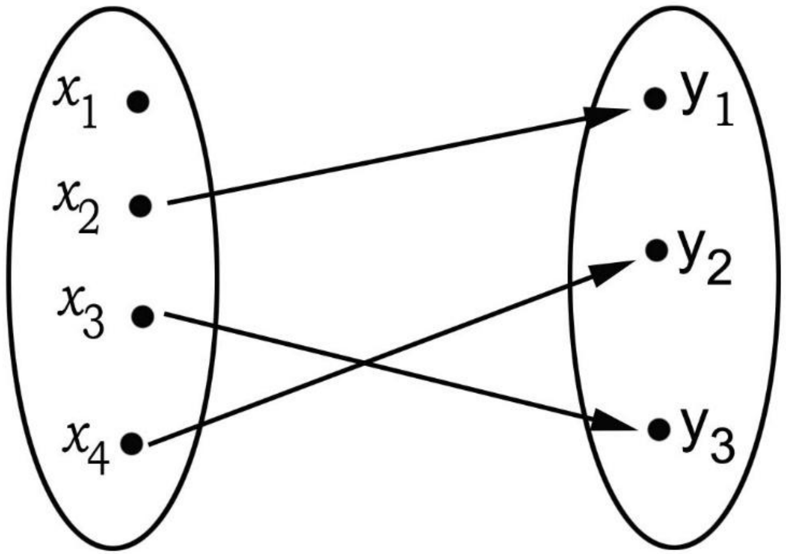
Бінарні відношення. Основні поняття



Мову відношень використовують для опису зв’язків між об’єктами і поняттями.

$$(x_2, y_1), (x_3, y_3), (x_4, y_2)$$

Розділ 2. Відношення

- Бінарне відношення з X в $У$ є підмножина A елементів декартового добутку X на $У$.

XAY, якщо $(x, y) \in A$

або

$X\bar{A}Y$, якщо $(x, y) \notin A$

$A \subseteq X \times Y$

Будь яка підмножина декартового добутку двох множин може розглядатися, як деяке бінарне відношення

Область визначення: $D_{\text{в}} = \{x|(x, y) \in A \subseteq X \times Y\}$

Область значень: $D_{\text{з}} = \{y|(x, y) \in A \subseteq X \times Y\}$

Якщо $D_{в} = X$ відношення задане на X

Якщо $D_{в} \neq X$ відношення задане в X

Матриця відношень V_A $m \times n$

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i A y_j = true \\ 0, & x_i A y_j = false \end{cases}$$

Нехай $X = \{2, 3\}$; $Y = \{3, 4, 5, 6\}$ Відношення задамо так: x_i є дільником y_j. Задати матрицю відношення

Розділ 2. Відношення

$X = \{2, 3\};\ Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{(2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$$

$$V_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Часто розглядають відношення за умови, що *X* та *У* збігаються. В такому випадку маємо відношення з *X* в *X*. Наприклад, розглядаємо відношення між числами, чи щось аналогічне.

В такому підході можна виділити деякі особливі відношення, зокрема: повне, тотожнє, порожнє.

- Відношення P, яке збігається з декартовим добутком $X \times X$ називається повним, якщо $x_i P x_j = true$ для всіх x_i та $x_j \in X$.

$$V_A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Відношення $E \subseteq X \times X$ називається тотожним якщо $x_i E x_j = true$ лише при $i = j$.

$$V_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розділ 2. Відношення

- Порожнє. Відношення $\emptyset \subseteq X \times X$ називається порожнім якщо $x_i E x_j = = false$ при довільних i, j.

$$V_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розглянемо ще раз відношення $A \subseteq X \times Y$.

Множина значень $A(x_i) = \{y | (x_i, y) \in A \subseteq X \times Y\}$ називається перерізом відношення по осі x_i.

Множина всіх перерізів по всіх осях називається фактор множиною множини *У* відносно *А*.

$X = \{2, 3\}; \; Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{(2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$$

$$V_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(A) = \{\{4, 6\}, \{3, 6\}\}$$

Розділ 2. Відношення

- В якості прикладу візьмемо відношення:

$X = \{2, 3\};\ \ Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{(2, 3); (2, 4); (2, 6); (3, 5)\}$$

$$A(2) = \{3, 4, 6\}; \qquad A(3) = \{5\}$$

Якщо задання відношення було у вигляді матриці, то кожен рядок є перерізом по певній осі.

- Дії над відношеннями. Відношення – множина. Тому всі множинні операції можна виконувати над відношеннями. Також є дві специфічні операції – симетризація і композиція.

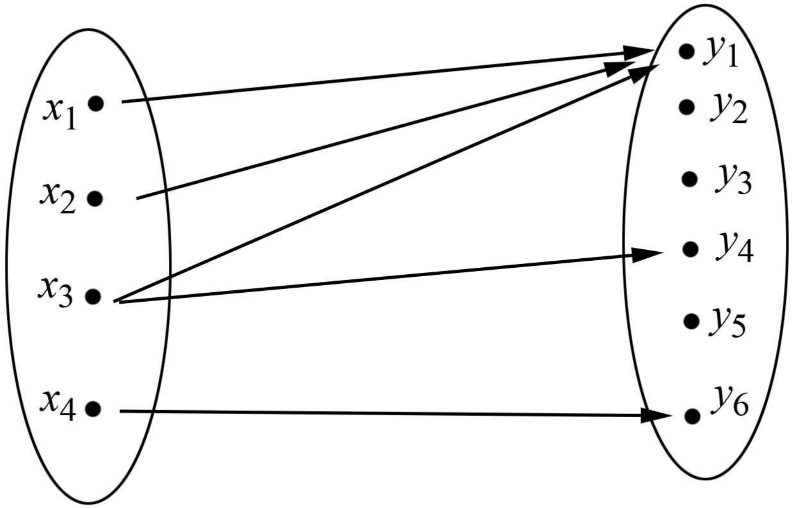
Симетричним до відношення A називається відношення A^{-1}, яке визначається так:

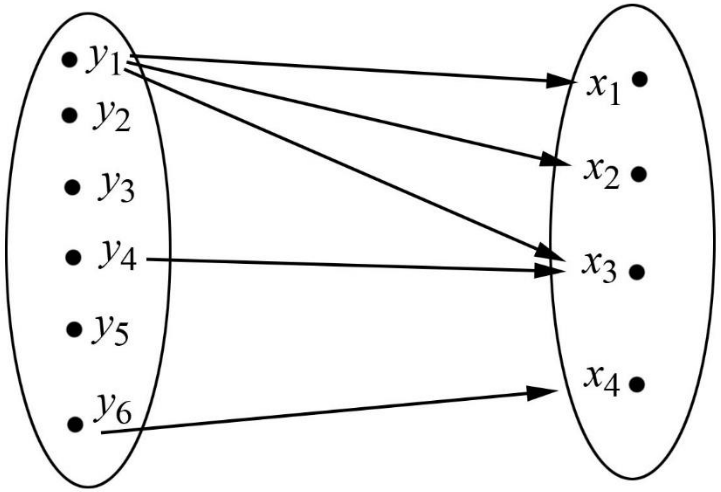
$$A^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in A \subseteq X \times Y\}$$

Як на практиці отримати симетричне з вихідного? Залежно від форми задання. В графі – стрілки змінити на протилежні, в множині – поміняти місцями елементи в парах. Матрицю – транспонувати.

Нехай відношення $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_3, y_4), (x_4, y_6)\}$

- $A^{-1} = \{(y_1, x_1), (y_1, x_2), (y_1, x_3), (y_4, x_3), (y_6, x_4)\}$





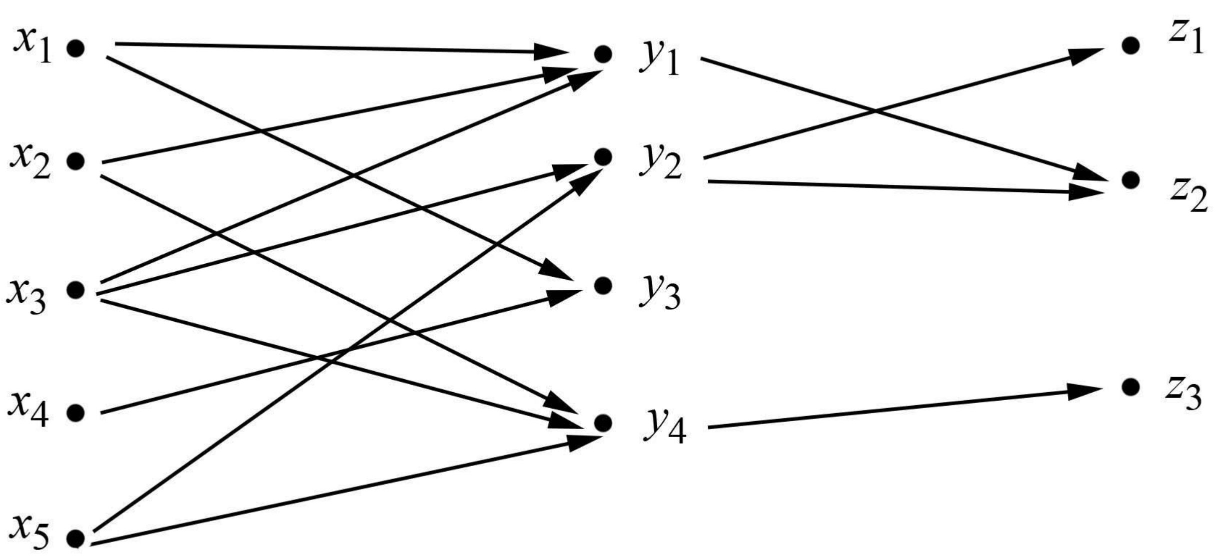
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нехай маємо відношення $A \subseteq X \times Y$ та $B \subseteq Y \times Z$. Композицією цих відношень називається відношення C, визначене так:

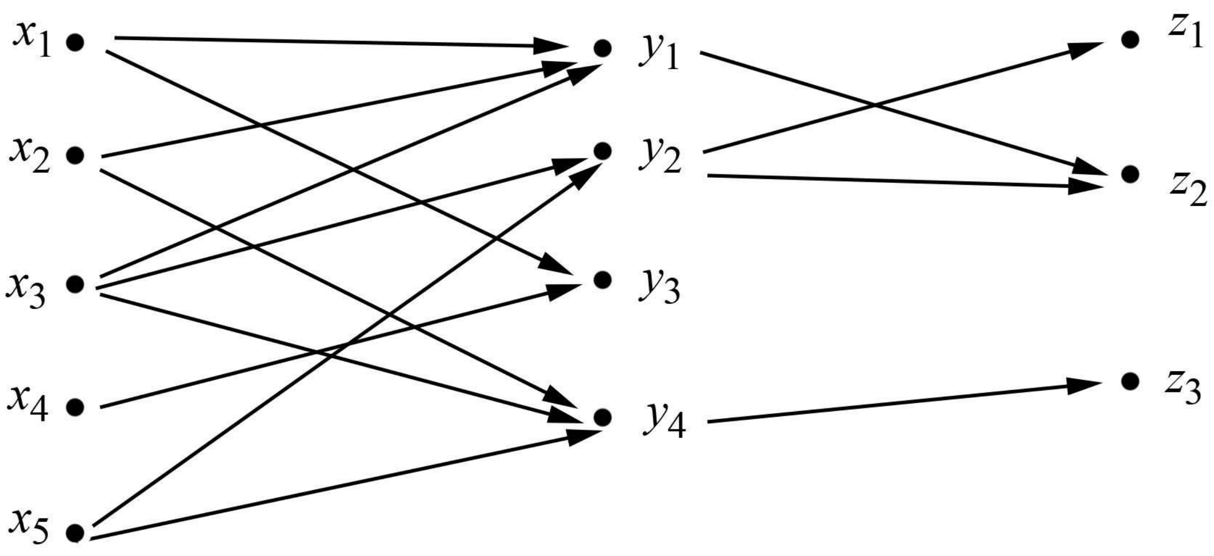
$$C = A \circ B = \{(x,z) | (x,y) \in A \subseteq X \times Y, (y,z) \in B \subseteq Y \times Z\}.$$

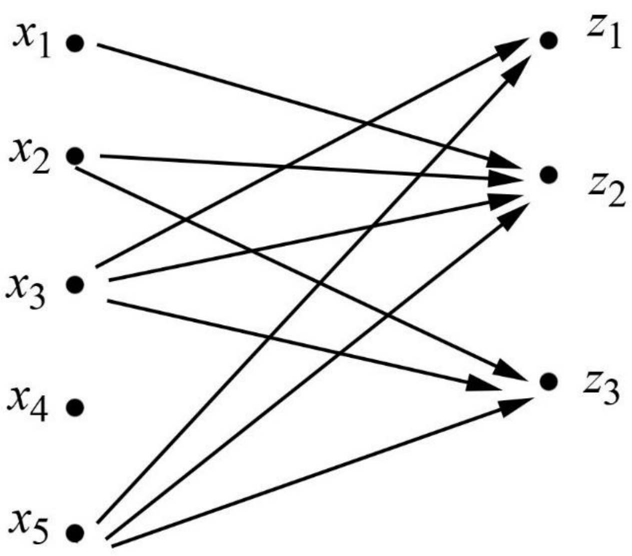
Приклад: $A = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_5, y_2), (x_5, y_4)\}$

$B = \{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_4, z_3)\}$



Спробуємо зрозуміти, що діється





$$C = \{(x_1, z_2), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_3, z_3), (x_5, z_1), (x_5, z_2), (x_5, z_3)\}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Композиція асоціативна, але не комутативна, крім того, $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$

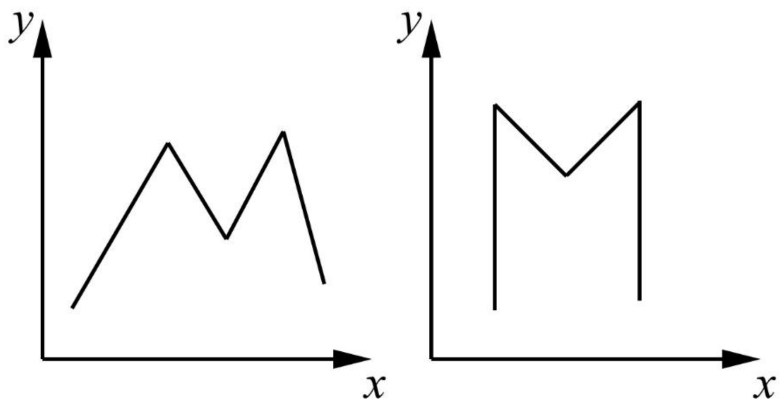
Функціональні відношення та відображення

Відношення $f \subseteq X \times Y$ називається функціональним, якщо всі його впорядковані пари мають різні перші координати.

Іншими словами, відношення є функціональним, якщо кожному з X відповідає одне з Y. При цьому кожному значенню з Y може відповідати декілька значень з X.

Наведу аналогічний приклад

з матаналізу:



- Приклад:

$X = \{x_1, \dots x_6\}$ $Y = \{y_1, \dots y_3\}$

$\{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_1)\}$ – функціональне відношення в X

$\{(x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_3, y_1)\}$ – не функціональне відношення в X

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_5, y_3), (x_6, y_2)\}$ – функціональне відношення на X

Якщо область визначення збігається з X, то таке відношення називається відображенням.

Образ і праобраз. Повний праобраз.

- Приклад:

$X = \{x_1, \dots x_6\}\ Y = \{y_1, \dots y_5\}$

$f = \{(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_4, y_2), (x_5, y_1), (x_6, y_4)\}$

Виділимо з X та Y деякі підмножини

$Q = \{x_1, x_2, x_3\} \subset X;\ R = \{y_2, y_3, y_4\} \subset Y$

$f(Q) = \{y_1, y_2, y_3\}$ – образ Q

$f^{-1}(y_1) = \{x_3, x_5\}$ – повний праобраз елемента $y_1 \in Y$

$f^{-1}(R) = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ – повний праобраз $R \subset Y$

- Без доведення, але варто знати й розуміти:

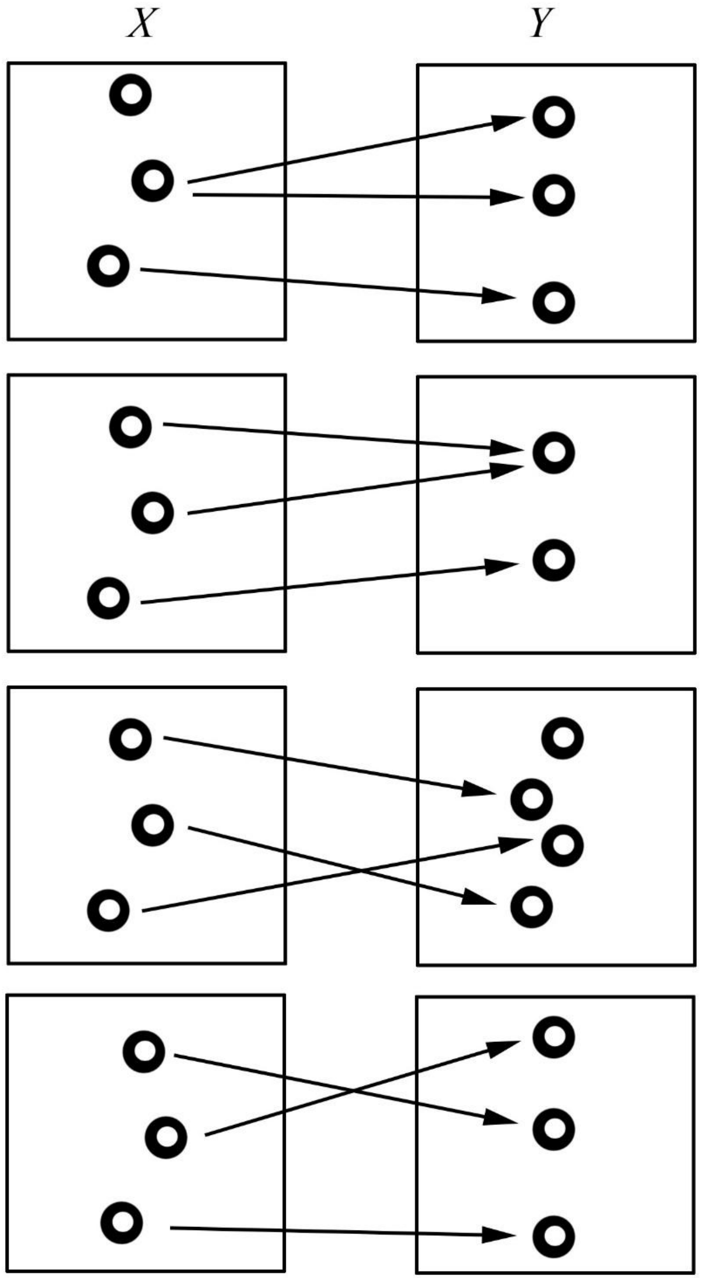
$$f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$$

$$f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}B$$

Розділ 2. Відношення



акцентують увагу на наступних видах

ень:

Властивості відношень. Типи відношень

Нехай X та Y деякі множини, причому ці множини можуть збігатися або – ні. Це ми будемо уточнювати кожен раз. Нехай A відношення визначене на X.

1. Відношення $A \subseteq X \times X$ називається рефлексивним, якщо воно включає тотожнє відображення $E \subseteq A$, інакше кажучи, якщо для всіх $x \in X$ $xAx = true$.

Приклад: Відношення рівності визначене на множені чисел

Зауваження: Матриця квадратна і має по діагоналі всі елементи, що дорівнюють одиниці. Граф – малюнок з петлями на кожній вершині.

2. Відношення $A \subseteq X \times X$ називається антирефлексивним, якщо $A \cap E = \emptyset$, тобто це відношення, за яким для довільного $x \in X \quad xAx = false$.

Приклад: Відношення строгої нерівності визначене на множені чисел

Зауваження: Матриця квадратна і має по діагоналі всі елементи, що дорівнюють нулю. Граф – малюнок без петель.

3. Відношення $A \subseteq X \times Y$ називається симетричним, якщо $A = A^{-1}$, тобто якщо $xAy = true$, то обов'язково $yAx = true$

Приклад: Бути братом, визначене на множині чоловіків.

Відношення відстані між точками.

Зауваження: Матриця симетрична відносно основної діагоналі – збігається з транспонованою. У графі – для кожної дуги є пара, що з'єднує ті ж вершини, але напрям протилежний

4. Відношення $A \subseteq X \times Y$ називається асиметричним, якщо $A \cap A^{-1} = \emptyset$, тобто якщо $xAy = true$, то обов'язково $yAx = false$.

Приклад: Відношення бути батьком

Зауваження: Матриця має по діагоналі всі елементи, що дорівнюють нулю, а решта елементів визначаються так: $v_{ij} = 1 - v_{ji}$. Граф – малюнок без петель і жодної парної дуги.

5. Відношення $A \subseteq X \times Y$ називається антисиметричним, якщо$A \cap A^{-1} \subseteq E$, тобто якщо $xAy = true$, то $yAx = true$ лише $x = y$.

Приклад: ввідношення нестрогої нерівності.

Зауваження: Матриця має по діагоналі всі елементи, що дорівнюють одиниці, а решта елементів визначаються так: $v_{ij} = 1 - v_{ji}$. Граф – петлі можуть бути, парні дуги – ні.

6. Відношення $A \subseteq X \times Y$ називається транзитивним, якщо композиція $A \circ A \subseteq A$, тобто якщо $xAy = true$ і $yAz = true$, то і $xAz = true$

Приклад: Відношення бути дільником

Зауваження: Елементи матриці $v_{ik} = v_{ij}v_{jk}$. На графі – кожній послідовній парі дуг є альтернатива однією.

Існують відношення, що не володіють жодною з властивостей, а існують такі, що володіють декількома одночасно. За цим відношення поділяють на типи.

Відношення еквівалентності: рефлексивне, симетричне, транзитивне

Відношення толерантності: рефлексивне, симетричне і антитранзитивне

Відношення порядку: антирефлексивне, а(анти)симетричне, транзитивне